Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

**Analisi II per Ingegneria Gestionale**
**21–02–2015 A.A. 2014/2015, Sessione invernale, secondo scritto, compito A**

I punteggi sono rispettivamente 8.5, 10.5, 6.5 (esclusa la domanda 3.6*), 8.5

**Nome**(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

# Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

**Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.**

**1)** Sia data la funzione $F(x,y,z) = \sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2 + z + x^2 + y^2$.

1.1) Applicando il "Teorema delle funzioni implicite", dimostrare che la relazione $F(x,y,z) = 0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x} = (0,0,0)$ una funzione $z = f(x,y)$. [Quindi esiste una sfera $B_{\underline{0}}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (x,y)\}$ tale che $F(x,y,f(x,y)) = 0$ *per ogni* $(x,y) \in B_{\underline{0}}(r)$. Il valore di $r$ non è importante].

1.2) Dimostrare che $(0,0)$ è un punto critico per $f(x,y)$ e determinarne la natura.

**Risposta** (barrare): massimo, minimo sella

**Soluzione**. $F_z = 1 + 2z\cos z^2|_{(0,0,0)} = 1$ per cui tutte le condizioni del teorema delle funzioni implicite sono verificate. Nell'intorno del punto abbiamo $z = f(x,y)$ che soddisfa $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$ in una opportuna sfera intorno al punto $(x,y) = (0,0)$.

$$f_x|_{(0,0)} = -\frac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}\Big|_{(0,0)} = \frac{2x + 2x\cos x^2}{1}|_{(0,0)} = 0$$

$$f_y|_{(0,0)} = -\frac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}\Big|_{(0,0)} = \frac{2y + 2y\cos y^2}{1}|_{(0,0)} = 0$$

per cui $(0,0)$ è un punto critico della funzione $z = f(x,y)$. Ci serve la matrice hessiana.

$$f_{xx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x(x,y,f(x,y))}{F_z} + \frac{F_x\frac{\partial}{\partial x}F_z(x,y,f(x,y))}{(F_z)^2}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x(x,y,f(x,y))}{F_z} = \frac{F_{xx}(x,y,f(x,y)) + F_{zx}(x,y,f(x,y))f_x}{F_z}$$

e poi bisogna calcolare tutto in $(x,y) = (0,0)$

$$(F_{xx})_{(0,0)} = 2 + 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2 = 4$$

otteniamo

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x(x,y,f(x,y))}{F_z}\Bigg|_{(0,0)} = \frac{4 + 0\cdot 0}{1} = 4$$

$$\frac{F_x\frac{\partial}{\partial x}F_z(x,y,f(x,y))}{(F_z)^2} = \frac{F_x(x,y,f(x,y))}{(F_z)^2}\big(F_{xz}(x,y,f(x,y)) + F_{zz}(x,y,f(x,y))f_x\big)$$

e vale zero in $(x,y) = (0,0)$. Dunque alla fine abbiamo ottenuto $f_{xx}(0,0) = -4$.

Stessa cosa per $f_{yy}$.

$$f_{yx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y,f(x,y))}{F_z} + \frac{F_x\frac{\partial}{\partial y}F_z(x,y,f(x,y))}{(F_z)^2}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y,f(x,y))}{F_z} = \frac{F_{yx}(x,y,f(x,y)) + F_{yz}(x,y,f(x,y))f_y}{F_z}$$

ed ogni elemento del numeratore è nullo.

La matrice hessiana è $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ per cui $(0,0)$ è un massimo.

**2)** Sia data la funzione $f(x,y)=y$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x,y)$ con $(x,y)$ soggette alla condizione $x^4+yx^2-y^2+243=0$ [Si tratta di un problema di estremi vincolati. Ce ne sono quattro.]

**Risposta sintetica**: I punti di massimo hanno coordinate:

I punti di minimo hanno coordinate:

I punti di sella hanno coordinate:

**Soluzione:** vedi l'esercizio (B) e scambiare $x$ con $y$.

**3)** Sia data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}x^k$.[Può essere utile la formula di Stirling $n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$]

3.1) Si trovi quel valore di $a$ per cui se $x\in(-a,a)$ la serie converge e diverge se $x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ **R.:** $a=1/4$ [Qui non è necessaria la formula di Stirling]

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2(k+1)(2k+1)}{(k+1)^2} \to 4 \implies a=1/4$$

3.2) Si dica se converge per $x=-a$ e per $x=a$. **R.:** per $x=-a$ si; per $x=a$ no. Usiamo Stirling.$x=1/4$.

$$\frac{1}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1}{4^k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{2\pi}\sqrt{k}(1+o(1))\frac{e^{2k}}{k^{2k}}\frac{1}{2\pi k}(1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1)) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi k}}$$

definitivamente e quindi la serie diverge. Per $x=-1/4$ abbiamo

$$\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{2\pi}\sqrt{k}(1+o(1))\frac{e^{2k}}{k^{2k}}\frac{1}{2\pi k}(1+o(1)) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))$$

ma non si può concludere che la serie converga sebbene $\sum\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}$ sia una serie di Leibnitz (perché?). **I primi due studenti che mi mandano per posta elettronica la giusta spiegazione entro le 12.00 del 23/2/2015, riceveranno un punto in più nel voto finale del compito ma non è detto che 31 diventi 30 e lode**. Notare che a causa della presenza del fattore $(-1)^k$ non possiamo scrivere

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))\right| \leq \left|\sum_{k=p}^{q}2\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}\right|$$

il che si tradurrebbe nella convergenza usando il criterio di Cauchy. Né d'altra parte possiamo scrivere

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))\right| \geq \left|\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right|$$

il che vorrebbe dire divergenza sempre in base al criterio di Cauchy.

Il motivo per cui non si può affermare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))$ converga risiede nel fatto che non sappiamo come è fatto $o(1)$. Se ad esempio $o(1)=1/k$ allora convergerebbe in quanto spezzeremmo $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}k^{3/2}}$ ed avremmo la convergenza adi entrambe le serie. Se però fosse $o(1)=(-1)^k/\sqrt{k}$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}(1+o(1))=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi k}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ e la seconda diverge. Fine della risposta per il bonus

Mostriamo che $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}x^k \doteq \sum_{k=1}^{+\infty}b_kx^k$ è una serie di Leibnitz. Per questo basta far vedere che, chiaramente $b_k\to 0$,

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}<1 \iff 4k^2+6k+2<4k^2+8k+4$$

e quindi converge.

3.3) Si dica se converge uniformemente in $[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]\subset(-a,a)$ **R.:** Ovviamente si. Sta sul libro.

3.4) Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{10}[-a+\frac{a}{n},a-\frac{a}{n}]\subset(-a,a)$ **R.:** Ovviamente si.

Basta osservare che all'aumentare di $n$ l'intervallo diventa più grande e contiene il precedente per cui l'unione di cui sopra è $[-9a/10,9a/10]\subset(-a,a)$ e qundi si ha convergenza uniforme. Ricordo che il Teorema 2 pag.16 stabilisce la *convergenza totale* in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-a,a)$. Oppure si può vedere la Proposizione a pag.70 (lezione del 18/12/2014) del file *Materiale non presente* … allegato al corso.

3.5) Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[-a+\frac{a}{n},0]\subset(-a,a)$ **R.:** Si per il teorema di Abel (lezione del 12/01/2015 del file *Materiale non presente*… allegato al corso)

L'argomento di prima non vale più in quanto $n$ è illimitato e l'unione è pari a $(-a,0]$. Siccome sappiamo che per $x=-a$ la serie converge, il Teorema di Abel ci dice che la convergenza è uniforme in $[-a,0]$ e a fortiori in $(-a,0]$.

3.6)* Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,a-\frac{a}{n}]\subset(-a,a)$ **R.:** [domanda per chi vuole "fare impressione"]

**Risposta** Chiaramente $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,a-\frac{a}{n}]=[0,a)$. Sappiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{1}{4^k}=+\infty$ che riscriviamo come $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k a^k = +\infty$. Se fosse uniformemente convergente in $[0,a)$ allora $\sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$.

Sappiamo che $\lim_{k\to+\infty} a_k \frac{\sqrt{k}}{4^k} = 1$ per cui definitivamente $a_k \geq 4^k/(2\sqrt{k}) > 4^k/(2k)$. Scriviamo allora

$$\sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k \geq \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{4^k}{k} x^k = \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} 4^k \int_0^x dy y^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \int_0^x \frac{dy}{y} (4y)^n \frac{1-(4y)^n}{1-4y} \underbrace{=}_{4y=t} \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \int_0^{4x} \frac{dt}{t} t^n \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \int_0^{4x} dt t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} t^k =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dt t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \geq 2 \int_0^n \frac{dx}{n+x} = \frac{1}{2} \ln(2n) - \frac{1}{2} \ln n = \frac{\ln 2}{2}$$

e non è una quantità piccola. Notare che per il passaggio

$$\frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \sum_{k=n}^{+\infty} 4^k \int_0^x dy y^{k-1} = \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,a)} \int_0^x \frac{dy}{y} (4y)^n \frac{1-(4y)^n}{1-4y}$$

si è usata l'uniforme convergenza nell'intervallo $[0,x] \subset (-1/4, 1/4)$.

Un secondo modo di mostrare che non converge uniformemente in $[0,1/4)$ consiste nell'usare Cauchy come segue. La serie non converge uniformemente se

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, n\ \exists\, p,q > n\colon \sup_{x\in[0,1/4)} \Big| \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \Big| \geq \varepsilon$$

Ora prendiamo una successione $x_p = (1-\delta_q)/4$ con $\delta_q \to 0$ da scegliere ma tale che $q\delta_q \to 0$. Inoltre

$$e^{k\ln(1-\delta_q)} = e^{k(-\delta_q + O(\delta_q^2))} = 1 - k\delta_q + k^2 O(\delta_q^2)$$

Abbiamo

$$\sum_{k=p}^{q} a_k x_p^k = \sum_{k=p}^{q} a_k \frac{1}{4^k} - \sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{4^k} k\delta_q + \sum_{k=p}^{q} a_k k^2 O(\delta_q^2)$$

Chiaramente si ha

$$\sum_{k=p}^{q} a_k \frac{1}{4^k} \geq 1$$

essendo la serie $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k \frac{1}{4^k} = +\infty$. Sappiamo inoltre che $\frac{a_k}{4^k} k \sim \sqrt{k}$ e quindi $\sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{4^k} k \sim q^{3/2} - p^{3/2}$.

Ora scegliamo $\delta_q$ tale che $q^{3/2}\delta_q \to 0$ ed a fortiori $p^{3/2}\delta_q \to 0$. Ciò vuol dire che $\sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{4^k} k\delta_q$ e $\sum_{k=p}^{q} a_k k^2 O(\delta_q^2)$ possono essere definitivamente piccoli, diciamo minori di $1/3$, in $p$. Di conseguenza, qualunque sia $p$ grande abbastanza si ha

$$\sum_{k=p}^{q} a_k x_p^k \geq \sum_{k=p}^{q} a_k \frac{1}{4^k} - \sum_{k=p}^{q} \frac{a_k}{4^k} k\delta_q - \Big| \sum_{k=p}^{q} a_k k^2 O(\delta_q^2) \Big| \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

**4)** Sia $\gamma$ la curva intersezione fra il cilindro $x^2+y^2=1$ e l'iperboloide $z=6-xy$. [Le eventuali derivate eseguite per risolvere gli esercizi vanno scritte sulla "bella" e non sottintese]

4.1) Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\omega=3x^2y^2zdx+2x^3yzdy+x^3(y+1)dz$ **R.:**

4.2) Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\displaystyle\omega=\frac{6y}{9y^2+4x^2}dx-\frac{6x}{9y^2+4x^2}dy$ **R.:**

4.3) Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\displaystyle\omega=\frac{4x}{3y^2+2x^2}dx+\frac{6y}{3y^2+2x^2}dy$ **R.:**

4.4) Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\displaystyle\omega=\frac{y}{y^2+(x-2)^2}dx+\frac{-x+2}{y^2+(x-2)^2}dy$ **R.:**

4.5) Sia $\gamma^+$ la curva precedente e sia $\sigma^+$ la curva ottenuta intersecando il cilindro $x^2+y^2=1$ con il piano $x+y+z=0$. Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma^+}\omega-\oint_{\sigma^+}\omega$ dove $\omega=-z^2x\,dy-xyz\,dz$ **R.:**
[Per fare presto si usi "Stokes" ma non è necessario]

**Soluzione:** come (B) con l'unica ovvia modifica $6-xy$ al posto di $6+xy$.

**Analisi II per Ingegneria Gestionale**
**21–02–2015 A.A. 2014/2015, Sessione invernale, secondo scritto, compito B**

I punteggi sono rispettivamente 8.5, 10.5, 6.5 (esclusa la domanda 3.6*), 8.5

**Nome**(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

# Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

**Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.**

**1)** Sia data la funzione $F(x, y, z) = -\sin x^2 - \sin y^2 - \sin z^2 + z - x^2 - y^2$.

1.1) Applicando il "Teorema delle funzioni implicite", dimostrare che la relazione $F(x, y, z) = 0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x} = (0, 0, 0)$ una funzione $z = f(x, y)$. [Quindi esiste una sfera $B_{\underline{0}}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (x, y)\}$ tale che $F(x, y, f(x, y)) = 0$ *per ogni* $(x, y) \in B_{\underline{0}}(r)$. Il valore di $r$ non è importante].

1.2) Dimostrare che $(0, 0)$ è un punto critico per $f(x, y)$ e determinarne la natura.

**Risposta** (barrare): massimo, minimo sella

**Soluzione**. Guardando l'esercizio (A) si capisce subito che è un minimo.

**2)** Sia data la funzione $f(x, y) = x$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x, y)$ con $(x, y)$ soggette alla condizione $y^4 + xy^2 - x^2 + 243 = 0$ [Si tratta di un problema di estremi vincolati. Ce ne sono quattro.]

**Risposta sintetica**: I punti di massimo hanno coordinate:

I punti di minimo hanno coordinate:

I punti di sella hanno coordinate:

La funzione di Lagrange è $F(x, y, \lambda) = x - \lambda(y^4 + xy^2 - x^2 + 243)$

$$F_x = 1 - \lambda(y^2 - 2x) = 0, \qquad F_y = -\lambda(4y^3 + 2xy) = 0, \qquad F_\lambda = y^4 + xy^2 - x^2 + 243 = 0$$

$\lambda = 0$ è da scartare per cui $4y^3 + 2xy = 0$ se e solo se $y = 0$ oppure $x = -2y^2$.

Sia $y = 0$. Dalla terza equazione segue $x^2 = 243$ ossia $x = \pm 9\sqrt{3}$ e dalla prima $1 + \lambda(\pm 9\sqrt{3}) = 0$. Quindi abbiamo i punti $\boxed{(9\sqrt{3}, 0, \frac{-1}{18\sqrt{3}}),}$ e $\boxed{(-9\sqrt{3}, 0, \frac{1}{18\sqrt{3}}).}$

Sia $x = -2y^2$. Nella terza ci dà $y^4 - 2y^4 - 4y^4 + 243 = 0$ ossia $5y^4 = 243$ e quindi $y = \pm\frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}$ e quindi $x = -2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}$ e$\lambda = \dfrac{1}{9\sqrt{15}}$. $\boxed{(-2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}, \frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}, \frac{1}{9\sqrt{15}})}$ e $\boxed{(-2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}, \frac{1}{9\sqrt{15}}).}$

Abbiamo quattro punti.

Cominciamo da $(9\sqrt{3}, 0, \dfrac{-1}{18\sqrt{3}})$. La matrice hessiana di $F$ è

$-\lambda\begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 12y^2 + 2x \end{pmatrix} \to \dfrac{1}{18\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 18\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Poi dobbiamo trovare i vettori tangenziali al vincolo ossia $(y^2 - 2x, 4y^3 + 2xy) \cdot (a, b) = 0$. otteniamo $(-18\sqrt{3}, 0) \cdot (a, b) = 0$ e quindi $a = 0$

per cui dobbiamo studiare la forma quadratica $\frac{1}{18\sqrt{3}}(0,b)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 18\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b^2$ quindi è un minimo.

Sia ora $(-9\sqrt{3}, 0, \frac{1}{18\sqrt{3}})$. La matrice hessiana di $F$ è
$-\lambda\begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 12y^2+2x \end{pmatrix} \to \frac{-1}{18\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -18\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Poi dobbiamo trovare i vettori tangenziali al vincolo ossia $(y^2-2x, 4y^3+2xy)\cdot(a,b)=0$. Otteniamo $(18\sqrt{3},0)\cdot(a,b)=0$ e quindi $a=0$ per cui dobbiamo studiare la forma quadratica $\frac{-1}{18\sqrt{3}}(0,b)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -18\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b^2$ quindi è un minimo.

Sia ora $(-2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}, \frac{3^{5/4}}{5^{1/4}}, \frac{1}{9\sqrt{15}})$. La tangenzialità la vincolo diventa $(y^2-2x, 4y^3+2xy)\cdot(a,b)=0$ ossia $(9\sqrt{15},0)\cdot(a,b)=0$ ossia $a=0$. La forma quadratica è

$$-\lambda(0,b)\begin{pmatrix} -2 & 2\cdot 3^{5/4}5^{3/4} \\ 2\cdot 3^{5/4}5^{3/4} & 72\sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = -\frac{8}{5}b^2 < 0$$

per ogni $b \neq 0$ per cui è un massimo.

Sia ora $(-2\frac{3^{5/2}}{\sqrt{5}}, \frac{-3^{5/4}}{5^{1/4}}, \frac{1}{9\sqrt{15}})$. La tangenzialità la vincolo diventa $(y^2-2x, 4y^3+2xy)\cdot(a,b)=0$ ossia $(9\sqrt{15},0)\cdot(a,b)=0$ ossia $a=0$. La forma quadratica è

$$-\lambda(0,b)\begin{pmatrix} -2 & -2\cdot 3^{5/4}5^{3/4} \\ -2\cdot 3^{5/4}5^{3/4} & 72\sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = -\frac{8}{5}b^2 < 0$$

per ogni $b \neq 0$ per cui è un massimo.

**3)** Sia data la serie di potenze $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{\sqrt{k}(k!)^2}x^k$. [Può essere utile la formula di Stirling $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}(1+o(1))$]

3.1) Si trovi quel valore di $a$ per cui se $x \in (-a,a)$ la serie converge e diverge se $x \in (-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ **R.:** [Qui non è necessaria la formula di Stirling]

3.2) Si dica se converge per $x=-a$ e per $x=a$. **R.:**

3.3) Si dica se converge uniformemente in $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ **R.:**

3.4) Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{10}[-a+\frac{a}{n}, a-\frac{a}{n}] \subset (-a,a)$ **R.:**

3.5) Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[-a+\frac{a}{n}, 0] \subset (-a,a)$ **R.:**

3.6*) Si dica se converge uniformemente in $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0, a-\frac{a}{n}] \subset (-a,a)$ **R.:** [domanda per chi vuole "fare impressione"]

**Svolgimento:** Come il compito (A). La presenza di $\sqrt{k}$ a denominatore non cambia nulla.

**4)** Sia $\gamma$ la curva intersezione fra il cilindro $x^2+y^2=1$ ed l'iperboloide $z=6+xy$. [Le eventuali derivate eseguite per risolvere gli esercizi vanno scritte sulla "bella" e non sottintese]

4.1) Calcolare $\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\omega=3x^2y^2zdx+2x^3yzdy+x^3(y-1)dz$ **R.:**

4.2) Calcolare $\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\omega=\dfrac{y}{4y^2+x^2}dx-\dfrac{x}{4y^2+x^2}dy$ **R.:**

4.3) Calcolare $\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\omega=\dfrac{6x}{2y^2+3x^2}dx+\dfrac{4y}{2y^2+3x^2}dy$ **R.:**

4.4) Calcolare $\oint_{\gamma^+}\omega$ dove $\omega=\dfrac{x}{x^2+(y-2)^2}dy+\dfrac{-y+2}{x^2+(y-2)^2}dx$ **R.:**

4.5) Sia $\gamma^+$ la curva precedente e sia $\sigma^+$ la curva ottenuta intersecando il cilindro $x^2+y^2=1$ con il piano $x+y+z=0$. Calcolare $\oint_{\gamma^+}\omega-\oint_{\sigma^+}\omega$ dove $\omega=-z^2x\,dy-xyz\,dz$ **R.:**

[Per fare presto si usi "Stokes" ma non è necessario]

**Soluzione.**

(4.1) Si potrebbe calcolare direttamente l'integrale curvilineo ma al fine di accorciare i calcoli scriviamo

$$\omega=3x^2y^2zdx+2x^3yzdy+x^3y^2dz-x^3y^2dz+x^3(y-1)dz=d(x^3y^2z)-x^3y^2dz+x^3(y-1)dz$$

Quindi, essendo la curva chiusa, rimane solo $-x^3y^2dz+x^3(y-1)dz$ e quindi $(z=6+xy)$

$$-x^3y^2(xdy+ydx)+(x^3y-x^3)(xdy+ydx)=dx(-x^3y^3+x^3y^2-x^3y)+dy(-x^4y^2+x^4y-x^4)$$

Teniamo presente che ogni termine della forma $f(x)dx$, $f(y)dy$, $dxy^kx$, $dyx^ky$, dà contributo nullo. I primi due in quanto sono forme differenziali esatte e le seconde due in quanto, una volta parametrizzata la curva, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=6+\sin t\cos t$, danno luogo a termini del tipo $\int_0^{2\pi}\sin^{k+1}t\cos tdt$ e $\int_0^{2\pi}\cos^{k+1}t\sin tdt$. Anche termini del tipo $x^kdy$ e $y^kdx$ con $k$ pari danno zero in quanto produrrebbero $\int_0^{2\pi}(\cos t)^{k+1}dt$ e $\int_0^{2\pi}(\sin t)^{k+1}dt$. Quindi, usando $x^2+y^2=1$, abbiamo

$$dx(-x^3y(1-y^2)+x^3(1-x^2)-xy(1-y^2)),\qquad dy(-y^2(1-y^2)^2+x^4y-x^4)$$

e rimaniamo con $dx(-x^3y+x^3y^3)=-yx^5dy$ ossia

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos^5t\sin tdt=\int_0^{2\pi}\cos^5t(1-\cos^2t)dt=0$$

(4.2) È una forma chiusa ma l'insieme non è semplicemente connesso. Per il lemma di Gauss–Green ottengo lo stesso risultato se integro sull'ellisse $4y^2+x^2=1$ ed ho $2\pi$. Se si integra sulla circonferenza $x^2+y^2=1$, gli integrali sono molto più complicati e non basta dire che il risultato è $2\pi$. La parametrizzazione di $4y^2+x^2=1$ è $x=\cos t$, $y=(\sin t)/2$ **e non** $x=\cos t$, $y=2\sin t$.

(4.3) È una forma chiusa ma l'insieme non è semplicemente connesso. Per il lemma di Gauss–Green ottengo lo stesso risultato se integro sull'ellisse $2y^2+3x^2=1$ ed ho 0 ed infatti è esatta. La primitiva è $\ln(2y^2+3x^2)$. Anche qui, se si integra sulla circonferenza si ottengono integrali un minimo complicati. Per dire che l'integrale è zero, o si scegli l'ellisse giusta ($x = (\cos t)/\sqrt{3}$, $y = (\sin t)/\sqrt{2}$) sul cui bordo integrare oppure si individua il potenziale

(4.4) È una forma chiusa e la curva è contenuta su di un sottoinsieme semplicemente connesso dell'insieme di defnizione della forma. L'integrale vale zero.

(4.5) Per il teorema di Stokes, detto $\underline{F}(\underline{x}) = (0, -z^2x - xyz)$ abbiamo $\oint_{\gamma^+} \omega - \oint_{\sigma^+} \omega = \int\int_D (rot\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}) d\sigma$ dove $D$ è la regione del cilindro compresa fra il piano e l'iperboloide. La regione $D$ si parametrizza come $x = \cos t, y = \sin t, z = u$, $0 \le t \le 2\pi$, $-x-y \le u \le 6+xy$. La normale esterna è $(\cos t, \sin t, 0)$ ed il rotore è $(xz, yz, -z^2)$. Il prodotto scalare è $\cos^2 tu + \sin^2 tu = u$ Duque dobbiamo integrare

$$\int_0^{2\pi} dt \int_{-\cos t - \sin t}^{6+\cos t \sin t} udu = \int_0^{2\pi} dt \frac{1}{2}((6 + \cos t \sin t)^2 - (\cos t + \sin t)^2) = \frac{141}{4}\pi$$

**Errore grossolano**. Alcuni hanno notato che $\frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^2z = \frac{\partial}{\partial x} 2x^3yz$ concludendo erroneamente che la forma è chiusa. Non è così in quanto la forma è definita in $\mathbf{R}^3$ e quindi si dovrebbero eseguire anche le derivate rispetto a $z$ ma in tal caso manca il terzo termine. Per convincersene si esegua l'integrale lungo il quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$ e si ricordi che $z = 6 + xy$. È chiaro che se $z$ fosse costante, andrebbe a fattore e la forma sarebbe esatta.