Analisi II per Ingegneria Gestionale
28–02–2015 A.A. 2014/2015, Sessione invernale, secondo scritto valido per l'orale

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) 6–punti

Sia dato l'integrale $\displaystyle\int\int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ dove $G=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\geq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{x}$. Dimostrare che converge o viceversa Può essere utile la formula $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Svolgimento Detto I l'integrale si ha

$$I=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Cominciamo con

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^{\sqrt{x}}=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}$$

e siccome $\arctan 1/\sqrt{x}\leq 1/\sqrt{x}$, l'integrale converge convergendo l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$. Inoltre, integrando per parti si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\left(\frac{-1}{2(x^2+y^2)}\right)'y=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\left(\frac{-y}{2(x^2+y^2)}\right)'+\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\frac{1}{2(x^2+y^2)}=$$

Il secondo integrale è come il precedente. Dal primo abbiamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\left(\frac{-y}{2(x^2+y^2)}\right)\Big|_0^{\sqrt{x}}=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\frac{-1}{\sqrt{x}+x^{3/2}}$$

ed il limite esiste finito per cui l'integrale converge. Si pò anche calcolare esattamente potendosi trovare la primitiva.

La trattazione con coordinate polari (r,t) è più insidiosa. La relazione $x\geq 1$ dà $\cos t\geq 1/r$ ossia $t\leq\arccos(1/r)$ (si ricordi che la funzione $\arccos x$ è decrescente). La relazione $y\leq\sqrt{x}$ dà $t\leq\cos t/(\sin^2 t)$ ossia $r\cos^2 t+\cos t-r\geq 0$ ossia

$$\cos t\leq\frac{-1-\sqrt{1+4r^2}}{2r}\quad\vee\quad\cos t\geq\frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2r}$$

La prima è da scartare in quanto $\dfrac{-1-\sqrt{1+4r^2}}{2r}<-1$. La seconda dà $t\leq\arccos\left(\sqrt{\dfrac{1}{4r^2}+1}-\dfrac{1}{2r}\right)$. Alla fine abbiamo

$$t\leq\min\left\{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right),\arccos\frac{1}{r}\right\}$$

ossia $t \leq \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)$ se $r \geq \sqrt{2}$ mentre $t \leq \arccos(1/r)$ se $r \leq \sqrt{2}$

Per questo scomponiamo l'integrale di partenza come

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\int_0^{\arccos(1/r)} dt\frac{r^2\cos(2t)}{r^4}+\int_{\sqrt{2}}^k r\,dr\int_0^{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)} dt\frac{r^2\cos(2t)}{r^4}+\right]=$$

Il primo integrale è $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dr}{r}\frac{2}{r}\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}$ e non è improprio. Il secondo diventa

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^k r\,dr\int_0^{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)} dt\frac{r^2\cos(2t)}{r^4}=$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^k\frac{dr}{r}\frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)\right)=$$
$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^k\frac{dr}{r}\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)^2}$$

Ora

$$\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\leq 2$$

e

$$\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\left(1+\frac{1}{4r^2}\right)^{1/4}\leq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}$$

Quindi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^k r\,dr\int_0^{\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4r^2}+1}-\frac{1}{2r}\right)} dt\frac{r^2\cos(2t)}{r^4}\leq\lim_{k\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^k\frac{4\sqrt{2}}{r^{3/2}}dr$$

ed il limite esiste.

2) 12–punti Si dimostri il "TEOREMA DEL DINI"

Teorema *Sia* $F(x, y)$ *una funzione di classe* C^1 *in un aperto* $A \subset \mathbf{R}^2$. *Se* (x_0, y_0) *è un punto di* A *nel quale risulta*

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \text{e} \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono numeri positivi δ *e* σ *tali che l'equazione*

$$F(x, y) = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione

$$f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$$

cioè una funzione tale che

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

e per cui risulta $f(x_0) = y_0$. *Inoltre* f *è derivabile nell'intervallo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e si ha*

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

3) 12–punti Sia data una funzione $f\colon A \to \mathbf{R}$ con A aperto in $\mathbf{R}^2$ tale che le derivate parziali di f siano continue in $\underline{x}_0$. Dimostrare che f è differenziabile