

Soluzioni

1. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = i + \frac{3}{2-i}.$$

R.

$$\begin{aligned} z &= i + \frac{3 \cdot \overline{2-i}}{|2-i|^2} = i + \frac{3 \cdot (2+i)}{4+1} = i + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \\ &= \frac{6}{5} + \left(1 + \frac{3}{5}\right)i = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i. \end{aligned}$$

Quindi $\operatorname{Re}(z) = 6/5$ e $\operatorname{Im}(z) = 8/5$.

— $\diamond$ —

2. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{1+2i}{-3+i}.$$

R.

$$z = \frac{1+2i}{-3+i} = \frac{(1+2i) \cdot \overline{(-3+i)}}{|-3+i|^2} = \frac{(1+2i) \cdot (-3-i)}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Quindi $\operatorname{Re}(z) = -1/10$ e $\operatorname{Im}(z) = -7/10$.

— $\diamond$ —

3. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = (1+2i)^4 - (1-2i)^4.$$

R. Sia $w = (1+2i)^4$ allora $z = w - \overline{w} = 2i\operatorname{Im}(w)$ e

$$\begin{aligned} z &= 2i\operatorname{Im}((1+2i)^4) = 2i\operatorname{Im}(1 + 4(2i) + 6(2i)^2 + 4(2i)^3 + (2i)^4) \\ &= 2i\operatorname{Im}(4(2i) + 4(2i)^3) = 2i(8 + 32(-1)) = -48i. \end{aligned}$$

Quindi $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) = -48$.

— $\diamond$ —

4. Calcolare la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}.$$

R. Conviene scrivere i numeri $1+i$ e $1-i$ in forma esponenziale:

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad 1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi

$$z = \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = \frac{(\sqrt{2})^{10} e^{i\frac{10\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^8 e^{-i\frac{8\pi}{4}}} = (\sqrt{2})^2 e^{i\frac{(10+8)\pi}{4}} = 2 e^{i\frac{9\pi}{2}} = 2 e^{i(4+\frac{1}{2})\pi} = 2i.$$

— $\diamond$ —

5. Sia $z = i$. Calcolare

$$z^7 \quad \text{e} \quad z^{2002}.$$

R. Sapendo che $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ allora

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1.$$

Quindi per calcolare le potenze richieste basta considerare solo il resto della divisione dell'esponente per 4:

$$\begin{aligned} z^7 &= i^7 = i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i; \\ z^{2002} &= i^{2002} = i^{4 \cdot 500 + 2} = i^{4 \cdot 500} \cdot i^2 = i^2 = -1. \end{aligned}$$

— $\diamond$ —

6. Sia $z = 1+i$. Calcolare

$$(z^{2005} + \bar{z}^{2005})/2^{1002}.$$

R. Scriviamo z in forma esponenziale

$$z = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

e poi calcoliamo z^{2005} (notando che $e^{i501\pi} = -1$)

$$z^{2005} = 2^{2005/2} e^{i2005\pi/4} = 2^{1002} \sqrt{2} e^{i(501+1/4)\pi} = 2^{1002} \sqrt{2} e^{i501\pi} e^{i\pi/4} = -2^{1002} z.$$

Infine dato che $\bar{z}^{2005} = \overline{z^{2005}} = -2^{1002} \bar{z}$

$$(z^{2005} + \bar{z}^{2005})/2^{1002} = (-2^{1002} z - 2^{1002} \bar{z})/2^{1002} = -(z + \bar{z}) = -2\operatorname{Re}(z) = -2.$$

— $\diamond$ —

7. Sia $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calcolare

$$z^{8!-1}.$$

R. Scriviamo prima z in forma esponenziale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dunque $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ e quindi $z^6 = e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 1$. Dato che $8!$ è un multiplo di 6 $z^{8!} = 1$ e

$$z^{8!-1} = z^{8!} \cdot z^{-1} = z^{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

— $\diamond$ —

8. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z + \bar{z} = 0.$$

R. Riscriviamo l'equazione ponendo $z = x + iy$

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x = 0$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono quelli della retta $x = 0$.

— $\diamond$ —

9. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^2(\bar{z} + 2) = 2z(z + 1).$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ allora

$$z^2(\bar{z} + 2) - 2z(z + 1) = z|z|^2 + 2z^2 - 2z^2 - 2z = z(|z|^2 - 2) = 0.$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$z = 0 \quad \text{oppure} \quad |z|^2 = 2$$

ossia il punto $z = 0$ e la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$.

— $\diamond$ —

10. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$z^4 + |z|^4 = 0.$$

R. Dato che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ allora

$$z^4 + |z|^4 = z^4 + z^2 \bar{z}^2 = z^2(z^2 + \bar{z}^2) = 0$$

Quindi i punti del piano complesso richiesti sono tali che

$$z^2 = 0 \quad \text{oppure} \quad z^2 + \bar{z}^2 = 0$$

ossia il punto $z = 0$ e le rette $y = -x$ e $y = x$. Dato che il punto 0 appartiene alle due rette nel descrivere l'insieme ottenuto possiamo semplicemente dire che è costituito dalle due rette $y = -x$ e $y = x$.

— ◇ —

11. Determinare l'insieme dei numeri z tali che

$$|\bar{z} - 2| = |\operatorname{Re}(z + 2)|.$$

R. Posto $z = x + iy$ ed elevando al quadrato otteniamo l'equazione equivalente

$$|(x - 2) - iy|^2 = |x + 2|^2$$

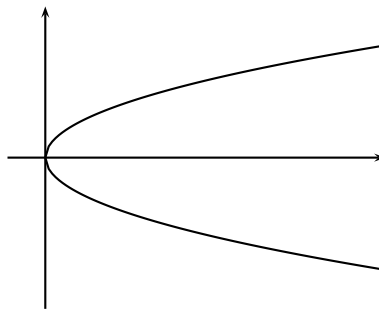
ossia

$$(x - 2)^2 + (-y)^2 = (x + 2)^2.$$

Svolgendo e semplificando troviamo che le coordinate dei punti dell'insieme cercato soddisfano l'equazione

$$y^2 = 8x$$

che rappresenta la seguente parabola



— ◇ —

12. Determinare il minimo dell'insieme

$$\{|z| : (z + 2 + 2i)^2 = -1\}.$$

R. Troviamo intanto le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(z + 2 + 2i)^2 + 1 = 0$$

Ricordando che $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ allora

$$(z + 2 + 2i)^2 + 1 = ((z + 2 + 2i) + i)((z + 2 + 2i) - i) = (z + 2 + 3i)(z + 2 + i)$$

Dunque le radici di questo polinomio sono

$$z_1 = -(2 + 3i) = -2 - 3i \quad \text{e} \quad z_2 = -(2 + i) = -2 - i.$$

Ora calcoliamo i moduli ovvero gli elementi dell'insieme dato:

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{e} \quad |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Quindi il minimo richiesto è $\sqrt{5}$.

— $\diamond$ —**13.** Determinare il massimo dell'insieme

$$\{\operatorname{Re}(w) : w^3 = 8i\}.$$

R. Troviamo intanto le radici terze di $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} w_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i, \\ w_1 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i, \\ w_2 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i. \end{aligned}$$

Quindi

$$\max \{\operatorname{Re}(w) : w^3 = 8i\} = \max \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\} = \sqrt{3}.$$

— $\diamond$ —**14.** Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2iz + 3 = 0.$$

R. Cominciamo con il calcolo di Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(3) = -16.$$

Le due radici quadrate di $\Delta = -16 = 16e^{i\pi}$ sono

$$w_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i \quad \text{e} \quad w_2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = -4i.$$

Quindi

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{2i + 4i}{2} = 3i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{2i - 4i}{2} = -i.$$

— $\diamond$ —**15.** Risolvere l'equazione

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

R. Calcolo di Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i = 5e^{i\theta}.$$

Determiniamo le due radici quadrate di Δ senza determinare θ : imponendo

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$$

otteniamo che $y = -2/x$ e $x^2 - y^2 = x^2 - 4/x^2 = -3$, ossia $x^2 = 1$ e $x^2 = -4$. Dato che x è un numero reale consideriamo solo $x^2 = 1$ ossia $x = \pm 1$. Quindi le due radici quadrate di $\Delta = -3 - 4i$ sono $1 - 2i$ e $-1 + 2i$ e possiamo determinare le soluzioni:

$$z_1 = (3 + (1 - 2i))/2 = 2 - i \quad \text{e} \quad z_2 = (3 + (-1 + 2i))/2 = 1 + i.$$

— $\diamond$ —**16.** Risolvere l'equazione

$$(z^2 + i)^2 + 1 = 0.$$

R. Il primo membro è un polinomio di quarto grado in $\mathbb{C}$ e dunque ci aspettiamo quattro soluzioni (tenendo conto della molteplicità). Poniamo $w = z^2 + i$ e intanto risolviamo l'equazione $w^2 = -1$. Questa ha due soluzioni $w_1 = i$ e $w_2 = -i$ e quindi l'equazione proposta è equivalente a trovare le soluzioni delle due equazioni

$$z^2 + i = w_1 = i, \quad z^2 + i = w_2 = -i.$$

La prima equivale a $z^2 = 0$ e quindi le soluzioni sono $z_1 = z_2 = 0$ (la soluzione 0 ha molteplicità 2). La seconda invece equivale a

$$z^2 = -2i = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

e dunque otteniamo

$$z_3 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \quad z_4 = -z_3 = -1 + i.$$

— $\diamond$ —**17.** Risolvere l'equazione

$$||z| - 2i|^2 = 4.$$

R. Abbiamo che

$$||z| - 2i|^2 = (\operatorname{Re}(|z| - 2i))^2 + (\operatorname{Im}(|z| - 2i))^2 = |z|^2 + (-2)^2 = |z|^2 + 4 = 4.$$

ossia $|z|^2 = 0$ che è risolta solo per $z = 0$.

— $\diamond$ —**18.** Risolvere l'equazione

$$|z|^2 = 12 - |z|.$$

R. Si tratta di un'equazione di secondo grado nella variabile $\rho = |z|$:

$$\rho^2 + \rho - 12 = 0.$$

che ha come soluzioni $\rho_1 = 3$ e $\rho_2 = -4$. Dato che $|z| \geq 0$, possiamo accettare solo la soluzione $\rho_1 = 3$. Quindi l'equazione iniziale è risolta da tutti i punti z tali che $|z| = 3$ ossia la circonferenza centrata in 0 di raggio 3.

— $\diamond$ —

19. Risolvere l'equazione

$$\operatorname{Im}(z^2) = |z|^2.$$

R. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}((x + iy)^2) = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2xy \quad \text{e} \quad |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Quindi l'equazione iniziale è equivalente a $2xy = x^2 + y^2$ ossia $(x - y)^2 = 0$ ed è dunque risolta da tutti i punti sulla bisettrice $y = x$.

— $\diamond$ —

20. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^9 = z^3 |z|^5.$$

R. Se calcoliamo il valore assoluto di entrambi i membri otteniamo

$$|\bar{z}|^9 = |z|^9 = |z^3| |z|^5 = |z|^8,$$

ossia

$$|z|^9 - |z|^8 = |z|^8(|z| - 1) = 0.$$

e quindi $|z| = 0$ oppure $|z| = 1$. Se $|z| = 0$ allora otteniamo una prima soluzione: $z = 0$. Se invece $|z| = 1$ allora $\bar{z}^9 = z^{-9}$ e l'equazione iniziale diventa $z^{-9} = z^3$ ossia $z^{12} = 1$ che ha 12 soluzioni. Dunque in totale le soluzioni sono 13.

— $\diamond$ —

21. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(z^4 - 1)/(z^3 + 1)^2 = 0.$$

R. Il numeratore $(z^4 - 1)$ ha quattro zeri distinti (ciascuno con molteplicità 1):

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

Il denominatore $(z^3 + 1)^2$ ha tre zeri distinti (ciascuno con molteplicità 2):

$$-1, \quad (1 + i\sqrt{3})/2, \quad (1 - i\sqrt{3})/2.$$

Il rapporto è uguale a zero se e solo se il numeratore si annulla e il denominatore è diverso da zero (altrimenti il rapporto non è definito!). Quindi l'insieme richiesto ha 3 elementi (gli elementi multipli contano una sola volta): $\{1, i, -i\}$.

— $\diamond$ —

22. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$z(\bar{z} + 2|z|) + 4 = 2|z|(z + 1).$$

R. Svolgendo si ottiene

$$|z|^2 + 2z|z| + 4 = 2|z|z + 2|z|$$

ossia

$$|z|^2 - 2|z| + 4 = 0.$$

Se si risolve rispetto a $|z|$ si ottiene che

$$|z| = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |z| = 1 - i\sqrt{3}$$

e nessuna delle due equazioni ammette soluzioni perché $|z|$ deve essere un numero reale maggiore o uguale a 0. Quindi il numero di soluzioni dell'equazione data è 0.

— $\diamond$ —

23. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z - w| : z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\}.$$

R. L'equazione $z^4 = 1$ individua un primo quadrato di vertici:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -i.$$

L'equazione $w^4 = -4$ individua un secondo quadrato di vertici:

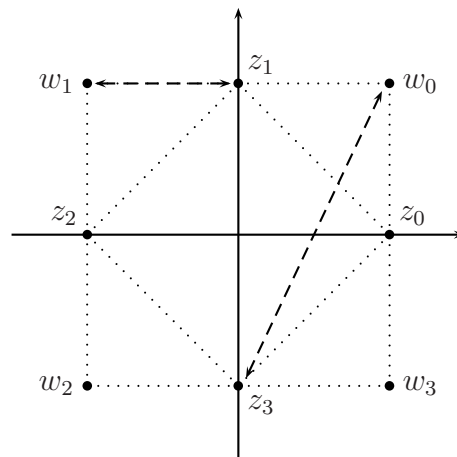
$$w_0 = 1 + i, \quad w_1 = -1 + i, \quad w_2 = -1 - i, \quad w_3 = 1 - i.$$

L'insieme dato è dunque costituito dalla misure delle distanze tra z_j e w_k con $j, k = 1, 2, 3, 4$. Dal disegno possiamo facilmente vedere che la distanza massima è ottenuta per esempio tra z_3 e w_0 :

$$\max \{|z - w| : z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\} = |z_3 - w_0| = |-i - (1 + i)| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}.$$

La distanza minima è ottenuta invece per esempio tra z_1 e w_1 :

$$\min \{|z - w| : z^4 = 1 \text{ e } w^4 = -4\} = |z_1 - w_1| = |i - (-1 + i)| = 1.$$



— $\diamond$ —**24.** Risolvere la disuguaglianza

$$\operatorname{Re}((z-1)(z-2i)) \geq \operatorname{Re}(z-1) \cdot \operatorname{Re}(z-2i).$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$\operatorname{Re}((z-1)(z-2i)) = \operatorname{Re}(z^2 - z - 2iz + 2i) = x^2 - y^2 - x + 2y$$

e

$$\operatorname{Re}(z-1) \cdot \operatorname{Re}(z-2i) = (x-1) \cdot x = x^2 - x.$$

Quindi la disuguaglianza iniziale è equivalente a

$$x^2 - y^2 - x + 2y \geq x^2 - x$$

ossia

$$-y^2 + 2y = y(2-y) \geq 0$$

e dunque $y \in [0, 2]$ e x può assumere qualunque valore. Così l'insieme dei numeri complessi che risolve la disuguaglianza sono quelli contenuti nella striscia $\mathbb{R} \times [0, 2]$.— $\diamond$ —**25.** Risolvere la disuguaglianza

$$|z-2i|^2 - 8 > |z|^2 - |z+2i|^2$$

R. Poniamo $z = x + iy$ e svolgiamo i calcoli

$$|z-2i|^2 - 8 = |x + i(y-2)|^2 - 8 = x^2 + (y-2)^2 - 8 = x^2 + y^2 - 4y - 4$$

e

$$|z|^2 - |z+2i|^2 = |x + iy|^2 - |x + i(y+2)|^2 = x^2 + y^2 - x^2 - (y+2)^2 = -4y - 4$$

Quindi la disuguaglianza iniziale diventa

$$x^2 + y^2 - 4y - 4 > -4y - 4$$

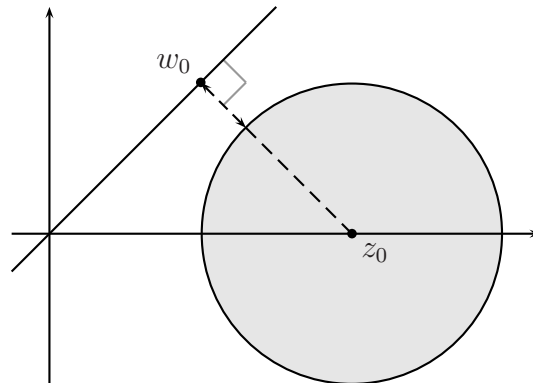
ossia $x^2 + y^2 > 0$ e dunque l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.— $\diamond$ —**26.** Determinare l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\{|z-w| : |z-2| \leq 1 \text{ e } \operatorname{Re}(w-i\bar{w}) = 0\}.$$

R. La disequazione $|z-2| \leq 1$ individua il cerchio di centro 2 e raggio 1. Posto $w = x + iy$, abbiamo che

$$\operatorname{Re}(w-i\bar{w}) = \operatorname{Re}((x+iy) - i(x-iy)) = x - y = 0$$

e quindi l'equazione $\operatorname{Re}(w-i\bar{w}) = 0$ rappresenta la retta $y = x$.



L'insieme dato è così costituito dalla misure delle distanze tra i punti del cerchio e della retta. Quindi la distanza minima è ottenuta togliendo il raggio della circonferenza alla distanza tra il punto $w_0 = 1 + i$ sulla retta e il centro $z_0 = 2$:

$$\min \{|z - w| : |z - 2| \leq 1 \text{ e } \operatorname{Re}(w - i\bar{w}) = 0\} = \sqrt{2} - 1.$$

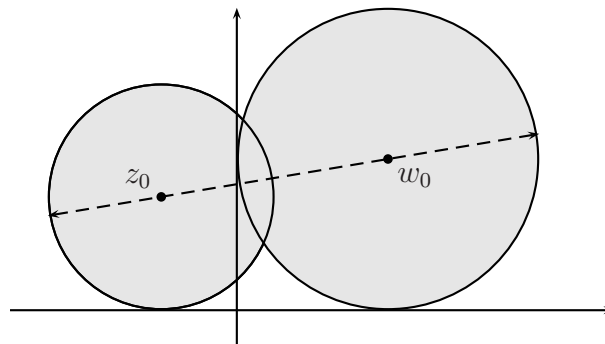
L'estremo superiore delle distanze è invece $+\infty$ perché la retta non è limitata.

— $\diamond$ —

27. Determinare il massimo e il minimo dell'insieme

$$\{|z - w| : |z + 2 - 3i| \leq 3 \text{ e } |w - 4 - 4i| \leq 4\}.$$

R. Le disequazioni $|z + 2 - 3i| \leq 3$ e $|w - 4 - 4i| \leq 4$ individuano rispettivamente il cerchio di centro $z_0 = -2 + 3i$ e raggio 3 e il cerchio di centro $w_0 = 4 + 4i$ e raggio 4.



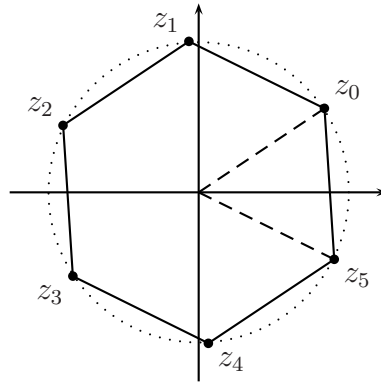
Dato che la distanza tra i centri $|z_0 - w_0| = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{37}$ è minore della somma dei raggi $3 + 4 = 7$, i due cerchi si intersecano e il minimo richiesto è 0 mentre il massimo è uguale a $\sqrt{37} + 7$ ossia alla distanza dei centri più la somma dei due raggi.

— $\diamond$ —

28. Calcolare il perimetro del poligono di vertici

$$\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1/(3-2i)^6\}.$$

R. I vertici sono le radici seste del numero $1/(3-2i)^6$ e quindi individuano un esagono regolare centrato nell'origine.



Per calcolare il perimetro di questo esagono è necessario sapere solo il raggio r della circonferenza circoscritta ovvero il modulo delle radici:

$$r = (|1/(3-2i)^6|)^{1/6} = (1/|3-2i|^6)^{1/6} = 1/|3-2i| = 1/\sqrt{3^2 + (-2)^2} = 1/\sqrt{13}.$$

Quindi sapendo che il lato dell'esagono è uguale al raggio r , il perimetro è $6r = 6/\sqrt{13}$.

— $\diamond$ —

29. Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha che

$$|\operatorname{Re}((z+1)(z-3))| \geq |z+1||z-3|.$$

R. Intanto vediamo quando vale la disuguaglianza $|\operatorname{Re}(w)| \geq |w|$. Posto $w = x + iy$ si ha che

$$|\operatorname{Re}(w)| = |x| \geq |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

equivale a

$$|x|^2 = x^2 = x^2 + y^2$$

ossia $y = 0$. Dunque $|\operatorname{Re}(w)| \geq |w|$ è soddisfatta se e solo se $\operatorname{Im}(w) = 0$. Quindi per concludere l'esercizio basta trovare per quali $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Im}((z+1)(z-3)) = 0.$$

Di nuovo poniamo $z = x + iy$ così

$$\operatorname{Im}((z+1)(z-3)) = \operatorname{Im}(((x+1)+iy)((x-3)+iy)) = y(x+1) + y(x-3) = 2y(x-1) = 0.$$

Quindi la disuguaglianza vale per tutti i punti sulle rette $y = 0$ e $x = 1$.



30. Rappresentare nel piano complesso $\mathbb{C}$ l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : (1+i)z = \sqrt{2}|z| \right\}$$

R. Poniamo $z = x + iy$, così l'equazione diventa

$$(1+i)z = (1+i)(x+iy) = (x-y) + i(x+y) = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Separando la parte reale e immaginaria otteniamo le due equazioni

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda otteniamo che $y = -x$ e sostituendo la y nella prima si ha che

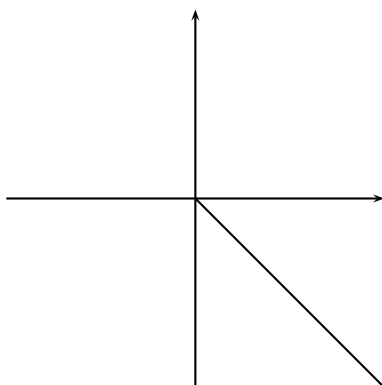
$$x + x = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (-x)^2}$$

ossia

$$x = \sqrt{x^2} = |x|$$

che è risolta per $x \geq 0$. Quindi l'insieme cercato è la semiretta

$$y = -x \quad \text{per } x \geq 0.$$



31. Quanti sono i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} z^{10} = 3 + 8i \\ z^5 = 8 - 3i \end{cases}.$$

R. L'equazione $z^{10} = 3 + 8i$ individua 10 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_1 = \sqrt[10]{|3 + 8i|} = 73^{1/20}.$$

L'equazione $z^5 = 8 - 3i$ invece individua 5 punti sulla circonferenza di raggio

$$r_2 = \sqrt[5]{|8 - 3i|} = 73^{1/10}.$$

Dato che $r_1 < r_2$ (non occorre calcolare numericamente r_1 e r_2 per stabilire questa relazione!) le due equazioni non possono avere soluzioni in comune e quindi la risposta è 0.

— $\diamond$ —

32. Determinare il numero di elementi dell'intersezione

$$\{z \in \mathbb{C} : |z|(20 - |z|) \geq 64\} \cap \{(1 + i)^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

R. La disuguaglianza $|z|(20 - |z|) \geq 64$ equivale a $|z|^2 - 20|z| + 64 \leq 0$ ossia

$$4 \leq |z| \leq 16$$

quindi il primo insieme rappresenta una corona circolare delimitata da due circonferenze centrate in 0 e di raggio rispettivamente 4 e 16.

Il secondo insieme è invece costituito dalla successione di punti data dalle potenze non negative di $(1 + i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Tali punti stanno su una spirale che si allarga girando senso antiorario. Si tratta di stabilire quanti di questi punti cadono nella corona circolare ossia per quanti n interi non negativi vale

$$4 = 2^2 \leq |(1 + i)^n| = 2^{n/2} \leq 2^4 = 16$$

che equivale a $2 \leq n/2 \leq 4$ e dunque per $n = 4, 5, 6, 7, 8$. Quindi i punti nell'intersezione sono 5.

— $\diamond$ —

33. Determinare per quali $r \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ha esattamente una soluzione

$$\begin{cases} iz = -|\bar{z}| \\ |\bar{z} + 4i| = r \end{cases}.$$

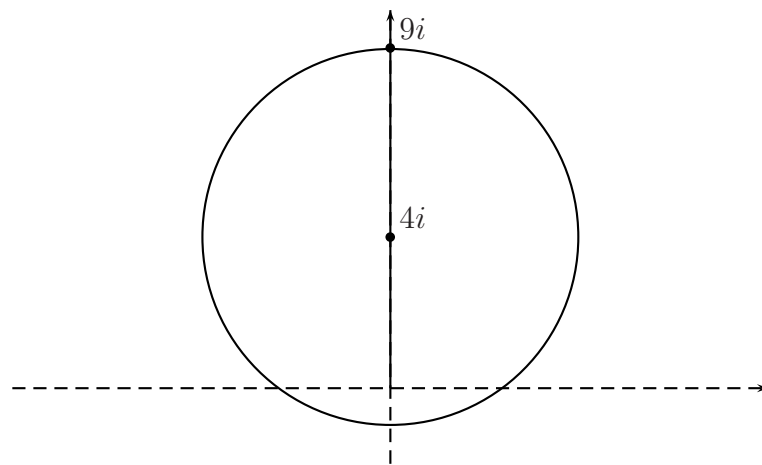
R. Intanto osserviamo che l'equazione $|\bar{z} + 4i| = |z - 4i| = r$ rappresenta una circonferenza centrata in $4i$ di raggio r (attenzione che se $r < 0$ abbiamo l'insieme vuoto).

L'equazione $iz = -|\bar{z}|$ è invece, dal punto di vista geometrico, meno riconoscibile. Ponendo $z = x + iy$ si trova che

$$iz = ix - y = -|\bar{z}| = -\sqrt{x^2 + (-y)^2} = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uguagliando le parti immaginarie si ha che $x = 0$ e quindi la parte reale diventa $-y = -\sqrt{x^2 + y^2} = -\sqrt{y^2} = -|y|$ che è risolta per qualunque $y \geq 0$. Quindi l'equazione $iz = -|\bar{z}|$ rappresenta la parte non negativa dell'asse immaginario.

Ora possiamo concludere. Se $r < 0$ il sistema non ha soluzioni. Se $r = 0$ c'è un'unica soluzione ossia il centro della circonferenza $z = 4i$. Infine se $r > 0$ avremo che la circonferenza interseca l'asse immaginario in due punti distinti: $z_1 = (4 + r)i$ e $z_2 = (4 - r)i$. Il punto z_1 sta nella parte non negativa dell'asse immaginario e dunque risolve il sistema. Il punto z_2 sta nella parte non negativa dell'asse immaginario solo se $4 - r \geq 0$ ossia se $r \leq 4$. Quindi il sistema ha una sola soluzione per $r > 4$ e per $r = 0$.



Nella figura è illustrato il caso $r = 5$ dove $z_1 = 9i$ è l'unica soluzione del sistema.