

Analisi II per Ingegneria Gestionale
11-07-2015 A.A. 2014/2015, Sessione estiva, secondo scritto

I punteggi sono rispettivamente: 10, 6, 8, 10

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo; se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{\sin(xy - x) - xy + x}{x \ln y} & y \neq 1 \wedge x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$

Si scriva:

1) (2-punti) l'insieme di definizione: $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$. **NESSUNO** ha risposto correttamente alla domanda. Solo ciò avrebbe dovuto causare la bocciatura.

2) (1-punto) l'insieme in cui è continua: l'insieme di definizione.

Svolgimento Certamente se $y \neq 1$ e $x \neq 0$.

Sia $\boxed{x = 0, y = y_0 > 0}$. Il numeratore è $\sin(x(y-1)) - xy + x = x(y-1) + o(x^2(y-1)^2) - xy + x = x(y - y_0) + xy_0 - x - xy + x + o(x^2(y-1)^2) = o(x^2(y-1)^2)$ da cui

$$f(x, y) - f(0, y_0) = \frac{o(x^2(y-1)^2)}{x \ln y} - 0 = \frac{(y-1)o(x(y-1))}{\ln y} \rightarrow 0$$

usando il fatto che se $y_0 \neq 1$, allora $(y-1)/\ln y$ è una quantità limitata mentre tende a -1 se $y \rightarrow 1$. Dunque se $x = 0$ e $y > 0$ la funzione è continua.

Sia ora $\boxed{x_0 \neq 0 \text{ e } y_0 = 1}$. Abbiamo $\sin(x(y-1)) - xy + x = x(y-1) + o(x^2(y-1)^2) = (x - x_0)(y-1) + x_0(y-1) + o(x^2(y-1)^2) - (x - x_0)(y-1) - x_0(y-1) = o(x^2(y-1)^2)$ da cui

$$f(x, y) - f(0, y_0) = \frac{o(x^2(y-1)^2)}{x \ln y} - 0 = \frac{(y-1)o(x(y-1))}{\ln y} \rightarrow 0$$

in quanto $y \rightarrow 1$.

3) (2.5-punti) l'insieme in cui f è derivabile: l'insieme di definizione. Se $x \neq 0$ e $y \neq 1$ è certamente derivabile.

Sia $\boxed{x_0 = 0 \text{ e } y_0 \neq 1}$

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, y_0) - f(0, y_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin(t(y_0 - 1)) - ty_0 + t}{t \ln(y_0)} - 0 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2(y_0 - 1)^2)}{t^2 \ln(y_0)} = 0$$

Basta usare Taylor al secondo ordine.

Sia $\boxed{x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 1}$

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, y_0) - f(0, y_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 1) - f(0, 1)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (0 - 0) = 0$$

Sia $\boxed{x_0 = 0 \text{ e } y_0}$ qualsiasi

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (0 - 0) = 0$$

da cui se $y_0 > 0$, nel punto $(0, y_0)$ la funzione è derivabile.

Sia ora $\boxed{x_0 > 0 \text{ e } y = 1}$

$$f_x(x_0, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t, 1) - f(x_0, 1)) = \lim_{t \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$$

$$\begin{aligned} f_y(x_0, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0, 1 + t) - f(x_0, 1)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\sin(x_0 t) - x_0(1 + t) + x_0}{x_0 \ln(1 + t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(x_0^2 t^2)}{x_0 t \ln(1 + t)} = 0 \end{aligned}$$

Dunque la funzione è derivabile in tutto l'insieme di definizione.

4) (2-punti) le derivate f_x e f_y in tutti i punti dove esistono

$$f_x = \begin{cases} \frac{(y-1)(\cos(xy-x)-1)}{x \ln y} - \frac{\sin(xy-x)-xy+x}{x^2 \ln y}, & x \neq 0 \wedge y \neq 1 \\ 0 & x = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{\cos(xy-x)-1}{\ln y} - \frac{\sin(xy-x)-xy+x}{xy \ln^2 y}, & x \neq 0 \wedge y \neq 1 \\ 0 & x = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$

5) (1-punto) l'insieme in cui la funzione è differenziabile: l'insieme di definizione. Certamente è differenziabile in (x, y) se $(x, y) \neq (0, y)$ e $y \neq 0$, oppure $(x, y) \neq (x, 1)$ e $x \neq 0$.

Sia $\boxed{\underline{x}_0 = (0, y_0)}$, $y_0 \neq 1$. Dobbiamo studiare (usare $f(\underline{x}_0) = 0$, e $\underline{\partial} f(\underline{x}_0) = (0, 0)$)

$$\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} (f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h}) = \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{\sin(h_1(y_0 + h_2) - h_1) - h_1(y_0 + h_2) + h_1}{h_1 \ln(y_0 + h_2)}$$

Usando Taylor si ha

$$\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \left| \frac{o(h_1^2(y_0 - 1 + h_2)^2)}{h_1 \|\underline{h}\| \ln(y_0 + h_2)} \right| = \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \left| \frac{o(h_1^2)}{h_1 \|\underline{h}\| \ln y_0} \right| \leq \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \left| \frac{o(h_1^2)}{h_1 |h_1| \ln y_0} \right| = 0$$

Sia $\underline{x}_0 = (0, 1)$. Dobbiamo studiare (usare $f(\underline{x}_0) = 0$, e $\underline{\partial} f(\underline{x}_0) = (0, 0)$)

$$\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} (f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h}) = \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{\sin(h_1(1 + h_2) - h_1) - h_1(1 + h_2) + h_1}{h_1 \ln(1 + h_2)}$$

Usando Taylor si ha

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left| \frac{o(h_1^2 h_2^2)}{h_1 \|h\| \ln(1+h_2)} \right| \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left| \frac{o(h_1^2) o(h_2^2)}{h_1 |h_1| \ln(1+h_2)} \right| = 0$$

6) (0.5-punti) Sia ora $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : x > 1/2, y > 3/2\}$. Motivando dire se esiste ed eventualmente quanto vale $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} f(\underline{x})$

Certamente $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} x \ln y = +\infty$ per cui

$$\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} \frac{\sin(xy - x)}{x \ln y} = 0$$

Inoltre

$$\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} \frac{-xy + x}{x \ln y} = \lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} \frac{1 - y}{\ln y} = -\infty$$

Ora se $y \rightarrow +\infty$, allora il limite è $-\infty$ ma se $x \rightarrow +\infty$ e $y = y_0$ rimane costante, allora il limite vale $(1 - y_0)/\ln(y_0)$. La conclusione è che il limite non esiste.

7) (0.5-punti) Sia ora $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 1\}$. Motivando dire se esiste ed eventualmente quanto vale $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty, \underline{x} \in D} f(\underline{x})$

Il limite non esiste. Prendiamo $y = 1 + 1/x$ e facciamo il limite per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 0^+$. Otteniamo

$$f(x, 1 + \frac{1}{x}) = \frac{\sin 1 - 1}{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \rightarrow \begin{cases} \sin 1 - 1 & x \rightarrow +\infty \\ -\infty, & x \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

8) (0.5-punti) Motivando, dire se esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, 0^+)} f(x, y)$ e per quali x_0 . Scrivere inoltre il valore dell'eventuale limite (anche $\pm\infty$)

Sia $\underline{x} = (x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$.

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow (x_0, 0)} f(x, y) = \lim_{\underline{x} \rightarrow (x_0, 0)} \frac{\sin(-x_0) + x_0}{x_0 \ln y} = 0$$

Sia $\underline{x} = (0, 0)$,

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\underline{x} \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(xy - x) - xy + x}{x \ln y} = \lim_{\underline{x} \rightarrow (0, 0)} \frac{o(x^2(y-1)^2)}{x \ln y} = 0$$

2) Si calcoli $\int_{\varphi} \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e φ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + 4y^2$, $z = x + y + 1$

La proiezione della curva sul piano (x, y) è data da $x + y + 1 = x^2 + 4y^2$ da cui $(x - \frac{1}{2})^2 + (2y - \frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$ che scriviamo come $(x - a)^2 + 4(y - b)^2 = r^2$. Dunque la curva è $x = a + r \cos t$, $y = b + \frac{r}{4} \sin t$, $z = a + b + r(\cos t + \frac{\sin t}{4}) + 1$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ ed è quindi chiusa. $\omega = yzdx + xzdy + xydz$ è chiusa ed esatta essendo definita su tutto $\mathbf{R}^3$. Rimane da

calcolare $\oint_{\varphi} \omega = \oint_{\varphi} -\frac{1}{3}y^3 dx + \frac{1}{3}x^3 dy$. Abbiamo $x^3 = a^3 + r^3 \cos^3 t + 3a^2 r \cos t + 3ar^2 \cos^2 t$ e $dy = \frac{r}{4} \cos t dt$ e sopravvivono solo

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (r^4 \cos^4 t + 3a^2 r^2 \cos^2 t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (r^4 (\cos^2 t - \frac{1}{4} \sin^2(2t)) + 3a^2 r^2 \cos^2 t) dt = \frac{r^4}{4} (\pi - \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{4} a^2 r^2 \pi$$

e

$$- \oint_{\varphi} \frac{1}{3} y^3 dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{192} \sin^4 t + \frac{3}{4} r^2 b^2 \sin^2 t \right) dt = \pi \frac{r^4}{256} + \pi \frac{3}{4} r^2 b^2$$

3) Sia data la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3 x^3}{(1 + (kx)^4)^2}$.

Trovare l'insieme di convergenza puntuale

Dire argomentando se converge uniformemente nei seguenti insiemi: 1) $[1, +\infty)$, 2) $(0, 1]$

Si veda qui (pag.65)

<http://www.mat.uniroma2.it/perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15/Materiale-non-presente-ing-gest-analis-II-2015-2015.pdf>

4) Motivando si dica se converge l'integrale $\int \int_D \frac{dx dy}{(\sqrt{3}x - y)^{2/3} (1 + x^2 + 2y^2)^4}$ dove D è l'insieme di definizione della funzione integranda.

$D = \{x \in \mathbf{R}^2 : y \neq \sqrt{3}x\}$. Data la simmetria della funzione e del dominio rispetto al cambio $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ consideriamo solamente $y \geq 0$ per cui definiamo $E = \{x \in \mathbf{R}^2 : y \neq \sqrt{3}x, x \geq 0\} = E_1 \cup E_2$. $E_1 = \{x \in \mathbf{R}^2 : y > \sqrt{3}x, y \geq 0\}$, $E_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : y < \sqrt{3}x, y \geq 0\}$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{3}x - y)^{2/3} (1 + x^2 + 2y^2)^4} &\leq \frac{1}{(\sqrt{3}x - y)^{2/3} (1 + x^2 + y^2)^4} \\ \int \int_{E_2} f(x, y) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^k r dr \int_0^{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{k}} \frac{dt}{r^{\frac{2}{3}} (\sqrt{3} \cos t - \sin t)^{\frac{2}{3}} (1 + r^2)^4} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^k r dr \int_0^{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{k}} \frac{dt}{r^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (-\sin(t - \frac{\pi}{3}))^{\frac{2}{3}} (1 + r^2)^4} = \end{aligned}$$

e cambiando variabile $\pi/3 - t = y$ si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^k r dr \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{1}{k}} \frac{-dy}{r^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (\sin y)^{\frac{2}{3}} (1 + r^2)^4}$$

L'integrale si spezza in due integrali convergenti in quanto

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dy}{(\sin y)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{\pi^{2/3}}{2^{2/3}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}}$$

e converge (si trova la primitiva). Si è usato $\sin x \geq (2x)/\pi$ per $0 \leq x \leq \pi/2$. Anche

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1 + r^2)^4}$$

converge. Ad esempio si può spezzare

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1+r^2)^4} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1+r^2)^4} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1+r^2)^4}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1+r^2)^4} &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{k}}^1 dr r^{\frac{1}{3}} \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{r^{\frac{1}{3}} dr}{(1+r^2)^4} &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{r dr}{(1+r^2)^4} \end{aligned}$$

ed ambedue i limiti esistono.