31 MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA

Come conseguenza del teorema del valor medio otteniamo che se conosciamo il segno di f' su un intervallo possiamo conoscere il segno del rapporto incrementale sullo stesso intervallo e quindi dedurne la monotonia di f.

Teorema. *Sia f derivabile in $[a, b]$. Se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$), allora f è non decrescente (risp. non crescente). Se $f' > 0$ (risp. $f' < 0$) allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

DIMOSTRAZIONE ($f' > 0$) Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$; per il Teorema del valor medio si ha che $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) > 0$.□

Osservazione. Se f è non-decrescente allora il suo rapporto incrementale è non-negativo e quindi anche $f' \geq 0$, quindi possiamo dedurre che una funzione derivabile in un intervallo è non-descescente *se e solo se* $f' \geq 0$. Un enunciato analogo vale per le funzioni non-crescenti, ma se f è strettamente crescente non possiamo dedurre che $f' > 0$ in ogni punto: si consideri la funzione $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente; la sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla in 0. Naturalmente in questo caso possiamo dedurre dal teorema che f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, e quindi lo è anche su tutto $\mathbf{R}$.

Studio della monotonia. Dal teorema precedente abbiamo il seguente procedimento:

1. Calcolare f';
2. Studiare il segno di f'. Individuare nel dominio di f' gli intervalli in cui $f' > 0$ e $f' < 0$;
3. Dedurre che in tali intervalli f è strettamente crescente o decrescente.

Esempio. Sia $f(x) = x^2 e^{-x}$. Allora:

1. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$;
2. Si ha $f' > 0$ per $0 < x < 2$ e $f' < 0$ per $x < 0$ o $x > 2$;
3. Deduciamo che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, +\infty)$, strettamente crescente in $(0, 2)$.

NOTA: per verificare che non si sono fatti errori conviene controllare che le deduzioni sulla monotonia siano coerenti con i valori e i limiti della funzione agli estremi degli intervalli di monotonia. In questo caso, conviene verificare che

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > f(0)$;
b. $f(0) < f(2)$;
c. $f(2) > \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Queste condizioni sono presto verificate, traducendosi in

a. $+\infty > 0$; b. $0 < 4e^{-2}$; c. $4e^{-2} > 0$.

Esempio. Sia $f(x) = x \log |x|$. Allora:

1. $f'(x) = \log |x| + 1$;

2. Si ha $f' > 0$ per $x < -1/e$ o $x > 1/e$ e $f' < 0$ per $-1/e < x < 0$ o $0 < x < 1/e$;

3. Deduciamo che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1/e)$ e in $(1/e, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-1/e, 0)$ e $(0, 1/e)$.

NOTA: notare che entrambi gli esempi precedenti non sono deducibili semplicemente dalla conoscenza delle proprietà di monotonia delle funzioni elementari

32 ESERCIZI SULLA MONOTONIA

Determinare gli intervalli in cui sono monotone crescenti/decrescenti, le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \log |1 + \log x| + 2 \log 2$;

2. $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x}{x+1}\Big) + \log(2x^2 + 2x + 1)$;

3. $f(x) = e^{\sqrt{\log^2 x + \log x}}$;

4. $f(x) = |x - 1| e^{x^2}$;

5. $f(x) = \arctan\Big(\log\Big(\dfrac{1 + \sin x}{|\cos x|}\Big)\Big)$;

6. $f(x) = \arctan(\tan x)$;