Analisi II per Ingegneria Gestionale
15–09–2015 A.A. 2014/2015, Sessione autunnale, primo scritto

I punteggi sono rispettivamente: 10, 6, 9, 9

Nella correzione gli esercizi vengono valutati 20 ciascuno.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo; se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) Sia data la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy-y)-xy+y}{y\ln x} & x \neq 1 \ \wedge \ y \neq 0 \\ 0 & y=0 \ \vee \ x=1 \end{cases}$$

Si scriva:

1) (2–punti) l'insieme di definizione

2) (1–punto) l'insieme in cui è continua

3) (2.5–punti) l'insieme in cui f è derivabile

4) (2–punti) le derivate f_x e f_y in tutti i punti dove esistono

5) (1–punto) l'insieme in cui la funzione è differenziabile

6) (0.5–punti) Sia ora $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : y > 1/2, x > 3/2\}$. Motivando dire se esiste ed eventualmente quanto vale $\lim\limits_{\|\underline{x}\|\to\infty,\ \underline{x}\in D} f(\underline{x})$

7) (0.5–punti) Sia ora $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : y > 0, x > 1\}$. Motivando dire se esiste ed eventualmente quanto vale $\lim\limits_{\|\underline{x}\|\to\infty,\ \underline{x}\in D} f(\underline{x})$

8) (0.5–punti) Motivando, dire se esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,y_0)} f(x,y)$ e per quali y_0. Scrivere inoltre il valore dell'eventuale limite (anche $\pm\infty$)

Soluzione è A parte lo scambio di x con y, è uguale alla domanda di uno scritto precedente.

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{y^3}{6} \doteq z$ soggetta al vincolo $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

Soluzione Dopo avere definito $F(x,y,\lambda) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{y^3}{6} - \lambda\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$, bisogna risolvere il sistema di tre equazioni

$$a) \quad 2x(x^2-\lambda)=0, \qquad b) \quad \frac{y}{2}(u+\lambda)=0, \qquad c) \quad x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

Abbiamo $x = 0, \pm\sqrt{\lambda}$, e $y = 0, -\lambda$. Ci sono sei combinazioni. Escludiamo $(0,0)$ in quanto non soddisfa c).

$(0,-\lambda)$ implica in c) $\lambda = \pm 2$ per cui abbiamo due punti $\boxed{(0, \pm 2, \mp 2).}$

$(\sqrt{\lambda}, 0)$ dà $\lambda^2 = 1$ ossia $\lambda = \pm 1$ ma solo 1 va bane per cui $\boxed{(x, y, \lambda) = (1, 0, 1).}$

$(-\sqrt{\lambda}, 0)$ dà $\lambda^2 = 1$ ossia $\lambda = \pm 1$ ma solo 1 va bane per cui $\boxed{(x, y, \lambda) = (-1, 0, 1).}$

$(\sqrt{\lambda}, -\lambda)$ dà $\lambda + \dfrac{\lambda^2}{4} = 1$ ossia $\lambda = -2 \pm 2\sqrt{2}$ e chiaramente solo il segno più va bene. Dunque abbiamo $\boxed{(\sqrt{\lambda_0}, -\lambda_0, \lambda_0)}$ dove $\lambda_0 = -2 + 2\sqrt{2}$.

$(-\sqrt{\lambda}, -\lambda)$ dà $\lambda + \dfrac{\lambda^2}{4} = 1$ ossia $\lambda = -2 \pm 2\sqrt{2}$ e chiaramente solo il segno più va bene. Dunque abbiamo $\boxed{(-\sqrt{\lambda_0}, -\lambda_0, \lambda_0)}$ dove $\lambda_0 = -2 + 2\sqrt{2}$.

Ho tolto un punto 1 su venti per ogni punto (x, y, λ) "perso" a chi ha dimostrato di sapere risolvere l'esercizio.

3) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = (|x|n)^{\sqrt{n}} e^{-n|x|}$. i) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale in $(-\infty, +\infty)$, ii) si dica se la convergenza è uniforme in $(-1, 1)$, iii) si dica se la convergenza è uniforme in $(1, +\infty)$ iv) Calcolare (motivando) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-2}^{2} f_n(x)dx$

Soluzione i) Se $x = 0$ si ha $f_n(0) \equiv 0$. Se $x \neq 0$, si ha $f_n(x) = e^{\sqrt{n}\ln(|x|n) - n|x|}$ per cui $f_n(x) \to 0$.

ii) Risolvendo $f_n'(x) = 0$ si ottiene $x_n = 1/\sqrt{n}$. La convergenza uniforme significa che

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x)| < \varepsilon \ \underline{\forall\, x \in (-1, 1)}.$$

Ora

$$f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}^{\sqrt{n}} e^{-\sqrt{n}} \to +\infty$$

per cui la convergenza non può essere uniforme

iii) Bisogna dimostrare che

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x)| < \varepsilon \ \underline{\forall\, x \in (1, +\infty)}.$$

Chiaramente $f_n(x) \leq f_n(1)$ essendo $x_n = 1/\sqrt{n}$ il massimo. $f_n(1) = e^{\sqrt{n}\ln n - n} \to 0$ per cui è uniformemente convergente. La concergenza è uniforme in qualsiasi intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

iv) Non possiamo usare il teorema del passaggio al limite sotto l'integrale in quanto nell'intervallo $(-2, 2)$ la successione non converge uniformemente. Innanzitutto per parità ci riduciamo all'intervallo $(0, 2)$. Poi spezziamo

$$\int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx + \int_1^2 f_n(x)dx$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)dx = 0$$

e qui usiamo il teorema sul passaggio al limite.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n^{\sqrt{n}} x^{\sqrt{n}} e^{-xn} dx$$

Cambiamo variabile $xn = t$ ed otteniamo

$$\int_0^n t^{\sqrt{n}} e^{-t} \frac{dt}{n}$$

La funzione $t^{\sqrt{n}} e^{-t}$ è una sorta di campana con massimo a $\sqrt{n}$ e due flessi a $a_n \doteq \dfrac{\sqrt{n} - n^{1/4}}{2}$ e $b_n \doteq \dfrac{\sqrt{n} + n^{1/4}}{2}$. La distanza fra i flessi è $n^{\frac{1}{4}}$. Ciò vuol dire che

$$\int_0^n t^{\sqrt{n}} e^{-t} \frac{dt}{n} > \int_{a_n}^{b_n} t^{\sqrt{n}} e^{-t} \frac{dt}{n} > (b_n - a_n) \min\{f(a_n), f(b_n)\}$$

$$f(a_n) = \frac{1}{n} a_n^{\sqrt{n}} e^{-a_n} = \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n} - n^{1/4}}{2} \right)^{\sqrt{n}} e^{-\frac{\sqrt{n}-n^{1/4}}{2}} = e^{-\ln n + \sqrt{n} \ln \frac{\sqrt{n}-n^{1/4}}{2} - \frac{\sqrt{n}-n^{1/4}}{2}} \to +\infty$$

e quindi

$$(b_n - a_n) f(a_n) = e^{\frac{1}{4}\ln n - \ln n + \sqrt{n} \ln \frac{\sqrt{n}-n^{1/4}}{2} - \frac{\sqrt{n}-n^{1/4}}{2}} \to +\infty$$

Lo stesso accade per $(b_n - a_n) f(b_n)$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-2}^{2} f_n(x)dx = +\infty$. Data la difficoltà della domanda iv), ho dato il massimo a tutti.

4) Motivando si dica se converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D \frac{dx\,dy}{(\sqrt{3}y - x)^{2/3}(1 + x^2 + 2y^2)^4}$ dove D è l'insieme di definizione della funzione integranda.

Soluzione È praticamente uguale ad uno degli esercizi dati tempo fa.