Analisi II per Ingegneria Gestionale
02–02–2015 A.A. 2014/2015, Sessione invernale, primo scritto, compito A

I punteggi sono rispettivamente 5.5, 5, 5, 5.5, 6.5, 6.5

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} & x > 0 \\ y & x \le 0 \end{cases}$$

Si trovino i punti in cui è : i) continua, discontinua ii) derivabile, non derivabile. Ladddove è derivabile si calcolino le derivare parziali, iii) Si trovino i punti in cui la funzione è differenziabile. Si svolgano tutti i calcoli necessari che vanno allegati al compito. **Sbagliare una delle derivate richieste al punto** ii)**, comporta l'annullamento del compito. Le derivate, qualora esistano, vanno calcolate anche sugli assi cartesiani**

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 - \frac{4}{3}xy$ Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

3) Sia S quella porzione di superficie giacente sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e che soddisfa la relazione $x^2 + y^2 - 4 \le 0$. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = zx\underline{i} - zy\underline{j} + (x^2 + y^2 - x - z^2)\underline{k}$ attraverso S.

4) Si calcoli il volume, detto V, dello spazio finito racchiuso dal cilindro di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e dal paraboloide $x^2 + 2y^2 = z$ e dal piano $z = 0$.

4.1) Sia γ la curva di intersezione fra il cilindro ed il paraboloide del punto 4). Si calcoli $\oint_\gamma \omega$ dove $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{x}{4x^2+9y^2}dz$

5) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = nx(x-1)e^{-n|x-1|}$. i) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale in $(-\infty, +\infty)$, ii) Si dica se la convergenza è uniforme in $[1,2]$ iii) si dica se la convergenza è uniforme in $(1,2]$, iv) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1,0]$, v) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1/2, 1/2]$, vi) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)dx$, vii) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^0 f_n(x)dx$,

6) Motivando si dica se converge l'integrale $\int\int_D \frac{dx\,dy}{(x-y)^{1/3}(1+x^2+y^2)^2}$ dove D è l'insieme di definizione della funzione integranda. [Può essere utile sapere che $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t) = \sin(t - \pi/4)$]

Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Gestionale
02–02–2015 A.A. 2011/2012, Sessione invernale, primo scritto, compito B

I punteggi sono rispettivamente 5.5, 5, 5, 5.5, 6.5, 6.5

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo (vedi dietro)

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{y} & y > 0 \\ x & y \leq 0 \end{cases}$$

Si trovino i punti in cui è : i) continua, discontinua ii) derivabile, non derivabile. Ladddove è derivabile si calcolino le derivare parziali, iii) Si trovino i punti in cui la funzione è differenziabile. Si svolgano tutti i calcoli necessari che vanno allegati al compito. **Sbagliare una delle derivate richieste al punto** ii)**, comporta l'annullamento del compito. Le derivate, qualora esistano, vanno calcolate anche sugli assi cartesiani**

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + \dfrac{4}{3}xy$ Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

3) Sia S quella porzione di superficie giacente sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e che soddisfa la relazione $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = -zy\underline{i} + zx\underline{j} + (x^2 + y^2 - x - z^2)\underline{k}$ attraverso S.

4) Si calcoli il volume, detto V, dello spazio finito racchiuso dal cilindro di equazione $\dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$, dal paraboloide $\dfrac{x^2}{2} + 2y^2 = z$ e dal piano $z = 0$.

4.1) Sia γ la curva di intersezione fra il cilindro ed il paraboloide del punto 4). Si calcoli $\displaystyle\oint_\gamma \omega$ dove $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy + \dfrac{x}{x^2+16y^2}dz$

5) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = nx(x-2)e^{-n|x-2|}$. 1) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale in $(-\infty, +\infty)$, ii) Si dica se la convergenza è uniforme in $[2,3]$ iii) si dica se la convergenza è uniforme in $(2,3]$, iv) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1,0]$, v) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1/2, 1/2]$, vi) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_2^{+\infty} f_n(x)dx$, vii) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^0 f_n(x)dx$,

6) Motivando si dica se converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^{1/3}(1+x^2+y^2)^2}$ dove D è l'insieme di definizione della funzione integranda. [Può essere utile sapere che $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t) = \sin(t + \pi/4)$]

Soluzioni

Problema 1

Compito A. Il dominio della funzione è $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x \le 0 \ \vee (x > 0 \ \wedge \ y > -1/x)\}$ che si può scrivere pure come $D = D_1 \cup D_2$ con $D_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x \le 0\}$ e $D_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x > 0 \ \wedge \ y > -1/x)\}$. *D'ora in poi ci posizioniamo in D.*

Continuità .

$x_0 \neq 0$. Se $x_0 > 0$ si ha il rapporto di due funzioni differenziabili in cui il denominatore non si annulla. Da ciò segue la differenziabilità e quindi la continuità insieme con la derivabilità .

Se $x_0 < 0$ la funzione è parimenti differenziabile.

$x_0 = 0$. Sia $\underline{x}_0 = (0, y_0)$. Taylor all'ordine 1 centrato in $t = 0$ per la funzione $\ln(1+t)$ ci dà $f(x,y) = \dfrac{xy + o(x)}{x} = y + o(1)$ da cui il limite $(x,y) \to (0, y_0)$ con $x > 0$, che vale y_0. "Da sinistra" ossia $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(x,y)$ con $x \le 0$, si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} y = y$

Derivabilità .

Se $x_0 \neq 0$ la funzione è chiaramente derivabile. Se $x > 0$ le derivate sono

$$\partial_y f = \frac{1}{(1+xy)} \qquad \partial_x f = \frac{y}{(1+xy)x} - \frac{\ln(1+xy)}{x^2}$$

Se $x < 0$ $\partial_x f = 0$, $\partial_y f = 1$.

Sia $x = 0$.

$$\partial_x^+ f(0, y_0) \doteq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(t, y_0) - f(0, y_0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\frac{\ln(1+ty_0)}{t} - y_0) =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\frac{ty_0 - \frac{1}{2}t^2y_0^2 + o(t^3)}{t} - y_0) = -\frac{1}{2}y_0^2$$

$\partial_x^- f(0, y_0) \doteq \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(t, y_0) - f(0, y_0)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(y_0 - y_0) = 0$ da cui la derivabilità solo se $y_0 = 0$.

In definitiva

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y}{(1+xy)x} - \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2} & x > 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \ \vee \ x < 0 \\ \nexists & x = 0 \ \wedge \ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xy} & x > 0 \\ 1 & x \le 0 \end{cases}$$

Differenziabilità .

Se $x_0 \neq 0$ la funzione è chiaramente differenziabile. Se $x_0 = 0$ ma $y_0 \neq 0$ non può essere differenziabile non essendo derivabile.

Sia $\underline{x} = \underline{0}$. Deve aversi $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \dfrac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot \underline{h}) = 0$

Sia $h_1 > 0$.

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot \underline{h}) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \frac{\ln(1+h_1h_2)}{h_1} =$$
$$= \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \frac{h_1h_2 - \frac{1}{2}h_1^2h_2^2 + O(h_1^4h_2^4)}{h_1}$$

e chiaramente il limite non esiste. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Problema 1. Compito B. Il dominio della funzione è $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ y \le 0 \ \vee (x \ge 0 \ \wedge\ y > 0) \vee\ (x < 0 \ \wedge\ y < -1/x)\}$ che si può scrivere pure come $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ con $D_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ y \le 0\}$, $D_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x \ge 0 \wedge y > 0)\}$ e $D_3 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ x\ < 0 \wedge y < -1/x)\}$. *D'ora in poi ci posizioniamo in D.*

Le conclusioni sono le stesse dell'esercizio precedente ma stavolta con l'asse delle x al posto dell'asse delle y.

$$\partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1+xy)y} - \dfrac{\ln(1+xy)}{y^2} & y > 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0}\ \vee\ y < 0 \\ \nexists & y = 0\ \wedge\ x \ne 0 \end{cases}$$

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+xy} & y > 0 \\ 1 & y \le 0 \end{cases}$$

Problema 2. Compito A

È un esercizio standard. Le derivate danno

$$3x^2 - 2x - \frac{4}{3}y = 0, \quad 3y^2 - 2y - \frac{4}{3}x = 0$$

sottraendo si ha $3(x-y)(x+y) - 2(x-y) + \frac{4}{3}(x-y) = 0$ ossia $(x-y)(3(x+y) - 2 + \frac{4}{3}) = 0$. $x = y$. Si ha $3x^2 - 2x - \frac{4}{3}x = 0$ da cui $x = 0$ e $x = \frac{10}{9}$ e quindi $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{10}{9}, \frac{10}{9})$

La matrice hessiana è $H \doteq \begin{pmatrix} 6x-2 & -4/3 \\ -4/3 & 6y-2 \end{pmatrix}$ $H(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & -4/3 \\ -4/3 & -2 \end{pmatrix}$ (massimo). $H(P_2) = \begin{pmatrix} 14/3 & -4/3 \\ -4/3 & 14/3 \end{pmatrix}$ e quindi è un minimo.

$3(x+y) - 2 + \dfrac{4}{3} = 0$. Abbiamo $y = \frac{2}{9} - x$ e sostituendo nella prima derivata di ha $3x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{27} = 0$ e quindi $x = -\frac{2}{9}$ $x = \frac{4}{9}$. Abbiamo i punti $P_3 = (-\dfrac{2}{9}, \dfrac{4}{9})$ e $P_4 = (\dfrac{4}{9}, -\dfrac{2}{9})$.

$H(P_3) = \begin{pmatrix} -10/3 & -4/3 \\ -4/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ (sella) e $H(P_4) = \begin{pmatrix} 2/3 & -4/3 \\ -4/3 & -10/3 \end{pmatrix}$ (sella)

Problema 2. Compito B

È un esercizio standard. Le derivate danno

$$3x^2 + 2x + \frac{4}{3}y = 0, \quad 3y^2 + 2y + \frac{4}{3}x = 0$$

sottraendo si ha $3(x-y)(x+y) + 2(x-y) - \frac{4}{3}(x-y) = 0$ ossia $(x-y)(3(x+y) + 2 - \frac{4}{3} = 0$. $x = y$. Si ha $3x^2 + 2x + \frac{4}{3}x = 0$ da cui $x = 0$ e $x = \frac{-10}{9}$ e quindi $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{-10}{9}, \frac{-10}{9})$

La matrice hessiana è $H \doteq \begin{pmatrix} 6x+2 & 4/3 \\ 4/3 & 6y+2 \end{pmatrix}$ $H(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4/3 \\ 4/3 & 2 \end{pmatrix}$ (minimo). $H(P_2) = \begin{pmatrix} -14/3 & -4/3 \\ -4/3 & -14/3 \end{pmatrix}$ e quindi è un massimo.

$3(x+y)+2-\dfrac{4}{3}=0$. Abbiamo $y=\frac{-2}{9}-x$ e sostituendo nella prima derivata di ha $3x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{27}=0$ e quindi $x=\frac{2}{9}$ $x=\frac{-4}{9}$. Abbiamo i punti $P_3=(\dfrac{2}{9},\dfrac{-4}{9})$ e $P_4=(\dfrac{-4}{9},\dfrac{2}{9})$.

$H(P_3)=\begin{pmatrix} 10/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ (sella) e $H(P_4)=\begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$ (sella)

Problema 3 - Compito A

Si possono adottare due strade. La prima.

$div\underline{F}(\underline{x})=-2z$. La superficie S è composta dall'unione delle due calotte, S_1 e S_2 che sormontano il cilindro $x^2+y^2\leq 4$. Detto V il volume cilindrico chiuso dalle due calotte, sia S' la superficie laterale che contorna V. Si ha

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S'}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int\int\int_V div\underline{F}(\underline{x})dx\,dy\,dz$$

$$\int\int\int_V -2zdx\,dy\,dz=\int\int_{x^2+y^2\leq 4}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}-2zdz=0$$

Per calcolare il terzo integrale parametrizziamo S' come $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=u$, $-\sqrt{9-x^2-y^2}=-\sqrt{5}\leq u\leq\sqrt{5}=\sqrt{9-x^2-y^2}$. Il vettore ortogonale al cilindro ma non normalizzato a 1 è $\underline{v}=2\cos t\underline{i}+2\sin t\underline{j}$ e quindi $(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n})=4u\cos^2 t-4u\sin^2 t$ e quindi

$$\int\int_{S'}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int_0^{2\pi}dt\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}du(4u\cos^2 t-4u\sin^2 t)=0$$

Seconda strada. Calcoliamo direttamente

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma$$

Parametrizziamo le calotte sferiche sempre con coordinate cilindriche e per quanto riguarda S_1 abbiamo

$$x=\sqrt{9-u^2}\cos t,\ y=\sqrt{9-u^2}\sin t,\ z=u,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\qquad \sqrt{5}\leq u\leq 3,\qquad (\underline{x}=\underline{\varphi}(u,t))$$

$\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_t=-\underline{i}\sqrt{9-u^2}\cos t-\underline{i}\sqrt{9-u^2}-\underline{k}u$. Il vettore ortogonale a S_1 ma non normalizzato a 1 e che punta verso l'alto è $\underline{v}=\sqrt{9-u^2}\cos t\underline{i}+\sqrt{9-u^2}\sin t\underline{j}+u\underline{k}$ e quindi
$(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v})=\sqrt{9-u^2}\cos t\cdot u\sqrt{9-u^2}\cos t-\sqrt{9-u^2}\sin t\cdot u\sqrt{9-u^2}\sin t+(9-u^2+\sqrt{9-u^2}\cos t-u^2)u$ e quindi

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int_0^{2\pi}dt\int_{\sqrt{5}}^{3}du(9u-2u^3)\neq 0$$

La parametrizzazione di S_2 è

$$x=\sqrt{9-u^2}\cos t,\ y=\sqrt{9-u^2}\sin t,\ z=u,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\qquad -3\leq u\leq -\sqrt{5}$$

Il vettore ortogonale a S_2 ma non normalizzato a 1 e che punta verso il basso è
$\underline{v}=\sqrt{9-u^2}\cos t\underline{i}+\sqrt{9-u^2}\sin t\underline{j}+u\underline{k}$ e quindi $(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v})=\sqrt{9-u^2}\cos t\cdot u\sqrt{9-u^2}\cos t-\sqrt{9-u^2}\sin t\cdot u\sqrt{9-u^2}\sin t+(9-u^2-\sqrt{9-u^2}\cos t-u^2)u$

$$\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int_0^{2\pi}dt\int_{-3}^{-\sqrt{5}}du(9u-2u^3)$$

La somma è chiaramente zero.

Sempre usando coordinate cilindriche, la parametrizzazione della calotta superiore può anche darsi come

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = \sqrt{9-r^2}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2$$

e conseguentemente la calotta inferiore

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = \sqrt{9-r^2}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,\ -2 \le r \le 0$$

Problema 3 - Compito B

Stessa procedura di prima e stessi calcoli con variazioni insignificanti.

La prima.

$div\underline{F}(\underline{x}) = -2z$. Detto V il volume racchiuso da S, sia S' la superficie laterale che contorna V e sia $S = S_1 \cup S_2$ dove S_1 è la calotta superiore e S_2 quella inferiore. Si ha

$$\int\int_{S_1} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma + \int\int_{S_2} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma + \int\int_{S'} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int\int\int_V div\underline{F}(\underline{x})dx\,dy\,dz$$

$$\int\int\int_V -2zdx\,dy\,dz = \int\int_{x^2+y^2\le 4} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} -2zdz = 0$$

Per calcolare il terzo integrale parametrizziamo S' come $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = u$, $-\sqrt{16-x^2-y^2} = -2\sqrt{3} \le u \le 2\sqrt{3} = \sqrt{16-x^2-y^2}$. Il vettore ortogonale al cilindro ma non normalizzato a 1 è $\underline{v} = 2\cos t\underline{i} + 2\sin t\underline{j}$ e quindi $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}) = 4u\cos^2 t - 4u\sin^2 t$ e quindi

$$\int\int_{S'} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int_0^{2\pi} dt \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} du(4u\cos^2 t - 4u\sin^2 t) = 0$$

Seconda strada. Calcoliamo direttamente

$$\int\int_{S_1} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma + \int\int_{S_2} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma$$

Parametrizziamo le calotte sferiche sempre con coordinate cilindriche e per quanto riguarda S_1 abbiamo

$$x = \sqrt{16-u^2}\cos t,\ y = \sqrt{16-u^2}\sin t,\ z = u, \qquad 0 \le t \le 2\pi, \qquad 2\sqrt{3} \le u \le 4$$

Il vettore ortogonale a S_1 ma non normalizzato a 1 e che punta verso l'alto è $\underline{v} = \sqrt{16-u^2}\cos t\underline{i} + \sqrt{16-u^2}\sin t\underline{j} + u\underline{k}$ e quindi
$(\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}) = \sqrt{16-u^2}\cos t\cdot u\sqrt{16-u^2}\cos t - \sqrt{16-u^2}\sin t\cdot u\sqrt{16-u^2}\sin t + (16-u^2+\sqrt{16-u^2}\cos t - u^2)u$ e qundi

$$\int\int_{S_1} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int_0^{2\pi} dt \int_{2\sqrt{3}}^{4} du(16u - 2u^3)$$

La parametrizzazione di S_2 è

$$x = \sqrt{16-u^2}\cos t,\ y = \sqrt{16-u^2}\sin t,\ z = u, \qquad 0 \le t \le 2\pi, \qquad -4 \le u \le -2\sqrt{3}$$

Il vettore ortogonale a S_2 ma non normalizzato a 1 e che punta verso il basso è

$\underline{v} = \sqrt{16-u^2}\cos t\underline{i} + \sqrt{16-u^2}\sin t\underline{j} + u\underline{k}$ e quindi $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{v}) = \sqrt{16-u^2}\cos t \cdot u\sqrt{16-u^2}\cos t - \sqrt{16-u^2}\sin t \cdot u\sqrt{16-u^2}\sin t + (16-u^2-\sqrt{16-u^2}\cos t - u^2)u$

$$\int\int_{S_2} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int_0^{2\pi} dt \int_{-4}^{-2\sqrt{3}} du(16u - 2u^3)$$

La somma è chiaramente zero.

Problema 4 - Compito A

È il più classico fra il calcolo dei volumi che non sia il volume del quadrato.

$$\int\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} (x^2+2y^2)dx\,dy$$

Passando a coordinate polari nel piano $x = 3r\cos t$, $y = 2r\sin t$, $0 \leq r \leq 1$

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 6r(9r^2\cos^2 t + 8r^2\sin^2 t)dt = \pi(\frac{27}{2} + 12)$$

Problema 4.1 - Compito A

La curva su cui integrare, detta γ, che tanta pena ha generato in alcuni studenti è ....

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \qquad z = x^2 + 2y^2$$

e come si vede, la sua proiezione sul piano (x, y), detta σ, ossia la curva $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$ contiene l'origine al suo interno. La forma differenziale ω è la somma della forma $\omega_1 = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ e della forma $\omega_2 = \dfrac{x}{4x^2+9y^2}dz$. La prima è chiusa e quindi per il lemma di Gauss–Green

$$\oint_\gamma \omega_1 = \oint_\sigma \omega_1 = \oint_{x^2+y^2=1} \omega_1 = 2\pi$$

come è facile calcolare. Inoltre $\displaystyle\oint_\gamma \omega_2 = \oint_\gamma \frac{x}{36}dz$. Parametrizziamo la curva $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 9\cos^2 t + 8\sin^2 t$ da cui $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{3}{36}\cos t(-18\cos t\sin t + 16\sin t\cos t)dt = 0$

Problema 4 - Compito B

$$\int\int_{\frac{x^2}{4}+4y^2\leq 1} (\frac{x^2}{2} + 2y^2)dx\,dy$$

Passando a coordinate polari nel piano $x = 2r\cos t$, $y = \frac{r}{2}\sin t$, $0 \leq r \leq 1$

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r(2r^2\cos^2 t + \frac{r^2}{2}\sin^2 t)dt = \pi(\frac{1}{2} + \frac{1}{8})$$

Problema 4.1 - Compito B

La curva su cui integrare, detta γ, è

$$\frac{x^2}{4}+4y^2=1, \qquad z=\frac{x^2}{2}+2y^2$$

e come si vede, la sua proiezione sul piano (x,y), detta σ, ossia la curva $\frac{x^2}{4}+4y^2=1$, $z=0$ contiene l'origine al suo interno. La forma differenziale ω è la somma della forma $\omega_1=\dfrac{-y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ e della forma $\omega_2=\dfrac{x}{x^2+16y^2}dz$. La prima è chiusa e quindi per il lemma di Gauss–Green

$$\oint_\gamma \omega_1=\oint_\sigma \omega_1=\oint_{x^2+y^2=1}\omega_1=2\pi$$

come è facile calcolare. Inoltre $\displaystyle\oint_\gamma \omega_2=\oint_\gamma \frac{x}{4}dz$. Parametrizziamo la curva $x=2\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$, $z=2\cos^2 t+\sin^2 t$ da cui $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2}{16}\cos t(-\cos t\sin t+2\sin t\cos t)dt=0$

Problema 5 - Compito A

$f_n=nx(x-1)e^{-n|x-1|}$.

i) La convergenza puntuale avviene per ogni $x\in\mathbf{R}$ in quanto $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne^{-x|x-1|}=0$ se $x\neq 1$ e $f_n(1)=0$.

ii) La convergenza non è uniforme in $[1,2]$. Se $x=1+\frac{1}{n}\doteq x_n$ si ha $f_n(x_n)=n(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}$ che tende a 1 per $n\to+\infty$. Quindi $\displaystyle\sup_{x\in[1,2]}|f_n(x)|\not\to 0$ per $n\to\infty$. Chi avesse fatto le derivate, avrebbe trovato che una delle soluzione sarebbe stata $x_n=1+\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ ottenenendo lo stesso risultato

iii) Stessa cosa in quanto $x_n>1$.

iv) Basta osservare che

$$\sup_{x\in[-1,0]} x(x-1)e^{-n|x-1|}\le \sup_{x\in[-1,0]} x(x-1)\cdot \sup_{x\in[-1,0]} e^{-n|x-1|}=2\cdot e^{-n}$$

per concludere che la convergenza è uniforme. Con le derivate si sarebbe giunti allo stesso risultato ma con calcoli sostanzialmente inutili.

v) Basta osservare che $\displaystyle\sup_{x\in[-1/2,1/2]}|x(x-1)|=\frac{3}{4}$, e $\displaystyle\sup_{x\in[-1/2,1/2]} e^{-n|x-1|}=e^{-\frac{n}{2}}$ per concludere che la convergenza è uniforme. Con le derivate si sarebbe giunti allo stesso risultato ma con calcoli sostanzialmente inutili.

vi) Non possiamo fare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)dx=\int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx=\int_1^{+\infty}0dx=0$ in quanto la convergenza non è uniforme in $[1,+\infty)$ ed anche se lo fosse, il fatto che l'intervallo sia infinito, ci impedirebbe di passare al limite sotto il segno di integrale. Cambiamdo variabile $n(x-1)=t$ da cui

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)dx=\int_0^{+\infty} n\left(\frac{t}{n}+1\right)\frac{t}{n}e^{-t}\frac{dt}{n}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n}+1\right)te^{-t}\frac{dt}{n}\to 0$$

in quanto

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt, \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$$

convergono e poi divisi per le opportune potenze di n tendono a zero.

vii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{0} nx(x-1)e^{-n|x-1|}dx$. La convergenza è uniforme ma l'intervallo è infinito e quindi non è possibile invocare il teorema relativo. Cambiamo variabile $y=-x$ ed otteniamo $\int_0^{+\infty} ny(1+y)e^{-n(1+y)}dy = ne^{-n}\int_0^{+\infty} y(1+y)e^{-ny}dy \le ne^{-n}\int_0^{+\infty} y(1+y)e^{-y}dy$ che tende a zero in quanto l'integrale converge e $ne^{-n}\to 0$.

Problema 5 - Compito B

$f_n = nx(x-2)e^{-n|x-2|}$.

i) La convergenza puntuale avviene per ogni $x\in\mathbf{R}$ in quanto $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-x|x-2|}=0$ se $x\neq 2$ e $f_n(2)=0$.

ii) La convergenza non è uniforme in $[2,3]$. Se $x=2+\frac{1}{n}\doteq x_n$ si ha $f_n(x_n)=n(2+\frac{1}{n})\frac{-1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}$ che tende a -1 per $n\to+\infty$. Quindi $\sup\limits_{x\in[1,2]}|f_n(x)|\not\to 0$ per $n\to\infty$. Chi avesse fatto le derivate, avrebbe trovato che una delle soluzione sarebbe stata $x_n=2+\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ ottenenendo lo stesso risultato

iii) Stessa cosa in quanto $x_n>2$.

iv) Basta osservare che $\sup\limits_{x\in[-1,0]} x(x-2)=3$, e $\sup\limits_{x\in[-1,0]} e^{-n|x-2|}=e^{-2n}$ per concludere che la convergenza è uniforme. Con le derivate si sarebbe giunti allo stesso risultato ma con calcoli sostanzailmente inutili.

v) Basta osservare che $\sup\limits_{x\in[-1/2,1/2]}|x(x-1)|=\dfrac{3}{4}$, e $\sup\limits_{x\in[-1/2,1/2]} e^{-n|x-1|}=e^{-\frac{n}{2}}$ per concludere che la convergenza è uniforme. Con le derivate si darebbe giunti allo stesso risultato ma con calcoli sostanzailmente inutili.

vi) Non possiamo fare $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_2^{+\infty} f_n(x)dx=\int_2^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx=\int_2^{+\infty}0dx=0$ in quanto la convergenza non è uniforme in $[2,+\infty)$ ed anche se lo fosse, il fatto che l'intervallo sia infinito, ci impedirebbe di passare al limite sotto il segno di integrale. Cambiamdo variabile $n(x-2)=t$ da cui

$$\int_2^{+\infty} f_n(x)dx=\int_0^{+\infty} n\left(\frac{t}{n}+2\right)\frac{t}{n}e^{-t}\frac{dt}{n}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{n}+2\right)te^{-t}\frac{dt}{n}\to 0$$

in quanto

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt,\qquad \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$$

convergono e poi divisi per le opportune potenze di n tendono a zero.

vii)

$$\int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{0} nx(x-2)e^{-n(2-x)}dx$$

Cambiamo variabile $n(2-x)=t$ ed otteniamo

$$\int_{+\infty}^{0} -n\left(2-\frac{t}{n}\right)\frac{-t}{n}e^{-t}\frac{dt}{n}=-\int_0^{+\infty}\left(2-\frac{t}{n}\right)te^{-t}\frac{dt}{n}\to 0$$

e succede some sopra

Possiamo pure fare come per il compito A). Definiamo $y = -x$ ed otteniamo $\int_0^{+\infty} dyny(2+y)e^{-n(y+2)} = ne^{-2n}\int_0^{+\infty} dyy(2+y)e^{-ny} \le ne^{-2n}\int_0^{+\infty} dyy(2+y)e^{-y}$ e tende a zero per $n \to +\infty$

Problema 6 - Compito A

$D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x \neq y\}$. Se al posto di (x,y) prendiamo $(-x,-y)$ la funzione cambia segno per cui basta che studiamo il semipiano superiore.

Sia $x \le 0$, $y \ge 0$. L'integrale è improprio a causa del fatto che il denominatore si annulla ma solo per $x = y = 0$. $G_k = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon 1/k \le r \le k\}$. Nel secondo quadrante $\cos t - \sin t \le -1$ e questo lo si può vedere usando loe derivate.

Oppure facciamo $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2\sin t\cos t \ge 1$ da cui $\cos t - \sin t \le -1$ oppure $\cos t - \sin t \ge 1$ e solo la prima ci interessa. Ne segue

$$0 \ge \int\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy \ge \int_{\pi/2}^{\pi} dt \int_{1/k}^{k} r\,dr \frac{-1}{r^{1/3}(1+r^2)^2} > -\infty$$

e quindi $\lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy$ converge. L'unico integrale da controllare (doppiamente improprio) è

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} + \lim_{k\to+\infty}\int_{1}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \doteq I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \le \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}} = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1} r^{\frac{2}{3}} = \int_0^1 r^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}r^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$I_2 = \lim_{k\to+\infty}\int_{1}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \le \int_0^{+\infty}\frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{-1}{2}(1+r^2)^{-1}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Sia ora $x \ge 0$, $y \ge 0$. Se scambiamo x con y la funzione cambia segno per cui basta studiare $x > y$. Sia $G_k = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon\ 1/k \le r \le k,\ 0 \le t \le \pi/4 - 1/k\}$

$$\int\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{k}}\frac{dt}{(\cos t - \sin t)^{1/3}}\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2}$$

La parte in r è esattamente come prima. La parte in t diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{k}}\frac{dt}{(\cos t - \sin t)^{1/3}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{k}}\frac{dt}{(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-t))^{1/3}}$$

Cambio variabile $\frac{\pi}{4} - t = y$ da cui

$$\frac{1}{2^{1/6}}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(\sin y)^{1/3}} \le \tag{1}$$

Poi osserviamo che se $0 \le y \le \pi/2$ si ha $\sin y \ge (2y)/\pi$ da cui

$$0 < \frac{1}{2^{1/6}}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(\sin y)^{1/3}} \le \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}2^{1/6}}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}$$

il cui limite $k \to +\infty$ dà

$$\frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}2^{1/6}}\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}2^{1/6}}\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Si poteva anche usare $\sin y = y + o(y^2)$ da cui

$$\frac{1}{(\sin y)^{1/3}} = \frac{1}{y^{1/3}(1+o(y))^{1/3}} \le \frac{2}{y^{1/3}}$$

se y è abbastanza picolo per cui $1+o(y) \ge 1/8$. Eventualmente bisogna spezzare l'integrale (1) secondo

$$\frac{1}{2^{1/6}}\int_{\frac{1}{k}}^{y_0}\frac{dy}{(\sin y)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{1/6}}\int_{y_0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dy}{(\sin y)^{\frac{1}{3}}}$$

e y_0 è quella quantità per cui se $0 \le y \le y_0$ si ha $1+o(y) \ge 1/8$.

Problema 6 - Compito B

$D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x \ne -y\}$. Se al posto di (x,y) prendiamo $(-x,-y)$ la funzione cambia segno per cui basta che studiamo il semipiano superiore.

Sia $x \ge 0$, $y \ge 0$. L'integrale è improprio a causa del fatto che il denominatore si annulla ma solo per $x = y = 0$. $G_k = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon 1/k \le r \le k\}$. Nel primo quadrante $\cos t + \sin t \ge 1$. Ne segue

$$0 \le \int\!\!\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy \le \int_{\pi/2}^{\pi} dt \int_{1/k}^{k} r\,dr \frac{1}{r^{1/3}(1+r^2)^2} < +\infty$$

e quindi $\lim\limits_{k\to+\infty}\int\!\!\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy$ converge. L'unico integrale da controllare (doppiamente improprio) è

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} + \lim_{k\to+\infty}\int_{1}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \doteq I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \le \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1}\frac{rdr}{r^{1/3}} = \lim_{k\to+\infty}\int_{1/k}^{1} r^{\frac{2}{3}} = \int_0^1 r^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}r^{\frac{5}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$I_2 = \lim_{k\to+\infty}\int_{1}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2} \le \int_0^{+\infty}\frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{-1}{2}(1+r^2)^{-1}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Sia ora $x \le 0$, $y \ge 0$. Se scambiamo x con y la funzione cambia segno per cui basta studiare $x < -y$. Sia $G_k = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon\ 1/k \le r \le k,\ 3\pi/4 + 1/k \le t \le \pi\}$

$$\int\!\!\int_{G_k} f(x,y)dx\,dy = \int_{\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{dt}{(\cos t + \sin t)^{1/3}}\int_{\frac{1}{k}}^{k}\frac{rdr}{r^{1/3}(1+r^2)^2}$$

La parte in r è esattamente come prima. La parte in t diventa

$$\int_{\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{dt}{(\cos t + \sin t)^{1/3}} = \int_{\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{dt}{(-\sqrt{2}\sin(t-\frac{3\pi}{4}))^{1/3}}$$

Cambio variabile $t - \frac{3\pi}{4} = y$ da cui

$$-\frac{1}{2^{1/6}}\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(\sin y)^{1/3}}$$

e dimenticandoci del fattore davanti, procediamo pari pari come sopra.