

## 35 LO STUDIO DI FUNZIONE

(informazioni deducibili da limiti e dalla derivata)

Possiamo riassumere parte di quello che abbiamo visto nelle ultime lezioni come un ‘algoritmo’ per studiare le proprietà (ed eventualmente tracciare un grafico approssimato) di una funzione  $f$  di cui si può calcolare la derivata.

1. Studio del dominio di  $f$ : suddivisione del dominio in intervalli. Semplificazione del dominio usando simmetrie (parità o disparità della funzione) o periodicità;
2. Andamento di  $f$  agli estremi degli intervalli di definizione: calcolo dei limiti e dei comportamenti asintotici;
3. Calcolo della derivata. Studio del dominio di  $f'$ : suddivisione del dominio in intervalli;
4. Studio del segno della derivata. Individuazione degli intervalli di monotonia;
5. Classificazione di punti di discontinuità e di non-derivabilità; individuazione di estremi relativi ed assoluti.

**Esempio.** Studiamo la funzione  $f(x) = \frac{x \log |x|}{x+1}$ .

1. Dominio di  $f = \{x \neq 0, -1\}$ , che scriviamo come unione di intervalli:  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, +\infty)$ ;

2. Calcolo dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log |x| = +\infty;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log(-x)}{1+x} \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1-y)}{y} = 1; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log |x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} x \log |x| = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log |x| = +\infty.$$

In particolare  $f$  è estendibile con continuità in  $-1$  e  $0$ .

Inoltre si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \log |x|}{1+x} - \log |x| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\log |x|}{1+x} = 0,$$

e quindi  $f$  è asintotica a  $\log |x|$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ;

3. Calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{1+x+\log|x|}{(1+x)^2}.$$

Il dominio di  $f'$  è lo stesso di  $f$ ;

4. Si ha  $f' > 0$  se e solo se  $\log|x| + x + 1 > 0$ . Per  $x < 0$  la funzione  $g(x) = \log|x| + x + 1$  ha derivata  $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$  da cui si deduce che  $g$  è crescente in  $(-\infty, -1)$  e decrescente in  $(-1, 0)$ , quindi ha massimo in  $x = -1$  e  $g(-1) = 0$ , quindi  $f' = g < 0$  per  $x < 0$  e  $x \neq -1$ ;

Per  $x > 0$  la disequaglianza  $f' > 0$  equivale a  $\log|x| > -x - 1$ , che si risolve ‘graficamente’. Usando il teorema degli zeri si ottiene che esiste un punto  $\alpha \in (0, 1)$  in cui  $f' = 0$  e tale che  $f' < 0$  in  $(0, \alpha)$  e  $f' > 0$  in  $(\alpha, +\infty)$ .

Dunque:  $f$  è strettamente decrescente in  $(-\infty, -1)$ , in  $(-1, 0)$  e in  $(0, \alpha]$  (e la sua estensione per continuità è strettamente decrescente in  $(-\infty, \alpha]$ ), e strettamente crescente in  $[\alpha, +\infty)$ ;

5. Come abbiamo visto 0 e  $-1$  sono punti di discontinuità eliminabile. La funzione non ha punti di non-derivabilità ed ha un solo punto di minimo assoluto  $\alpha$ , che è anche il solo punto stazionario.

Estendendo  $f$  con continuità in  $-1$  e 0, ponendo  $f(0) = 0$  e  $f(-1) = 1$ , calcolando la derivata in questi due punti si ha:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log|x|}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log|x| = -\infty,$$

e quindi  $x = 0$  diventa un punto a tangente verticale, mentre

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \log|x| - x - 1}{(1+x)^2} = (\text{H}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log|x|}{2(1+x)} = (\text{H}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e quindi anche la derivata si estende in  $-1$  ed è diversa da 0.

### Osservazioni.

(a) A volte il dominio di  $f'$ , o la sua suddivisione in intervalli in cui  $f' > 0$  o  $f' < 0$ , non si calcolano esplicitamente, ma i teoremi che abbiamo a disposizione ci aiutano a descriverli qualitativamente. Nell'esempio sopra abbiamo usato il teorema degli zeri per determinare il numero di intervalli in cui  $f' > 0$ ;

(b) Nell'esempio precedente lo studio del segno di  $f'$  per  $x < 0$  non può essere eseguito facilmente, ma dobbiamo studiare la funzione  $g$  (in sostanza: per studiare  $f$  dobbiamo studiare prima  $f'$ ).

## 36 PROPRIETÀ DEDUCIBILI DA $f''$ . CONVESSITÀ E CONCAVITÀ

Vediamo per prima cosa un tipo di informazioni ‘locali’: noi sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto  $x_0$ , lì il suo grafico è simile a quello di una retta. Se una funzione è derivabile due volte ci aspettiamo che il suo grafico sia simile a quello di una parabola, e se  $x_0$  è un punto stazionario ci aspettiamo che il vertice della parabola sia proprio  $x_0$ , ovvero  $x_0$  sia un massimo o minimo relativo.

**Teorema. (criterio della derivata seconda)** Sia  $f \in C^1(I)$  e  $x_0$  un punto stazionario di  $f$ . Se esiste  $f''(x_0) > 0$  (risp.  $< 0$ ), allora  $x_0$  è un punto di minimo (risp. massimo) relativo per  $f$ .

**DIMOSTRAZIONE** Si ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ , quindi esiste, per il Teorema della permanenza del segno  $\delta > 0$  tale che

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \text{ per } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Quindi per  $x \in ]x_0 - \delta, x_0[$  si ha  $f'(x) < 0$ , ovvero la funzione è decrescente in  $]x_0 - \delta, x_0[$ , mentre per  $x \in ]x_0, x_0 + \delta[$  si ha  $f'(x) > 0$ , ovvero la funzione è crescente in  $]x_0, x_0 + \delta[$ . Questo mostra che  $f(x_0) < f(x)$  per  $0 < |x - x_0| < \delta$ .  $\square$

**NOTA:** questo teorema suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Attenzione però : la condizione è solo sufficiente (si consideri la funzione  $x^4$  nel punto 0).

**Definizione** Se  $x_0$  è punto stazionario per  $f$  e  $f$  è monotona in un intorno di  $x_0$ , allora  $x_0$  si dice un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE (per esempio:  $f(x) = x^3$  e  $x = 0$ ).

**Proposizione.** Se  $x_0$  è un punto di flesso a tangente orizzontale ed esiste  $f''(x_0)$ , allora  $f''(x_0) = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE**  $f$  monotona  $\implies f' \geq 0$  (oppure  $\leq 0$ )  $\implies x_0$  è un punto di minimo relativo (oppure massimo relativo) per  $f' \implies f''(x_0) = (f')'(x_0) = 0$ .  $\square$

Vediamo ora come dallo studio di  $f''$  si deducano anche delle informazioni ‘globali’, allo stesso modo in cui dallo studio della derivata prima si deducono informazioni sulla monotonia.

**Definizione** Una funzione  $f$  definita su un intervallo si dice CONVESSA se per ogni  $x, y$  e  $t \in (0, 1)$  si ha

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$$

(diseguaglianza di convessità). Se vale sempre la diseguaglianza opposta allora diremo che  $f$  è CONCAVA.

NOTA: il significato di questa disuguaglianza, letto sul grafico, è il seguente: al variare di  $t$  tra 0 e 1 il punto  $z = ty + (1 - t)x$  prende tutti i valori tra  $x$  e  $y$ . Il valore  $tf(y) + (1 - t)f(x)$  non è altro che quello della retta secante al grafico nei punti relativi a  $x$  e  $y$  corrispondente a  $z$ . Quindi: *una funzione è convessa se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sotto il grafico'.*

**Esempi.** (1)  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = |x|$  sono convesse (provarlo: basta osservare i grafici).

(2)  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  non sono convesse. Per la prima verificare che il segmento secante al grafico tra  $x = -1$  e  $x = 0$  sta sotto il grafico, per la seconda che il segmento secante al grafico tra  $x = 0$  e  $x = 1$  sta sotto il grafico;

(3)  $f(x) = x^3$  non è né concava né convessa.  $f(x) = \sqrt{x}$  è concava.

NOTA: se  $f$  è derivabile, allora dire che  $f$  è convessa è equivalente a dire che per ogni  $x, x_0 \in (a, b)$  si ha

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x),$$

ovvero *il grafico della funzione  $f$  sta sopra la tangente in un punto  $x_0$* , e anche che  $f'$  è non decrescente. Se  $f$  è derivabile due volte ha quindi il seguente criterio:

**Teorema. (criterio di convessità)** Sia  $I$  intervallo e  $f \in C^2(I)$ . Allora  $f$  è convessa in  $I$  se e solo se  $f'' \geq 0$ , e  $f$  è concava in  $I$  se e solo se  $f'' \leq 0$ .

Come per i punti in cui cambia la monotonia, è utile avere una notazione per i punti in cui  $f$  cambia da concava a convessa o viceversa.

**Definizione** Diciamo che  $x_0$  è un PUNTO DI FLESSO per  $f$  se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e se esiste un  $\delta > 0$  tale che  $f$  è concava in  $(x_0 - \delta, x_0)$  e convessa in  $(x_0, x_0 + \delta)$ , o viceversa.

NOTA: se  $x_0$  è un punto di flesso ed esiste  $f''(x_0)$  allora  $f''(x_0) = 0$ .

**Esempio** Determinare gli intervalli su cui  $f(x) = x^3 + x^2$  è concava/convessa.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui  $f'' \geq 0$  e  $f'' \leq 0$  rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \quad f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Dunque  $f$  è convessa su  $[-1/3, +\infty)$  e concava su  $(-\infty, -1/3]$ . In particolare  $x = -1/3$  è punto di flesso.