Analisi II per Ingegneria Gestionale
01–07–2015 A.A. 2014/2015, Sessione estiva, primo scritto

I punteggi sono rispettivamente 8.5, 10.5, 6.5 (esclusa la domanda 3.6*), 8.5

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione $F(x,y,z) = xz + \sin(x^2)\sin(z^2)\sin(\frac{\pi}{2}y^2)$.

1.1) Applicando il “Teorema delle funzioni implicite”, dimostrare che la relazione $F(x,y,z) = 0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x}_0 = (0,1,1)$ una funzione $x = f(y,z)$. [Quindi esiste una sfera $B_{\underline{x}_0}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (y,z)\}$ tale che $F(f(y,z),y,z) = 0$ *per ogni* $(y,z) \in B_{\underline{x}_0}(r)$. Il valore di r non è importante].

1.2) Dimostrare che $(1,1)$ è un punto critico per $f(y,z)$ e determinarne la natura.

Risposta (barrare): massimo, minimo sella

Soluzione. $F_x = z + 2x\cos z^2 \sin z^2 \sin\frac{\pi}{2}y^2|_{(0,1,1)} = 1$ per cui tutte le condizioni del teorema delle funzioni implicite sono verificate. Nell'intorno del punto abbiamo $x = f(y,z)$ che soddisfa $F(f(y,z),y,z) \equiv 0$ in una opportuna sfera intorno al punto $(y,z) = (1,1)$.

$$f_z|_{(1,1)} = -\frac{F_z(f(y,z),y,z)}{F_x(f(y,z),y,z)}\Big|_{(1,1)} = \frac{x + 2z\cos z^2 \sin x^2 \sin^2\frac{\pi}{2}y^2}{1}|_{(0,1,1)} = 0$$

$$f_y|_{(1,1)} = -\frac{F_y(f(y,z),y,z)}{F_x(f(y,z),y,z)}\Big|_{(1,1)} = \frac{\pi y\cos\frac{\pi}{2}y^2 \sin x^2 \sin z^2}{1}|_{(0,1,1)} = 0$$

per cui $(1,1)$ è un punto critico della funzione $x = f(y,z)$. Ci serve la matrice hessiana.

$$f_{yy} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_y(f(y,z),y,z)}{F_x} + \frac{F_y\frac{\partial}{\partial y}F_x(f(y,z),y,z)}{(F_x)^2}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_y(f(y,z),y,z)}{F_x} = \frac{F_{yy}(f(y,z),y,z) + F_{yx}(f(y,z),y,z)f_y}{F_x}$$

e poi bisogna calcolare tutto in $(y,z) = (1,1)$

$$F_{yy}(f(y,z),y,z)\Big|_{(1,1)} = F_{yy}(x,y,z)\Big|_{(0,1,1)} = \pi\sin x^2 \sin z^2(\cos\frac{\pi}{2}y^2 - \pi y^2\sin\frac{\pi}{2}y^2)\Big|_{(0,1,1)} = 0$$

e siccome $f_y(1,1) = 0$ otteniamo $\dfrac{\frac{\partial}{\partial y}F_y(f(y,z),y,z)}{F_x} = 0$. Inoltre

$$\frac{F_y\frac{\partial}{\partial y}F_x(f(y,z),y,z)}{(F_x)^2}\Big|_{(1,1)} = 0$$

essendo $F_y(0,1,1) = 0$. La conclusione è che $f_{yy}(1,1) = 0$.

$$f_{zz} = -\frac{\frac{\partial}{\partial z}F_z(f(y,z),y,z)}{F_x} + \frac{F_z\frac{\partial}{\partial z}F_x(f(y,z),y,z)}{(F_x)^2}$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}F_z(f(y,z),y,z) = F_{zz}(f(y,z),y,z) + F_{xz}(f(y,z),y,z)f_z\right)\Big|_{(1,1)} = 0$$

da cui $f_{zz}(1,1) = 0$.

$$f_{yz} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_z(f(x,y),y,z)}{F_x} + \frac{F_z\frac{\partial}{\partial y}F_x(f(x,y),y,z)}{(F_x)^2}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_z(f(x,y),y,z)}{F_x} = \frac{F_{yz}(f(x,y),y,z) + F_{yx}(f(x,y),y,z)f_y}{F_x}$$

ed ogni elemento del numeratore è nullo una volta calcolato in $(1,1)$.

La matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per cui non ci dice nulla.

Non essendo contemplata tale possibilità fra le soluzioni elencate, ho aumentato del 50% il voto assegnato a tale esercizio.

2) Sia data la funzione $f(x,y) = y^2$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x,y)$ con (x,y) soggette alla condizione $x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$

Risposta sintetica: I punti di massimo hanno coordinate:

I punti di minimo hanno coordinate:

I punti di sella hanno coordinate:

La funzione di Lagrange è $f(x,y,\lambda) = y^2 - \lambda(x^4 + yx^2 - y^2 + 243)$.

$$f_x = -\lambda 2x(2x^2 + y) = 0, \quad f_y = 2y - \lambda(x^2 - 2y) = 0, \quad f_\lambda = x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$$

Dalla prima prendiamo $\lambda = 0$ che dalla seconda ci dà $y = 0$ e nella terza $x^4 + 243 = 0$ chiaramente impossibile.

Dalla prima prendiamo $x = 0$ che nella terza dà $y = \pm 9\sqrt{3}$ e nella prima $\lambda = -1$.

Dalla prima abbiamo $y = -2x^2$ e dalla terza abbiamo $5x^4 = 243$ ossia $x = \pm\frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}$ e quindi $y = -2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}$. Dalla seconda si ha $\lambda = \frac{2y}{x^2 - 2y} = -\frac{4}{5}$. Ora la tangenzialità al vincolo.

$$(4x^3 + 2xy, x^2 - 2y) \cdot (a,b) = 0$$

Con $(0, \pm 9\sqrt{3}) \doteq (0, \pm y_0)$ abbiamo $(0, \mp y_0) \cdot (a,b) = 0$ da cui $b = 0$.

Con $(\pm\frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}, -2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}})$ abbiamo $(0, \sqrt{5} \cdot 3^{5/2}) \cdot (a,b) = 0$ ossia $b = 0$.

Matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Si vede immediatamente che $(a,0)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a^2 A$ per cui nei primi due punti ottengo $2y_0 a^2$ e quindi col segno più ho un minimo e col segno meno un massimo.

Nei due secondi punti critici ho invece $32 \cdot \dfrac{3^{5/2}}{5\sqrt{5}} a^2$ ed ho due minimi.

3) Sia data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k+1}}{k!} x^k$.[Può essere utile la formula di Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1))$]

3.1) Si trovi quel valore di a per cui se $x \in (-a, a)$ la serie converge e diverge se $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ **R.:** $a = 1/e$. Criterio del rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \to e$$

3.2) Si dica se converge per $x = -a$ e per $x = a$. **R.:** No. Se $x = \pm 1/e$ ho

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k+1}}{k! e^k} \qquad \text{oppure} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k^{k+1}}{k! e^k}$$

In ambedue i casi

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \frac{1}{e} > 1$$

e quindi $|a_{k+1}| > |a_k|$. Ne segue che $|a_k| > |a_1|$ e quindi non tende a zero.

3.3) Si dica se converge uniformemente in $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \subset (-a, a)$ **R.:** Ovviamente si. Sta sul libro.

3.4) Si dica se converge uniformemente in $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{10} [-a + \frac{a}{n}, a - \frac{a}{n}] \subset (-a, a)$ **R.:** Ovviamente si.

Basta osservare che all'aumentare di n l'intervallo diventa più grande e contiene il precedente per cui l'unione di cui sopra è $[-9a/10, 9a/10] \subset (-a, a)$ e qundi si ha convergenza uniforme. Ricordo che il Teorema 2 pag.16 stabilisce la *convergenza totale* in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-a, a)$. Oppure si può vedere la Proposizione a pag.70 (lezione del 18/12/2014) del file *Materiale non presente* ... allegato al corso.

3.5) Si dica se converge uniformemente in $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [-a + \frac{a}{n}, 0] \subset (-a, a)$ **R.:** No.

Risposta Chiaramente $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [-a + \frac{a}{n}, 0] = (-a, 0]$. Sappiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k+1}}{k!} e^{-k}$ non converge e la che riscriviamo come $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k a^k = +\infty$. Se fosse uniformemente convergente in $(-a, 0]$ allora $\displaystyle\sup_{x \in (-a, 0]} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Siccome pensiamo sia non uniformemente convergente e volendo usare Cauchy, deve accadere

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, n\ \exists\, p, q > n \colon \ \sup_{x \in (-a, 0]} \left|\sum_{k=p}^{q} a_k x^k\right| \geq \varepsilon$$

Sappiamo che $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} a_k e^{-k} = 1$ per cui definitivamente $(1 - \varepsilon) e^k < \dfrac{k^{k+1}}{k!} < (1 + \varepsilon) e^k$. Sia $q - p = 2N$ un numero pari. Scriviamo allora

$$\sup_{x \in (-a, 0]} \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \geq (1 - \varepsilon) \sup_{x \in (-a, 0]} \sum_{\substack{k=p \\ k \text{ pari}}}^{q} (ex)^k - (1 + \varepsilon) \sup_{x \in (-a, 0]} \sum_{\substack{k=p \\ k \text{ dispari}}}^{q} (ex)^k$$

Supponiamo che i k pari siano uno in più dei dispari (gli interi fra p e q sono $q-p+1$ che è dispari). Abbiamo

$$
\begin{aligned}
&(1-\varepsilon) \sup_{x\in(-a,0]} \sum_{\substack{k=p\\ k \text{ pari}}}^{q} (ex)^k - (1+\varepsilon) \sup_{x\in(-a,0]} \sum_{\substack{k=p\\ k \text{ dispari}}}^{q} (ex)^k = \\
&= 1-2\varepsilon \sup_{x\in(-a,0]} \sum_{k=p}^{q} (ex)^k = 1-2\varepsilon \sup_{x\in(-a,0]} (ex)^p \frac{1-(xe)^{q-p+1}}{1-xe} \geq \\
&\geq 1-2\varepsilon \sup_{x\in(-a,0]} |(ex)^p| \frac{|1-(xe)^{q-p+1}|}{|1-xe|} \geq 1-2\varepsilon \sup_{x\in(-a,0]} |(ex)^p| \frac{1-(xe)^{q-p+1}}{1-xe} \\
&\geq 1-2\varepsilon \sup_{x\in(-a,0]} 1\cdot \frac{1+1}{1-0} = 1-2\varepsilon
\end{aligned}
$$

e non è piccola. Se i k dispari fossero stati uno in più dei pari, avremmo avuto la stessa conclusione.

3.6)* Si dica se converge uniformemente in $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, a-\frac{a}{n}] \subset (-a,a)$ **R.:** No. [domanda per chi vuole "fare impressione"]

Risposta Chiaramente $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, a-\frac{a}{n}] = [0,a)$. Sappiamo che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{k+1}}{k!} e^{-k} = +\infty$ che riscriviamo come $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k a^k = +\infty$. Se fosse uniformemente convergente in $[0,a)$ allora $\displaystyle\sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$.

Sappiamo che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k e^{-k} = 1$ per cui definitivamente $\displaystyle\frac{k^{k+1}}{k!} > e^k/2$. Scriviamo allora

$$
\sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k \geq \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} (ex)^k = \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \frac{(ex)^n}{1-xe} = +\infty \ \forall\ n
$$

4) Motivando si dica se converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D \frac{dx\,dy}{(\sqrt{3}x-y)^{2/3}(1+x^2+y^2)^4}$ dove D è l'insieme di definizione della funzione integranda.

Si veda il compito del 2/2/2015 e si operino le opportune modifiche.

