37 ALCUNI ESERCIZI SULLA CONVESSITÀ

1. Determinare il più piccolo valore a tale che la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x-5}$$

sia convessa su $(a, +\infty)$.

Le derivate prima e seconda di f sono

$$f'(x) = \frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x(x^2-12x+37)}{(x-5)^3}$$

definite per $x \neq 5$. Dato che $x^2 - 12x + 37 > 0$ per ogni x, il segno di f'' è lo stesso di $(x-5)^3$, ovvero f'' è positiva per $x > 5$. La risposta è quindi $a = 5$.

2. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = e^{-x^2}$ è concava/convessa.

Ancora, la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Dunque

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 0,$$

e f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e concava sull'intervallo $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. In particolare $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punto di flesso.

3. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa.

In questo caso la funzione non è derivabile due volte in 1, mentre la funzione è affine (e quindi sia concava che convessa) in $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Su tutto $\mathbf{R}$ la funzione è concava, quindi f è convessa su ogni intervallo che non contiene 0.

4. Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = \frac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49}$$

è concava.

Notiamo che $x^2 + 7x + 49 > 0$ per ogni x e quindi la funzione è definita su tutto $\mathbf{R}$. Inoltre è derivabile due volte; quindi la funzione f è concava su un intervallo $[a, b]$ se e solo $f'' \leq 0$ su $[a, b]$.

Dopo aver semplificato

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 50}{x^2 + 7x + 49} = 1 + \frac{1}{x^2 + 7x + 49},$$

calcoliamo:

$$f'(x) = -\frac{2x + 7}{(x^2 + 7x + 49)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(2x + 7)^2 - 2(x^2 + 7x + 49)}{(x^2 + 7x + 49)^3} \\ &= 2 \cdot \frac{4x^2 + 28x + 49 - x^2 - 7x - 49}{(x^2 + 7x + 49)^3} \\ &= \frac{6}{(x^2 + 7x + 49)^3} \cdot (x^2 + 7x). \end{aligned}$$

Quindi

$$f''(x) \leq 0 \iff -7 \leq x \leq 0,$$

dunque f è concava in tutti gli intervalli $[a, b]$ contenuti in $[-7, 0]$.

5. Determinare gli intervalli su cui $f(x) = |x - 1| + \sqrt{|x| - x}$ è convessa/concava.

Per $x \geq 0$ si ha

$$f(x) = |x - 1|,$$

che è convessa. Inoltre f è concava in ogni intervallo di $(0, +\infty)$ che non contiente 1.

Per $x < 0$ si ha $f(x) = -1 + x + \sqrt{-2x}$, la cui derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-2x^3}},$$

che è negativa. Dunque f è concava in $(-\infty, 0]$. Si vede facilmente dal grafico che f non è concava in nessun intervallo aperto che contiene 0.

38 PROPRIETÀ DEDUCIBILI DALLE DERIVATE SUCCESSIVE

Criterio della derivata n-ima. Sia f n volte derivabile in a, e supponiamo che

$$f'(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Il Teorema sui polinomi di Taylor ci assicura che f si comporta allora come $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ nel senso che

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n.$$

Dunque se n è pari e $f^{(n)}(a) < 0$ si ha un punto di massimo relativo per f in a; se n è pari e $f^{(n)}(a) > 0$ si ha un punto di minimo relativo per f in a.

Se n è dispari e $f^{(n)}(a) < 0$ f è strettamente decrescente in un intorno di a; se n è dispari e $f^{(n)}(a) > 0$ f è strettamente crescente in un intorno di a.

Il resto di Lagrange nella formula di Taylor

Sia f $n+1$ volte derivabile in un intervallo I e $a \in I$. Allora usando il Teorema di Lagrange si dimostra che se $x \in I$, esiste $\xi \in]a, x[$ tale che si ha

$$f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ovvero il resto della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta di Lagrange)

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

ESEMPI: 1) Consideriamo $f(x) = e^x$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

da cui

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, abbiamo

$$e^x = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

In particolare possiamo calcolare

$$e = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

2) Consideriamo $f(x) = \log(1+x)$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, se $0 \le x \le 1$

$$|\log(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

e, dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n} = 0$, si ha infine

$$\log(1+x) = \lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

In particolare possiamo calcolare

$$\log 2 = \lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$