Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Gestionale
07–03–2015 A.A. 2014/2015, Sessione invernale, terzo scritto

I punteggi sono rispettivamente 7, 5, 6, 5, 6, 5 (esclusa (6.4)*)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(y-x)}-1}{y-x} & y > x \\ x & y \le x \end{cases}$$

Si scriva:

1) l'insieme in cui è continua: tutto **R** che è pure l'insieme di definizione.

Chiaramente se $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \neq (x_0, x_0)$ la funzione è continua. Se $y_0 > x_0$ abbiamo il rapporto di due funzioni continue ed il denominatore è diverso da zero. Se $y_0 < x_0$ non c'è nulla da dire.

Sia ora $\underline{x} = (x_0, x_0)$. Il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$ ci dice che

$$\lim_{\underline{x}\to(x_0,x_0)} \frac{e^{x(y-x)}-1}{y-x} = x_0$$

2) l'insieme in cui f è derivabile. Certamente se $\underline{x} \neq (x_0, x_0)$ la funzione è derivabile.
Sia ora $\underline{x}_0 = (x_0, x_0)$. Calcoliamo $\partial_x f(\underline{x}_0)$ da destra ossia

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, x_0) - f(x_0, x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{x_0 + t - x_0}{t} = 1$$

Calcoliamo $\partial_x f(\underline{x}_0)$ da sinistra ossia

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t, x_0) - f(x_0, x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\left(\frac{e^{(x_0+t)(x_0-x_0-t)}-1}{-t} - x_0\right)$$

Usando "MacLaurin"

$$\frac{1}{t}\left(\frac{e^{-t(x_0+t)}-1}{-t} - x_0\right) =$$
$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1 - t(x_0+t) + \frac{1}{2}t^2(x_0+t)^2 + O(t^3(x_0+t)^3) - 1}{-t} - x_0\right) \to 1 - \frac{1}{2}x_0^2$$

che è uguale ad 1 solo se $x_0 = 0$ per cui la funzione ammette derivata parziale rispetto ad x solo nell'origine.

Calcoliamo ora $\partial_y f(x_0,x_0)$. Derivata sinistra.

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x_0,x_0+t)-f(x_0,x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{x_0-x_0}{t}=0$$

Derivata destra.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0,x_0+t)-f(x_0,x_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\frac{e^{x_0 t}-1}{t}-x_0\right)=\frac{1}{2}x_0^2$$

che vale zero solo se $x_0=0$ per cui $\partial_y f(x_0,x_0)=0$ solo se $x_0=0$.

3) le derivate f_x e f_y in tutti i punti

$$f_x(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{e^{x(y-x)}(y^2-3yx+2x^2+1)-1}{(y-x)^2} & y>x\\ 1 & y<x \ \vee\ \underline{x}=(0,0)\\ \nexists & \underline{x}=(x,x)\ \wedge\ x\neq 0\end{cases}$$

e il dominio è chiaramente $E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon y>x, y<x, (x,y)=(0,0)\}$

$$f_y(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{e^{x(y-x)}(xy-x^2-1)+1}{(y-x)^2} & y>x\\ 0 & y<x \ \vee\ \underline{x}=(0,0)\\ \nexists & \underline{x}=(x,x)\ \wedge\ x\neq 0\end{cases}$$

e il dominio è come prima $E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon y>x\ \vee\ y<x,\ \vee\ (x,y)=(0,0)\}$
4) l'insieme in cui la funzione è differenziabile. Certamente se $y>x$ e per $y<x$. Certamente no per $y=x\neq 0$. In $(0,0)$ si grazie al calcolo che segue.

Sia $v>u$. Deve essere zero il limite ($\underline{u}=(u,v)$)

$$\begin{aligned}&\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v>u}\frac{1}{\|u^2+v^2\|}\left(f(\underline{0}+\underline{u})-f(\underline{0})-\underline{\partial}f(\underline{0})\cdot\underline{u}\right)=\\ &=\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v>u}\frac{1}{\|u^2+v^2\|}\left(\frac{e^{u(v-u)}-1}{v-u}-u\right)=\\ &=\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v>u}\frac{1+u(v-u)+\frac{1}{2}u^2(v-u)^2+O(u^3(v-u)^3)-1-uv+u^2}{(v-u)\|u^2+v^2\|}=\\ &=\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v>u}\frac{\frac{1}{2}u^2(v-u)+O(u^3(v-u)^2)}{\|u^2+v^2\|}=0\end{aligned}$$

chiaramente. Infatti

$$\frac{u^2}{\|u^2+v^2\|}\leq 1,\qquad \frac{O(u^3(v-u)^2)}{\|u^2+v^2\|}=\frac{O(u^3(v-u)^2)}{u^3(v-u)^2}\frac{u^3(v-u)^2}{\|u^2+v^2\|}$$

e

$$\frac{O(u^3(v-u)^2)}{u^3(v-u)^2}\to 0,\qquad \frac{|u^3(v-u)^2|}{\|u^2+v^2\|}\leq |u|(v-u)^2\frac{u^2}{\|u^2+v^2\|}\leq |u|(v-u)^2$$

Sia $v < u$. Deve essere zero il limite ($\underline{u} = (u, v)$)

$$\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v\leq u} \frac{1}{\|u^2+v^2\|}\left(f(\underline{0}+\underline{u}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{u}\right) = \lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, v\leq u} \frac{u-0-u}{\|u^2+v^2\|} = 0$$

Si poteva usare il TEOREMA DEL DIFFERENZIALE a pag.57 del libro per studiare la differenziabilità . Fuori dall'origine c'è poco da dire nel senso che se $y > x$ oppure $y < x$. Se $\underline{x} = (x, x) \neq (0, 0)$ certamente non è differenziabile non essendo derivabile. Vediamo nell'origine; ad esempio la continuità di $\partial_x f(\underline{0})$. Dobbiamo far vedere che

$$\lim_{\underline{u}\to\underline{0},\, (u,v)\in E} \partial_x f(u, v) = \partial_x f(\underline{0}) = 1$$

Se $v < u$ non c'è nulla da dire; la derivata vale identicamente 1.

Sia $v > u$ e quindi

$$\partial_x f(\underline{u}) = \frac{(v-u)^2 - \frac{1}{2}u^2(v-u)^2 + O(u^3(v-u)^3)}{(v-u)^2} \xrightarrow[\underline{u}\to\underline{0},\, (u,v)\in E]{} 1$$

Analogamente se $v < u$ la derivata parziale $\partial_y f(\underline{x})$ è evidentemente continua in $(0, 0)$.

Sia ora $v > u$.

$$\partial_x f(\underline{u}) = \frac{u^2(v-u)^2 + \frac{1}{2}u^2(v-u)^2 + O(u^3(v-u)^3)}{(v-u)^2} \xrightarrow[\underline{u}\to\underline{0},\, (u,v)\in E]{} 0$$

5) motivando dire se esiste e quanto eventualmente vale $\lim\limits_{\|\underline{x}\|\to\infty} f(\underline{x})$

R.: Si No (barrare). Se si il valore del limite è : il limite non esiste.

Basta osservare che $f(x, x) = x$ e quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x) = +\infty$ e d'altra parte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x, x) = -\infty$.

2) Dire se esiste l'integrale improprio della precedente funzione esteso al dominio $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ y > x, \quad x \leq 0, \|\underline{x}\| \leq 1\}$ [È utile sapere che $\sin(5\pi/4-t)=(\sin t-\cos t)/\sqrt{2}$. In un opportuno sottoinsieme di D è utile passare a coordinate polari (r,t) e integrare prima per parti in r] **R.:** Si No (barrare)

Il dominio D è composto da due domini $D_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ y > x, \quad x \leq 0, y > 0, \quad \|\underline{x}\| \leq 1\}$ e $D_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ y > x, \quad x \leq 0, y \leq 0, \quad \|\underline{x}\| \leq 1\}$.

Cominciamo con l'integrale su D_1. Estendiamo fino a $y = 0$ e prendiamo come $G_k = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2\colon 1/k \leq r \leq 1,\ \pi/2 \leq t \leq \pi\}$. Abbiamo $|\sin t - \cos t|^2 = (\sin t - \cos t)^2 = 1 - 2\sin(2t) \geq 1$ e quindi

$$\int_{1/k}^{1} dr\, r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt \frac{\left|e^{r^2\cos t(\sin t - \cos t)} - 1\right|}{r|\sin t - \cos t|} \leq \int_{1/k}^{1} dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt \left|e^{r^2\cos t(\sin t-\cos t)} - 1\right|$$

e l'integrale non è improprio per cui il limite $k \to +\infty$ esiste. Dalla assoluta integrabilità della funzione segue la integrabilità .

Vediamo ora l'integrale su D_2. $G_k = \{(r, t) \in \mathbf{R}^2\colon 1/k \leq r \leq 1,\ \pi/2 \leq t \leq 5\pi/4 - 1/k\}$. Seguendo il suggerimento abbiamo

$$\int_{1/k}^{1} dr\, r \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi - \frac{1}{k}} dt \frac{\left|e^{r^2\cos t(\sin t-\cos t)} - 1\right|}{r|\sin t - \cos t|} \leq \int_{1/k}^{1} dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{k}} dt \frac{\left|e^{\sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t)} - 1\right|}{\sqrt{2}|\sin(5\pi/4-t)|}$$

La dipendenza in r non desta più problemi e quindi maggioriamo

$$\int_{1/k}^{1} dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{k}} dt \frac{\left|e^{\sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t)}-1\right|}{\sqrt{2}|\sin(5\pi/4-t)|} \leq \int_{0}^{1} dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{k}} dt \frac{\left|e^{\sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t)}-1\right|}{\sqrt{2}|\sin(5\pi/4-t)|}$$

Quando $k \to +\infty$, $5\pi/4 - t \to 0$ per cui scriviamo

$$e^{\sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t)} - 1 = 1 + \sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t) + o(\sin(5\pi/4-t)) - 1$$

e quindi

$$\frac{\left|e^{\sqrt{2}r^2\cos t\sin(5\pi/4-t)}-1\right|}{\sqrt{2}|\sin(5\pi/4-t)|} = r^2\cos t + r^2 o(1)$$

Ne segue che la funzione è limitata in (r,t) ed essendo positiva, esiste il limite $k \to +\infty$ da cui la assoluta integrabilità da cui l'integrabilità .

Il suggerimento circa l'integrazione per parti non acce così importante ancorché utilizzabile. Per questo ho deciso di aumentare del 20% il voto dato alla risoluzione dell'esercizio

3) Sia data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ soggetta alla condizione (vincolo) $xy - 4 = 0$. Trovare tutti i punti critici vincolati e stabilirne la natura. [Ce ne sono quattro]

Semplice algebra ci dà :
$P_1 : (x,y,\lambda) = (2,2,7)$, $P_2 : (x,y,\lambda) = (-2,-2,-5)$.

La tangenzialità al vincolo dà in entrambe i casi $a + b = 0$. Infatti dobbiamo trovare (a,b) tali che $(3x^2 + y, 3y^2 + x)\Big|_{(x,y)=(2,2)} \cdot (a,b) = 14(a+b) = 0$. Lo stesso accade per $(x,y) = (-2,-2)$.

La matrice hessiana calcolata in P_1 dà

$$(a,-a)\begin{pmatrix} 12 & 1-7 \\ 1-7 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = 36a^2$$

e quindi è un minimo. In P_2 si ha

$$(a,-a)\begin{pmatrix} -12 & 1+5 \\ 1+5 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = -36a^2$$

e quindi è un massimo.

Come evidente l'affermazione dei quattro punti critici è falsa (il "copia–incolla" a volte è sconveniente). Per "indennizzare" quanti avessero perso tempo a cercare gli altri due punti critici, ho deciso di aumentare del 50% il voto dato alla risoluzione dell'esercizio)

4) Calcolare il volume dello spazio che soddisfa le seguenti relazioni: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \geq 1$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 18 - x^2 - y^2$.

$$\int\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} (-2x^2 - 2y^2 + 18)dxdy - \int\int_{\frac{x^2}{4}+y^2\geq 1} (-2x^2 - 2y^2 + 18)dxdy =$$

$$= 18\underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} dxdy}_{6\pi} - 18\underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{4}+y^2\geq 1} dxdy}_{2\pi} - \underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} 2x^2dxdy}_{29\pi} + \underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{4}+y^2\geq 1} 2x^2dxdy}_{4\pi}$$

$$- \underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} 2y^2dxdy}_{12\pi} + \underbrace{\int\int_{\frac{x^2}{4}+y^2\geq 1} 2y^2dxdy}_{\pi} = 38\pi$$

ed otteniamo

5) Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k^2} \doteq f(x)$

(5.1) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale **R.:** tutto **R**. Infatti

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-x^2(k+1)^2}}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k}}{e^{-x^2k^2}} = \lim_{k\to+\infty} e^{-x^2(2k+1)} = 0$$

per ogni $x \neq 0$ e quindi la serie converge per ogni x in quanto per $x = 0$ la serie è nulla.

(5.2) Si dica se la serie converge uniformemente in $[0,1]$ **R.:** Si.

Il massimo di $\dfrac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k^2}$ si ha per $x = 1/(k\sqrt{2}) \in [0,1]$ per cui

$$\sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}k^{3/2}} < \varepsilon$$

se n è grande abbastanza in quanto la serie di $k^{-3/2}$ converge.

(5.3) Si dica se la serie converge uniformemente in $[0,+\infty)$ **R.:** Si con la stessa dimostrazione di (5.2).

(5.4) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ (nel senso di scriverne l'espressione formale tralasciando il valore)

Data l'uniforme convergenza di ha

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2\sqrt{k}} \left(1 - e^{-k^2}\right)$$

L'errore di gran lunga più frequente ed anche abbastanza penalizzante nella valutazione, è consistito nel trattare l'esercizio come se ci si trovasse di fronte ad una successione di funzioni e non una serie di funzioni.

6) Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k} \doteq f(x)$

(6.1) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale **R.:** tutto **R**. Infatti

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-x^2(k+1)}}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k}}{e^{-x^2k}} = e^{-x^2} < 1$$

per ogni $x \neq 0$ e quindi la serie converge per ogni x in quanto per $x = 0$ la serie è nulla.

(6.2) Si dica se la serie converge uniformemente in $[0,1]$ **R.:** No. Verificare che l'argomento di prima non funziona e capire perché **ma ciò non basta a dire che la serie non converge uniformemente.**

Per dimostrare la non uniforme convergenza prendiamo i valori di k tali che $x^2k \leq 1$ ossia $k \leq [1/x^2]$ e scriviamo

$$\sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2k} \geq \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=n}^{[1/x^2]} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-1} \underbrace{\geq}_{confronto\ con\ l'integrale} 2 \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{e} (\sqrt{[1/x^2]} - \sqrt{n-1})$$

Ora qualunque sia $n>1$ prendiamo $x\in[0,1]$ tale che $[1/x^2]=4n-4$ e la precedente espressione è maggiore di $\sup\limits_{x\in[0,1]}\dfrac{x}{2e}\sqrt{\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}$. Non è quindi piccola. Si prenda in fatti $x=1/N$ con N intero e si ottiene $\sup\limits_{x\in[0,1]}\dfrac{x}{2e}\sqrt{\left[\dfrac{1}{x^2}\right]}\geq\dfrac{1}{2e}$ e non è certo una quantità piccola.

(6.3) Si dica se la serie converge uniformemente in $[1,+\infty)$ **R.:** Si.

La funzione xe^{-x^2k} è decrescente in $[1,+\infty)$. Infatti il massimo di xe^{-x^2k} ha ascissa minore di uno e quindi

$$\sup_{x\in[1,+\infty)}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{k}}e^{-x^2k}\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-k}<\varepsilon$$

non appena n è grande abbastanza essendo la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}e^{-k}$ convergente.

(6.4)* Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ (nel senso di scriverne l'espressione formale tralasciando il valore)

Sebbene la serie sia uniformemente convergente in $[1,+\infty)$, non ce ne si può avvantaggiare in quanto il dominio è infinito ed infatti, se si guarda il teorema (3.12) del libro di testo, si nota che a destra c'è la presenza di $(b-a)$ che nel nostro caso varrebbe $+\infty$. Dobbiamo far vedere che

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\ :\ n>n_\varepsilon\ \Longrightarrow\ \left|\int_1^{+\infty}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_1^{+\infty}f_k(x)dx\right|<\varepsilon$$

Siccome chiaramente si ha

$$\sum_{k=1}^{n}\int_1^{+\infty}f_k(x)dx=\int_1^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)dx$$

ci basta quindi far vedere che

$$\int_1^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)dx<\varepsilon\ \forall\ n>n_\varepsilon$$

Ora è facile far vedere che $x^2e^{-x^2k}\leq\dfrac{e^{-1}}{k}$ da cui $e^{-x^2k}\leq\dfrac{1}{ekx^2}$. Ne segue che

$$\int_1^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)dx\leq\int_1^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{ek^{3/2}x^2}dx=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{ek^{3/2}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\leq\frac{2}{e}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1<\varepsilon$$

se n è grande abbastanza.

Abbiamo quindi mostrato che

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_1^{+\infty}f_k(x)dx$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^{3/2}}$$

L'errore di gran lunga più frequente ed anche abbastanza penalizzante nella valutazione, è consistito nel trattare l'esercizio come se ci si trovasse di fronte ad una successione di funzioni e non una serie di funzioni.