# Materiale svolto a lezione e non presente sul libro di testo, A.A.2014–2015

**Gli esercizi per casa e non svolti a lezione sono contraddistinti con ♠**

**Gli esercizi svolti a lezione sono contraddistinti con •**

## Lezione del 30/9/2014

**Esercizio** Sia $E \subset \mathbb{R}$, $E = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$. Ogni punto è isolato ed inoltre $E' = \{0\}$. Ne segue $\partial E = E \cup \{0\}$.

**Esercizio** Dato l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x = \frac{m}{1+nm},\ n, m \in \mathbf{N}\}$. Trovare $E'$, $\partial E$, $\overset{\circ}{E}$, $(E')'$, $\overline{E}$
*Risposta* Ciascun punto di $E$ è isolato in quanto se $n \to +\infty$, $x_{n,m} \to 0 \notin E$. Ugualmente $x_{n,m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1/n \notin E$. Dunque $E$ è chiuso.
$E' = \{x \in \mathbb{R} \colon x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$; (chiuso)

$\partial E = E \cup E'$; (chiuso) $\quad \overset{\circ}{E} = \emptyset$, $\quad (E')' = \{0\}$, (chiuso) $\quad \overline{E} = E \cup E'$ (chiuso).

**Esercizio** Dato l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x = \frac{p}{q}, p, q$ interi primi fra di loro$\}$, trovare $\partial E$.
*Risposta* $\partial E = \mathbf{Q}$.

**Esercizio** Dimostrare che è aperto l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} | P(x) > 0\}$, dove $P(x)$ è un polinomio.

*Dimostrazione* Sia $A = \{x \in \mathbb{R}|\ P(x) > 0\}$ (ossia $A$ è la controimmagine secondo $P(x)$ dell'insieme $(0, +\infty)$; vogliamo mostrare che è aperto. Sia dunque $x_o$ tale che $P(x_o) > 0$. Dobbiamo mostrare che esiste un intorno $U$ di $x_o$ tale che se $x \in U$ allora $P(x) > 0$. Supponiamo che $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. $P(x) = P(x_o) + P(x) - P(x_o) = \sum_{k=0}^n a_k x_o^k + \sum_{k=0}^n a_k (x^k - x_o^k)$. Dalla definizione di coefficiente binomiale risulta che (si dimostra per induzione)

$$x^k - x_o^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x_o^j (x - x_o)^{k-j} = (x - x_o) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x_o^j (x - x_o)^{k-j-1}$$

poniamo $j + 1 = p$ ed otteniamo

$$(x - x_o) \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} x_o^{p-1} (x - x_o)^{k-p}$$

Se $|x - x_o| < 1$ maggioriamo

$$\left|(x - x_o) \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} x_o^{p-1} (x - x_o)^{k-p}\right| \le |x - x_o| \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} |x_o|^{p-1} \doteq |x - x_o| \sum_{p=1}^{k} S_k$$

$$|x-x_o|\sum_{p=1}^{k} S_k \doteq |x-x_o|R_k$$

In tal modo possiamo stimare

$$|P(x)-P(x_o)| = |\sum_{k=1}^{n} a_k(x^k-x_o^k)| \le |x-x_o|R$$

$$R \doteq \sum_{k=1}^{n} |a_k|R_k$$

Dunque si ha $P(x) \ge P(x_o) - |P(x)-P(x_o)| \ge P(x_o) - |x-x_o|R$. Ora prendo $|x-x_o| \le \min\{\frac{P(x_o)}{2R}, 1\}$ per cui $P(x) \ge \frac{1}{2}P(x_o) > 0$ per definizione di $x_o$. Dunque $A$ è aperto.
Si sarà notato come essenziale sia $P(x_o) \neq 0$.

**Lezione del 02/10/2014**

Data una funzione $f\colon E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si è data la definizione di restrizione di $f$.

• Enunciato del teorema: $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$ se e solo se $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f|_F(\underline{x}) = l$ dove $f|_F$ è una restrizione di $f$. Qui $\underline{x}_0$ è un punto finito oppure all'infinito ed $l$ è finito oppure $\pm\infty$.

• Analisi dell'esistenza del limite in tutto $E'$ per le funzioni

$$\frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}, \qquad \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \ge x^2 \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \ge e^{-1/x^2} \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Esercizio**

Sia $\underline{x}_o \in \dot{\mathbf{R}}^2 \backslash \mathbf{R}^2$ (ossia bisogna fare il limite all'infinito). Si dica quale delle seguenti due affermazioni è vera (eventualmente tutte e due):

1) $E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x > a,\ y > a,\ a > 0\}$ $\quad x^2y\colon E \to \mathbf{R}$ $\quad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} x^2y = +\infty$

2) $E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ $\quad x^2y\colon E \to \mathbf{R}^2$ $\quad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} x^2y = +\infty$

*Risposta*

Cominciamo da 1). Detti $\mathcal{V}_{_M} = \{z \in \mathbf{R}^2 \mid z > M, M > 0\}, \mathcal{U}_r = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\underline{x}\| > r, r > 0\}$, dobbiamo mostrare che

$\forall\ M > 0\ \exists\ r > 0 \mid \underline{x} \in \mathcal{U}_r \cap E\ \Rightarrow\ x^2y \in \mathcal{V}_{_M}$ ossia $x^2y > M$.

$$x^2y \ge C\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (C \text{ da calcolare})$$

Eleviamo al quadrato $x^4y^2 = \frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2(x^2+y^2)$ per cui

$$\frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2x^2 \iff \frac{1}{2}x^2y^2 \geq C^2$$

e ciò è implicato da

$$\frac{1}{2}(xy)^2 \geq \frac{a^4}{2} \geq C^2 \iff C \leq a^2/\sqrt{2}$$

L'altra equazione ci dà

$$\frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2y^2 \iff \frac{1}{2}x^4 \geq C^2$$

ed anche qui operiamo

$$\frac{1}{2}x^4 \geq \frac{1}{2}a^4 \geq C^2 \iff C \leq a^2/\sqrt{2}$$

Abbiamo ottenuto che per $x, y \geq a > 0$ e per $C \leq a^2/\sqrt{2}$ si ha

$$x^2y \geq C\sqrt{x^2+y^2}$$

Ne segue

$$x^2y \geq C\sqrt{x^2+y^2} > M \implies r \geq \max\{M/C, a\} \geq \max\left\{M\sqrt{2}/a^2, \sqrt{2}a\right\}$$

Si può notare come $r = r(a, M) \to +\infty$ per $a \to 0$ per ogni valore positivo di $M$. Questo fatto ci dice che il secondo limite è falso. Prendiamo le due restrizioni di $f$ determinate dai sottoinsiemi di $E$

$$E_1 \subset E, \qquad E_1 = \{\underline{x} \in E\colon x = y\}, \qquad E_2 = \{\underline{x} \in E\colon y = 1/x^2\}$$

Chiaramente $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f|_{E_1} = +\infty$, $f|_{E_2}(\underline{x}) \equiv 1$ per cui il limite vale 1. La conclusione è che il limite in 2) non esiste.

1♠) Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ esistono i limiti delle seguenti funzioni: $\frac{x^3y^3}{x^8+y^4}$, $\frac{xy^5}{|x|^3+|y|^7}$, $\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{x^2+y^2}{y-x}$. Nel primo e secondo, usare opportunamente la disuguaglianza $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ con $a_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$).

2)♠ Per le stesse funzioni si dica se ammettono limite all'infinito.

Svolgiamo solo la prima. Dal momento che $f(0, y) \equiv 0$, se il limite esiste, deve valere zero. Prendiamo ora la restrizione $f(\sqrt{y}, y) = \dfrac{y^{9/2}}{2y^4} \to +\infty$ per $y \to +\infty$ per cui il limite non esiste.

3)♠ Dire se esiste il limite all'infinito della funzione $f(x, y) = x^2 y$ nei due casi

$E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq a > 0\} \qquad x^2 y : E \to \mathbf{R}^2$

$E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq a > 0,\ y > 0\} \qquad x^2 y : E \to \mathbf{R}^2$

4)♠ Sia dato un insieme $E \subset \mathbb{R}$. Si dimostri che l'insieme dei punti isolati di $E$ è al più numerabile.

*Svolgimento* Sia $A$ l'insieme dei punti isolati di $E$. Per definizione, dato $x \in A$, esiste $\delta$, tale che $(x - \delta, x + \delta) \cap E \backslash \{x\} = \emptyset$. Poi prendiamo l'intervallo $I_x \doteq (x - \delta/2, x + \delta/2)$. Ciò implica che, detti $I_x$ e $I_y$ due intervalli costruiti come prima, si ha $I_x \cap I_y = 0$. Sia ora $f$ la funzione che ad ogni $x$ associa il numero razionale $\alpha \in I_x$. La funzione $f$ è iniettiva in quanto $I_x \cap I_y = \emptyset$. Essendo l'insieme dei razionali numerabile, l'insieme dei punti di $A$ non può essere non–numerabile.

4)♠ Sia dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$. Si dimostri che l'insieme dei punti isolati di $E$ è al più numerabile.

*Svolgimento* Replicare l'argomento precedente.

5)♠ Sia dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non numerabile. *Un punto $\underline{x} \in E$ è detto di condensazione se $B_r(\underline{x}) \cap E$ è non numerabile per ogni $r$.* Dimostrare che tutti i punti di $E$, tranne un sottoinsieme al più numerabile, sono punti di condensazione.

Sia $n = 1$. Da $E$ togliamo i punti isolati ed i punti interni se ve ne sono. I punti isolati non sono chiaramente di condensazione ma sono numerabili per quanto scritto sopra. I punti interni sono chiaramente di condensazione. Rimangono i punti appartenenti a $\partial E$ e che sono pure in $E'$. Sia $\hat{E}$ tale insieme. Se è numerabile, allora non c'è nulla da dire. Supponiamo sia non numerabile e supponiamo che sia costituito da punti di non condensazione. Suddividiamo la retta in intervalli di lunghezza 1. In almeno uno di essi, diciamo $[a, a+1]$, deve esservi una quantità non numerabile di punti di $\hat{E}$. Facciamo una ulteriore divisione di $[a, a+1]$ in due sottointervalli di lunghezza $1/2$. In almeno uno di essi deve esservi una quantità non numerabile di punti di $\hat{E}$. Si procede con sezioni successive e nel limite si ottiene un punto $p$ che non è detto appartenga a $\hat{E}$. Di certo in ogni intorno di $p$ c'è una quantità non numerabile di punti di $\hat{E}$. Per costruzione, vicino quanto voglio a $p$, trovo un punto di $\hat{E}$ ed un intorno aperto di esso detto $V$, tale che ogni aperto in $V$ contiene una quantità non numerabile di punti di $\hat{E}$ e questo è in contraddizione con l'ipotesi.

Con $n > 1$ è praticamente la stessa dimostrazione.

**Lezione del 06/10/2014**

Studio dell'esistenza del $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$ sia usando le coordinate polari che in coordinate cartesiane.

Studio della derivabilità e della differenziabilità della funzione $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Del file denominato "funzioni di piu' variabili", si possono fare tutti gli esercizi 1.7, 2.7, 4.7

**Lezione del 07/10/2014** Calcolo della derivata $f_{xy}(\underline{x})$ per ogni $\underline{x}\in\mathbb{R}^2$ della funzione dell'esempio 2 pag.52.

**Un chiarimento sul TEOREMA di SCHWARZ**

Sembra che sul libro non sia molto chiara la provenienza delle espressioni $F(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$ e $G(y)=f(x,y)-f(x_0,y)$. Quanto segue dovrebbe fugare ogni dubbio residuo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\underline{x}_0)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(\underline{x}_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)-(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))}{(x-x_0)(y-y_0)}=$$

Ora, detta $F(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$, si ha

$$f(x,y)-f(x,y_0)-(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))=F(x)-F(x_0)$$

D'altra parte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\underline{x}_0)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(\underline{x}_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}=$$
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y)-(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))}{(x-x_0)(y-y_0)}=$$

Ora, detta $G(y)=f(x,y)-f(x_0,y)$, si ha

$$f(x,y)-f(x_0,y)-(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))=f(x,y)-f(x,y_0)-(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))=$$
$$=G(y)-G(y_0)=F(x)-f(x_0)$$

e poi si prosegue come nel libro.

**Lezione del 9/10/2014**

**Definizione** *Sia data una funzione* $f\colon E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *differenziabile un numero sufficiente di volte. Definiamo le seguenti grandezze* $df(\underline{x}_o)\stackrel{\rm def}{=}\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}_o)dx_i$, $d^2f(\underline{x}_o)\stackrel{\rm def}{=}\sum_{i,j=1}^n f_{x_ix_j}(\underline{x}_o)dx_idx_j$, $d^kf(\underline{x}_o)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=1}^n f_{x_{i_1}\dots,x_{i_k}}(x_o)dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$ *rispettivamente il differenziale di ordine 1,2, etc.*. Si può anche scrivere $h_i$ al posto di $dx_i$.

Sia $n=2$.

$df^1f(\underline{x}_o)$ è la derivata direzionale $\underline{\partial}f(\underline{x}_o)\cdot\underline{h}$

$d^2f(\underline{x}_o)$ è il polinomio quadratico $f_{xx}(\underline{x}_o)h_1^2+f_{yy}(\underline{x}_o)h_2^2+2f_{xy}(\underline{x}_o)h_1h_2$

$d^3f(\underline{x}_o)=f_{xxx}(\underline{x}_o)h_1^3+f_{yyy}(\underline{x}_o)h_2^3+3f_{xxy}(\underline{x}_o)h_1^2h_2+3f_{yyx}(\underline{x}_o)h_2^2h_1$

Sia $n=3$.

$d^2f(\underline{x}_o)$ è il polinomio quadratico $f_{xx}(\underline{x}_o)h_1^2+f_{yy}(\underline{x}_o)h_2^2+f_{zz}(\underline{x}_o)h_3^2+2f_{xy}(\underline{x}_o)h_1h_2+2f_{xz}(\underline{x}_o)h_1h_3+2f_{yz}(\underline{x}_o)h_2h_3$

$d^3f(\underline{x}_o)=f_{xxx}(\underline{x}_o)h_1^3+f_{yyy}(\underline{x}_o)h_2^3+f_{zzz}(\underline{x}_o)h_3^3+3f_{xxy}(\underline{x}_o)h_1^2h_2+3f_{xxz}(\underline{x}_o)h_1^2h_3+3f_{yyx}(\underline{x}_o)h_2^2h_1+3f_{yyz}(\underline{x}_o)h_2^2h_3+3f_{zzx}(\underline{x}_o)h_3^2h_1+3f_{zzy}(\underline{x}_o)h_3^2h_2+6f_{xyz}(\underline{x}_o)h_1h_2h_3$

Sussiste il seguente Teorema (di Taylor per funzioni di più variabili)

**Teorema** *Sia* $f\colon E\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $m$ *volte differenziabile in* $\underline{x}\in E$. *Sia* $\underline{h}\in\mathbb{R}^n$ *tale che il segmento* $[\underline{x},\underline{x}+\underline{h}]\subset E$(2.4). *Vale allora* $f(\underline{x}+\underline{h})=f(\underline{x})+\sum_{k=1}^m\frac{d^kf(\underline{x})}{k!}+o(\|\underline{h}\|^m)$ *per* $\underline{h}\to\underline{0}$. *Inoltre*

*1)* $f(\underline{x})+\sum_{k=1}^m\frac{d^kf(\underline{x})}{k!}$ *è l'unico polinomio di grado* $\le m$ *che verifica la relazione precedente*

*2) Se* $f$ *è* $m$ *volte differenziabile in* $[\underline{x},\underline{x}+\underline{h}]$, *le derivate di ordine* $m$ *sono ivi continue,* $f$ *è* $m+1$ *volte differenziabile in* $(\underline{x},\underline{x}+\underline{h})$ *esiste* $\lambda\in(0,1)$ *tale che*

$$f(\underline{x}+\underline{h})=f(\underline{x})+\sum_{k=1}^m\frac{d^kf(\underline{x})}{k!}+\frac{d^{m+1}f(\underline{x}+\lambda\underline{h})}{(m+1)!}$$

*Dimostrazione* La prima parte della 1) si dimostra per induzione. Se $m=1$ è la differenziabile. Sia $F^{(j)}(\underline{h})\stackrel{\rm def}{=}f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-\sum_{k=1}^j\frac{d^kf(\underline{x})}{k!}$ e supponiamo che $F^{(j)}(\underline{h})=o(\|\underline{h}\|^j)$ per $\underline{h}\to\underline{0}$, $1\le j\le m-1$. Vogliamo far vedere che $F^{(m)}(\underline{h})=o(\|\underline{h}\|^m)$ (che $F^{(m)}$ esista,

(2.4) In [BD1], Teorema 7.6 pag. 333 e [BD2], Teorema 9.12 pag. 403, vi è $[\underline{x},\underline{x}+d\underline{x}]\subseteq A$. Ad eccezione di $A$ al posto di $E$, non può accadere che $[\underline{x},\underline{x}+d\underline{x}]=E$ in quanto $E$ non sarebbe più aperto e del fatto che $E$ debba essere aperto non vi è dubbio è conseguenza del fatto che $f(\underline{x})$ è $m$ volte differenziabile). Ricordiamo che[(2.5)]

$$d^k f(\underline{x}) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n=0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_n=k}}^{k} \frac{k!}{i_1!i_2!\ldots i_n!} h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x})}{(\partial x_1)^{i_i}(\partial x_2)^{i_2}\ldots(\partial x_n)^{i_n}}$$

e quindi $d^m f(\underline{x})$ è un polinomio nelle variabili $h_1,\ldots,h_n$. $F^{(m)}(\underline{h})$ è $m$ volte differenziabile in $\underline{h}=\underline{0}$ e le sue derivate si annullano. Ciò implica che $\partial_{h_i} F^{(m)}(\underline{h})$ è $m-1$ volte differenziabile e per l'ipotesi induttiva abbiamo $\partial_{h_i} F^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^{m-1})$ $i=1,\ldots,m$. Per il teorema del valor medio

$$F^{(m)}(\underline{h}) - F^{(m)}(\underline{0}) = F^{(m)}(\underline{\hat{h}}) = \underline{\partial} F^{(m)}(\underline{\hat{h}})\underline{h} = \underline{o}(\|\underline{h}\|^{m-1})\cdot\underline{h} = o(\|\underline{h}\|^m), \qquad \underline{\hat{h}} \in [\underline{0},\underline{h}]$$

Unicità ; supponiamo che esista un polinomio $P(\underline{h})$ di grado $\le m$ tale che $f(\underline{x}+\underline{h})-P(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$. Essendo

$$f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + o(\|\underline{h}\|^m) \doteq T^{(m)}(\underline{h})$$

ne segue che $P(\underline{h}) - T^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$. D'altra parte supponiamo che $P(\underline{h}) \ne T^{(m)}(\underline{h})$. Ciò vuol dire che almeno uno dei coefficienti di $P(\underline{h})$ è diverso da quello di $T^{(m)}(\underline{h})$ avente lo stesso ordine e quindi non può essere $P(\underline{h})-T^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$ in quanto i due polinomi sono di grado $\le m$.

2) Con le ipotesi date, la funzione $\varphi(t) = f(\underline{x}+t\underline{v})$, $\underline{v} = \frac{\underline{h}}{\|\underline{h}\|}$ è $m$ volte derivabile in $[0,\|\underline{h}\|]$ e $m+1$ volte derivabile in $(0,\|\underline{h}\|)$. Possiamo applicare il teorema di Taylor con resto di Lagrange per funzioni di un variabile per cui $\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\tilde{\lambda})t^{m+1}$, $0<\tilde{\lambda}<t$ oppure $t<\tilde{\lambda}<0$. Se $t=\|\underline{h}\|$, si ottiene (guardiamo solo

(2.5) Si noti che tale espressione è uguale alla formula $d^k f(\underline{x}) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} f_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$, successiva alla (7.29) del libro [BD1] l'ultima derivata)

$$\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_n=0\\ \sum_{j=1}^n i_j=m+1}}^{m+1}\frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\Big(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\Big)^{i_1}\cdots\Big(\frac{h_n}{\|\underline{h}\|}\Big)^{i_n}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^k f(\underline{x}+\tilde\lambda\underline{v})}{(\partial x_1)^{i_i}(\partial x_2)^{i_2}\dots(\partial x_n)^{i_n}}(\|\underline{h}\|)^{m+1}=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_n=0\\ \sum_{j=1}^n i_j=m+1}}^{m+1}\frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!}\Big(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\Big)^{i_1}\cdots\Big(\frac{h_n}{\|\underline{h}\|}\Big)^{i_n}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^k f(\underline{x}+\lambda\|\underline{h}\|\underline{v})}{(\partial x_1)^{i_i}(\partial x_2)^{i_2}\dots(\partial x_n)^{i_n}}(\|\underline{h}\|)^{m+1}=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots i_n=0\\ \sum_{j=1}^n i_j=m+1}}^{m+1}\frac{(m+1)!}{i_1!i_2!\dots i_n!}h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}\frac{\partial^k f(\underline{x}+\lambda\|\underline{h}\|\underline{v})}{(\partial x_1)^{i_i}(\partial x_2)^{i_2}\dots(\partial x_n)^{i_n}}=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(\underline{x}+\lambda\underline{h}).\qquad\blacksquare$$

Notare che, ad esempio, da $0<\tilde\lambda<t\le\|\underline{h}\|$, scrivendo $\tilde\lambda=\lambda\|\underline{h}\|$, ne segue $0<\lambda<1$.

**Esempi** Si voglia sapere il polinomio di Taylor di ordine $\le 6$ nel punto $(0,0)$ della funzione $\cos(x_1x_2^2)$. Poiché $x_1x_2^2\to 0$ per $\underline{x}\to\underline{0}$ usiamo le formule del coseno: $\cos(x_1x_2^2)=1-\frac{1}{2}x_1^2x_2^4+\frac{1}{24}x_1^4x_2^8+o(x_1^5x_2^{10})$ Se dimostriamo che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}}\frac{x_1^4x_2^8}{(x_1^2+x_2^2)^3}=0$ il polinomio che cerchiamo è $1-\frac{1}{2}x_1^2x_2^4$. Ma $\frac{x_1^4x_2^8}{(x_1^2+x_2^2)^3}\le x_1^4x_2^2$ e quindi tende a zero. Si tenga presente che ciò che nel Teorema è $\underline{x}$, nell'esercizio è $\underline{0}$ e ciò che nel teorema è $d\underline{x}$, nell'esercizio è $(x_1,x_2)$. Senza l'unicità avremmo dovuto eseguire le derivate della funzione fino all'ordine 6.

**Esempi** Si vuole calcolare il polinomio di Taylor di ordine 1 della funzione $f(x,y)=\ln(1+x(1+y))$ centrato in $x=0$ e $y=1$. Poiché $x(1+y)=0$ per $x=0$, possiamo usare $\ln(1+z)=z+O(z^2)$ da cui $\ln(1+x(1+y))=x(1+y)+O(x^2(1+y)^2)$ e quindi il polinomio è $P(x)=x$. Se invece vogliamo il polinomio fino all'ordine 2, dobbiamo fare $\ln(1+x(1+y))=x(1+y)-\frac12x^2(1+y)^2+O(x^3(1+y)^3)$. Riscriviamo $x(1+y)-\frac12x^2(1+y)^2$ come $x+x(y-1)+x-\frac12x^2((y-1)+2)^2=2x+x(y-1)-\frac12x^2(4)-\frac12x^2\Big(2(y-1)+(y-1)^2\Big)$

e $-\frac{1}{2}x^2\Big(2(y-1)+(y-1)^2\Big)$ ha ordine 3 per cui il polinomio di ordine 2 è $P(x,y) = 2x + x(y-1) - 2x^2$

**Lezione del 13/10/2014**

Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $(0,0)$ di ordine minore o uguale a 6 della funzione $\cos xy^2$.

Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $(0,0)$ di ordine minore o uguale a 10 della funzione $e^{xy^3}$.

Calcolare il polinomio di Taylor centrato in $(1,0)$ di ordine minore o uguale a 10 della funzione $e^{xy^3}$.

Trovare i punti critici e discuterne la natura delle funzioni definite su tutto il piano $x^2 + y^2 - xy$, $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $x^4 - y^2$.

**Lezione del 14/10/2014**

definizione di serie, definizione del carattere di una serie, condizione necessaria $a_k \to 0$, divergenza della serie $\sum 1/k$ dimostrata con l'integrale di $1/x$, convergenza della serie $\sum 1/k^p$, $p \geq 1$ mediante l'integrale. Definizione del carattere della serie $\sum a^k$ in funzione della base $a$.

Teoremi del confronto: 1) $0 \leq a_k \leq c_k$ e $\sum c_k$ convergente, implica $\sum a_k$ convergente, 2) $0 \leq d_k \leq a_k$ e $\sum d_k$ divergente, implica $\sum a_k$ divergente.

Sia $a_k \geq 0$. Se $\lim\limits_{k\to\infty} k^p a_k = l \neq +\infty$ per $p > 1$, allora $\sum a_k$ converge.

Sia $a_k \geq 0$. Se $\lim\limits_{k\to\infty} k^p a_k = l \neq 0$ per $p \leq 1$, allora $\sum a_k$ diverge.

Criterio di D'Alembert o del rapporto, criterio della radice.

Convergenza della serie $\displaystyle\sum \frac{\sin^2}{n^2}$ convergenza della serie $\displaystyle\sum \ln\frac{1+n^2}{2+n^2}$ convergenza o divergenza della serie $\displaystyle\sum \frac{n}{(\ln(1+e^{3n}))^\alpha}$ in funzione di $\alpha$

Divergenza della serie $\sum 1/(k\ln k)$ mediate l'uso degli integrali

**Lezione del 16/10/2014**

- *Criterio di condensazione di Cauchy* con dimostrazione: Sia $a_k \searrow 0$. $\sum a_k$ converge se e solo se converge $\sum 2^k a_{2^k}$.

*Dimostrazione* Basta osservare che

$$2a_2+\sum_{p=1}^{+\infty}2^p a_{2^{p+1}}=2a_2+\sum_{k=2}^{+\infty}2^{k-1}a_{2^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k\le a_1+\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$$

ed invocare il teorema sulla convergenza delle successioni monotone limitate.

Applicazione alla serie $\sum 1/(k\ln^a k)$ in funzione di $a$.

• Dimostrazione che, definita la quantità $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k \doteq R_N$, se una serie converge allora $\displaystyle\lim_{N\to\infty}R_N=0$.

• Definizione di serie *assolutamente convergente* . Dimostrazione che se una serie converge assolutamente, allora converge semplicemente. Applicazione alla serie $\sum(\sin k)/k^a$ al variare di $a$.

• Serie di Leibnitz con dimostrazione.

Esercizi svolti in aula. Discutere la convergenza delle serie: $\displaystyle\sum\frac{n}{(\ln(e^{3n}+(e^n)^2)}$, $\displaystyle\sum\frac{k!}{k^k}$, $\displaystyle\sum\frac{e^k k!}{k^k}$, $\displaystyle\sum\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$, $\displaystyle\sum\frac{(-1)^k}{2k+3(-1)^k}$ che non è una serie di Leibnitz in quanto $\displaystyle\frac{1}{2k+3(-1)^k}$ tende a zero in modo non monotono.

♠ Si studi la convergenza della serie $\sum(-1)^k/(3k+k((-1)^k-1))$,

♠ Si studi la convergenza delle serie $\sum 1/(k(k+1))$, e $\sum 1/((5k-1)(5k+4))$, (scomporre in fratti semplici, scrivere la ridotta parziale $s_n$ e......)

♠ Si calcoli $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty}a^k$ con $|a|<1$ e poi $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty}ka^k$ e poi $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty}k^2a^k$. [Suggerimento: nel primo caso scrivere $a^m+a^{m+1}+a^{m+2}+\ldots=a^m(1+a^1+a^2+a^3+\ldots)$. Nel secondo caso scrivere $(k+1)a^k$ al posto di $ka^k$ e procedere. Analogamente nel terzo.]

♠ Sia $a_k>0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum\frac{a_k}{S_k}$ dove $S_k=a_1+\ldots+a_k$. ["Usare Cauchy"]

♠ Discutere la convergenza delle serie seguenti (per alcuni esercizi, non tutti quelli dove è presente $n!$, è utile sapere che $n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{2n+1}}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{5/2}\big(1-\cos\frac{1}{n}\big)^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-2n^{1/2}+1},\ \sum_{n=1}^{\infty}\big(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\big)^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-2n^{1/2}+5n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)^4,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}-3n},\ \sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n+n^3},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-2/3}+n^{3/2}},$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{1}{n+n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-n^{1/2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{1/n}-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}-3n^{5/2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n!}}$,
$\sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{-1/n}2^n\sqrt{2n+1}$, $\sum\frac{(\cos(n\pi))^n}{\sqrt{n}}$, $\sum\frac{1}{(n!)^a}$

♠ Al variare di $p$ si studi la convergenza delle serie $\sum\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-\frac{1}{e}\right)^p$, $\sum\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}-\frac{1}{e}\right)^p$, $\sum\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}-e\right)^p$

♠ Si studi la convergenza delle serie al variare dei parametri
$\sum n^{-a-\frac{b}{n}}$, $\sum\frac{n^q}{(n+1)^{p+q}}$, $\sum(\ln n)^{-n}$,

♠ Si studi la convergenza delle serie $\sum(\ln n)^{-\ln n}$, $\sum(\ln(\ln n))^{-\ln n}$; $\sum\frac{n^n}{e^n n!}$ $\sum\frac{n^n}{e^n(n+1)!}$, $\sum\frac{n^{n-1}}{e^n n!}$, $\sum(\ln n)^{-\ln(\ln n)}$, $\sum n^{-1}(\ln n)^{-1-(\ln n)^{-1}}$

Si studi la convergenza delle serie al variare di $a,b,c$ $\sum\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}\right)\right)$

♠ Dimostrare oppure confutare con un esempio: se $\lim_{n\to\infty}f(n)=0$ allora la serie $\sum n^{-1-f(n)}$ diverge.

♠ Dire se convergono le serie $\sum\frac{1}{\ln n!}$, $\sum\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$ e $\sum(-)^n\left(1-\frac{1}{8}\frac{\ln n}{(-)^n n^{3/4}}\right)^{(-)^n n^{3/4}}$

♠ Al variare di $m$ intero relativo, dire se converge la serie $\sum_n\binom{m}{n}$

♠ Sia $a_n\searrow 0$ e $\sum a_n$ convergente. Ne segue $\lim_{n\to+\infty}na_n=0$ (usare Cauchy"). Utilizzare tale risultato per dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-1-\frac{1}{n}}$ diverge

♠ Sia $0<n_1<n_2<n_3<\ldots$ una successione crescente di interi. Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k}=+\infty$ [http://www.math.purdue.edu/pow/fall2013/pdf/solution12.pdf]

**Lezione del 20/10/2014**

**Teorema** *Siano $a_k,b_k>0$ definitivamente. Se accade che $\frac{a_{k+1}}{a_k}\le\frac{b_{k+1}}{b_k}$, allora se $\sum b_k$ converge, converge pure $\sum a_k$ e se $\sum a_k$ diverge, diverge pure $\sum b_k$.*

*Dimostrazione* Sia $a_k,b_k>0$ per ogni $k\ge k_0$. Abbiamo

$$\frac{a_{k+1}}{a_{k_0}}=\frac{a_{k+1}}{a_k}\frac{a_k}{a_{k-1}}\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\cdots\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}}\le\frac{b_{k+1}}{b_k}\frac{b_k}{b_{k-1}}\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}\cdots\frac{b_{k_0+1}}{b_{k_0}}=\frac{b_{k+1}}{b_{k_0}}$$

Ciò implica

$$a_{k+1} \leq \frac{a_{k_0}}{b_{k_0}} b_{k+1}$$

e la conclusione è ovvia.

**Corollario** *Sia $a_k > 0$ definitivamente. Suppponiamo che $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \dfrac{p}{k}E(k)$ con $E(k) \to 1$. Se $p > 1$ la serie $\sum a_k$ converge. Se $p < 1$ la stessa serie diverge.*

*Dimostrazione* Sia $v_k = k^{-a}$. $\dfrac{v_{k+1}}{v_k} = (1 + \dfrac{1}{k})^{-a} = 1 - \dfrac{a}{k} + O(\dfrac{1}{k^2}) = 1 - \dfrac{a}{k}\left(1 + O(\dfrac{1}{k})\right) = 1 - \dfrac{a}{k}E(k)$. Sia ora $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \dfrac{p}{k}E(k)$ con $p > 1$. Certamente

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{p}{k}E(k) \leq 1 - \frac{a}{k}E(k)$$

per un opportuno $1 < a < p$ da cui la convergenza della serie $\sum a_k$. D'altra parte se $p < 1$, posso selezionare un $p < a < 1$ da cui

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{p}{k}E(k) \geq 1 - \frac{a}{k}E(k)$$

e siccome $\sum v_k$ diverge, diverge pure $\sum a_k$.

• Applichiamo alla serie $\sum a_n = \sum \dfrac{n^n}{e^n n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{k})^{-k} = \frac{1}{e}e^{-k\ln(1+\frac{1}{k})} = \frac{1}{e}e^{-k(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+O(\frac{1}{k^3}))} = e^{-\frac{1}{2k}+O(k^{-2})} = 1-\frac{1}{2k}+O(\frac{1}{k^2})$$

per cui la serie diverge.

• Applichiamo ora a $\sum a_n = \sum \dfrac{n^n}{e^n(n+1)!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1}{e(n+2)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\frac{1}{e}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}\frac{1}{e}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} =$$

$$= e^{(n+1)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3}))}\frac{1}{e}\left(1 - \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = +e \cdot e^{\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})}\frac{1}{e}\left(1 - \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right)\left(1 - \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = 1 - \frac{3}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

per cui la serie converge.

• Applichiamo di nuovo stavolta alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{a}{k}})$ con $a\in\mathbf{R}$. $a_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{a}{k}})$

Troviamo per quali valori di $a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{a}{k}})=0$. È come dire

$$\left|\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{a}{k}})\right|=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}|(2-e^{\frac{a}{k}})|=0.$$

Equivale a dire

$$\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}|(2-e^{\frac{a}{k}})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln|(2-e^{\frac{a}{k}})|=-\infty$$

A seconda del valore di $a$, un certo numero di termini potrebbero avere argomento negativo ma definitivamente $2-e^{a/k}>0$ per cui ci basta dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=k_0}^{n}\ln(2-e^{\frac{a}{k}})=-\infty\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{k=k_0}^{\infty}\ln(2-e^{\frac{a}{k}})=-\infty\tag{1}$$

Ora

$$\ln(2-e^{\frac{a}{k}})=\ln(1+1-e^{\frac{a}{k}})=(1-e^{\frac{a}{k}})-\frac{1}{2}(1-e^{\frac{a}{k}})^2+O((1-e^{\frac{a}{k}})^3)=$$
$$\left(1-1-\frac{a}{k}+O(\frac{1}{k^2})\right)-\frac{1}{2}(1-e^{\frac{a}{k}})^2+O((1-e^{\frac{a}{k}})^3)=-\frac{a}{k}+O(k^{-2})$$

da cui la (1) se $a>0$. Dunque $a_n\to 0$ se e solo se $a>0$. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(2-e^{\frac{a}{k}})}{\prod_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{a}{k}})}=2-e^{\frac{a}{n+1}}=2-1-\frac{a}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})$$

per cui la serie converge se $a>1$ e diverge se $0<a\leq 1$. Se $a<0$ la serie non converge.

• Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{q_k}}{\sqrt{k}}$ dove $\{q_k\}=(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,\ldots)$.

Non è una serie di Leibnitz non essendo a segni alternati.

Scrivere quattro termini consecutivi e verificare che, detto $a_k$ il primo di essi, si ha $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}\sim k^{-3/2}$. "Cauchy" completa la dimostrazione.

• Studiare la convergenza di $\sum a_k\sin k$ dove $a_k\searrow 0$. Non è una serie a termini positivi né di Leibnitz e pure "Cauchy" sembra non funzionare. Bisogna usare il criterio di Abel.

**Criterio di Abel** *Sia* $|\sum^n b_k| \doteq B_n \leq M$ *per ogni* $n$*. Allora se* $a_k \searrow 0$*, la serie* $\sum b_k a_k$ *converge.*

$$\sum_{k=m}^n b_k a_k = \sum_{k=m}^n (B_k - B_{k-1})a_k = \sum_{k=m}^n (B_k a_k - B_{k-1}a_{k-1}) + \sum_{k=m}^n B_{k-1}(a_{k-1} - a_k) =$$

$$= B_n a_n - B_{m-1}a_{m-1} + \sum_{k=m}^n B_{k-1}(a_{k-1} - a_k) =$$

Inoltre

$$|\sum_{k=m}^n B_{k-1}(a_{k-1} - a_k)| \leq \max_{m-1\leq k\leq n} |B_k| \sum_{k=m}^n a_{k-1} - a_k \leq M(a_{m-1} - a_n)$$

Ne segue che

$$|\sum_{k=m}^n b_k a_k| \leq |B_n| a_n + |B_{m-1}| a_{m-1} + M(a_n + a_{m-1}) \leq 2M(a_n + a_{m-1}) < \varepsilon$$

non appena $m$ e $n$ sono grandi abbastanza. La conclusione è che $\sum a_k \sin k$ converge.

È rimasto da dimostrare che $|\sum_{k=1}^n \sin k| \leq M$ per ogni $n$ e per un qualche $M$.

Partiamo da $\cos kx + i \sin kx = (\cos x + i \sin x)^k \doteq z^k$ e scriviamo $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ da cui $|\sum_{k=0}^n z^k| \leq \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$ e $|1 - z| = \sqrt{2 - 2\cos x}$ Siccome $\sin kx = (z^k - \overline{z}^k)/(2i)$ e siccome $|\overline{z}^{n+1}| = |z^{n+1}|$ si ha

$$|\sum_{k=1}^n \sin k| \leq \frac{2}{\sqrt{2 - 2\cos 1}}$$

**Lezione del 21/10/2014**

Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum \frac{a_k}{S_k}$ dove $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. **Abel–Dini**

Supponiamo che $\sum a_k$ converga ossia esiste $S$ (positivo chiaramente) tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon$ tale che $n > n_\varepsilon$ implica $S - \varepsilon < \sum^n a_k < S + \varepsilon$. Scegliamo $\varepsilon = S/2$ Ne segue che $\dfrac{a_k}{S_k} < \dfrac{a_k}{S-\varepsilon} = \dfrac{2a_k}{S}$ per ogni $k > n_\varepsilon$. Per il criterio del confronto (14/10/2014) la serie $\sum a_k/S_k$ converge. Supponiamo ora che la serie $\sum a_k$ diverga. Data la monotonìa di $a_k$, la serie $\sum a_k$ o diverge o converge ma non può essere indeterminata. Sempre dalla monotonìa, sappiamo che $S_{k+1} > S_k$. Vogliamo dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum^{n} a_k/S_k = +\infty$. Dal criterio di Cauchy dobbiamo far vedere che

$$\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall\ k\ \exists\ m, n > k : \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{S_k} > \varepsilon$$

Ora

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{S_k} \underbrace{\geq}_{S_{k+1}>S_k} \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{S_n} = \sum_{k=m}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_n} = \frac{1}{S_n}\sum_{k=m}^{n}(S_k - S_{k-1}) = \frac{S_n - S_{m-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{m-1}}{S_n}$$

Siccome $S_n \to +\infty$, dato un qualsiasi $m-1$, posso trovare un $n$ così grande che $S_{m-1}/S_n < 1/2$ da cui

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}$$

da cui la divergenza della serie.

• Data la curva $x(t) \doteq \varphi_1(t) = (1+\cos t)\cos t$, $y(t) \doteq \varphi_2(t) = (1+\cos t)\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. La curva è chiaramente chiusa. Vediamo la semplicità .

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t') \iff \cos t - \cos t' = (\cos t' - \cos t)(\cos t + \cos t')$$

Abbiamo due possibilità . La prima: $\cos t = \cos t'$ da cui $t' = 2\pi - t$. La seconda: se $\cos t - \cos t' \neq 0$, otteniamo $-1 = \cos t + \cos t'$.

Nel primo caso abbiamo

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t') \iff (1+\cos t)\sin t = (1+\cos t)(-\sin t) \iff (1+\cos t)\sin t = 0$$

quindi $t = \pi$ oppure $t = 0$ oppure $t = 2\pi$. $t = \pi$ ci dà $t' = \pi$ e quindi non viola la condizione di semplicità . $t = 0$ ci dà $t' = 2\pi$ e $t = 2\pi$ ci dà $t' = 0$ per cui complessivamente dal primo caso non emergono argomenti per dire che la curva non è semplice.

Secondo caso.

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t') \iff (1+\cos t)\sin t = (1+\cos t')\sin t' \iff -\cos t'\sin t = -\cos t \sin t'$$

se $\cos t \neq 0$ e $\cos t' \neq 0$, otteniamo $\tan t' = \tan t$ ossia $t' = \pi + t$. A questo punto dobbiamo vedere se esistono dei valori $t$ e $\pi + t$ per cui $\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}(\pi + t)$.

$$(1+\cos t)\cos t = (1+\cos t')\cos t' \iff (1+\cos t)\cos t = -(1-\cos t)\cos t$$

Essendo per ipotesi $\cos t \neq 0$ ne risulta la relazione assurda $1 = -1$.

Da ultimo è rimasto supporre nell'equazione $-\cos t' \sin t = -\cos t \sin t'$ che $\cos t = 0$ e/o $\cos t' = 0$. Se $\cos t = 0$ abbiamo $t = \pi/2$ oppure $t = 3\pi/2$. Da $-1 = \cos t + \cos t'$ si ha $\cos t' = -1$ e quindi è impossibile risolvere $-\cos t' \sin t = -\cos t \sin t'$ in quanto a destra avrei zero ma a sinistra $-1 \cdot 1$ se $t = \pi/2$ mentre $-1 \cdot (-1)$ se $t = 3\pi/2$.

Se $\cos t' = 0$ allora $t' = \pi/2$ oppure $t' = 3\pi/2$ e si procede allo stesso modo. Finalmente la conclusione è la semplicità della curva.

**Lezione del 23/10/2014**

Esercizio indirettamente suggerito da uno studente e riferibile a Callegari. Dimostrare che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{x^5y^2}{x^6+y^8} = 0$.

$$x^6 + y^8 = \underbrace{\frac{x^6}{p} + \ldots + \frac{x^6}{p}}_{p-\text{volte}} + \underbrace{\frac{y^8}{q} + \ldots + \frac{y^8}{q}}_{q-\text{volte}} \geq (p+q)\sqrt[p+q]{\frac{x^{6p}}{p^p}\frac{y^{8q}}{q^q}} \tag{1}$$

(tale formula può essere utile anche in altri esercizi della stessa fatta) e vogliamo che $\dfrac{6p}{p+q} \leq 5$, $\dfrac{8q}{p+q} < 2$ oppure $\dfrac{6p}{p+q} < 5$, $\dfrac{8q}{p+q} \leq 2$ oppure $\dfrac{6p}{p+q} < 5$, $\dfrac{8q}{p+q} < 2$.

$p = 4$ e $q = 1$ vanno bene per cui

$$x^6 + y^8 \geq \frac{5}{(256)^{1/5}}|x|^{\frac{24}{5}}y^{\frac{8}{5}} \implies 0 < \frac{|x|^5y^2}{x^6+y^8} < \frac{5}{(256)^{1/5}}|x|^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{5}}$$

da cui il risultato.

Come **non** si usano le coordinate polari.

Passando a coordinate polari si scrive $\dfrac{\rho\cos^5 t\sin^2 t}{\cos^6 t + \rho^2\sin^2 t}$. A questo punto, senza nessuna giustificazione se non quella, sbagliata, per cui $\rho^2\sin^2 t$ sarebbe trascurabile rispetto a $\cos^6 t$ per $\rho \to 0$, si passa a $\dfrac{\rho\cos^5 t\sin^2 t}{\cos^6 t}$ e poi senza pensarci su, si dice che siccome $\rho \to 0$, il limite vale zero. L'errore sta nel ritenere $\rho^2\sin^2 t$ trascurabile rispetto a $\cos^6 t$

ed infatti, qualunque sia $\rho$, si può sempre trovare un valore di $t$ vicino a $\pi/2$ per cui è $\cos^6 t$ ad essere trascurabile rispetto a $\rho^2 \sin^2 t$. Inoltre, quandanche si arrivasse ignari a $\dfrac{\rho\cos^5 t \sin^2 t}{\cos^6 t}$, ci si dovrebbe porre il problema che per $t = \pi/2$ la precedente frazione non ha senso e se anche si scrivesse per $t \neq \pi/2$, $\dfrac{\rho\cos^5 t\sin^2 t}{\cos^6 t} = \dfrac{\rho \sin^2 t}{\cos t}$, come prima, per ogni $\rho$ esiste un valore di $t$ vicino a $\pi/2$ che rende la frazione grande, non piccola.

• Calcolo della lunghezza della curva: $\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, at^2)$, $-b \le t \le b$.

• Calcolo della coordinata $x$ del baricentro geometrico della curva $\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, at^2)$, $0 \le t \le b$.

♠ Si calcoli la massa di un filo disposto lungo il grafico della funzione $f\colon [-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{b}] \to \mathbf{R}$, $f(x) = b^{-1}\sin(bx)$ ed avente densità $\delta(x,y) = \delta_o\sqrt{1-b^2y^2}$

**Lezione del 27/10/2014**

• Calcolare $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = ydx + 2xdy$ e $\underline{\gamma} = (t,t)$, $0 \le t \le 1$,

• $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = ydx + 2xdy$ e $\underline{\gamma} = (t,t^2)$, $0 \le t \le 1$,

• $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = ydx + xdy$ e $\underline{\gamma} = (t,t)$, $0 \le t \le 1$,

• $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = ydx + xdy$ e $\underline{\gamma} = (t,t^2)$, $0 \le t \le 1$.

**Lezione del 28/10/2014**

Dimostrazione del

**Teorema 28–10.1** *Sia data* $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ *con* $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in C^1(\mathcal{R})$ *dove* $\mathcal{R}$ *è un parallelepipedo aperto in* $\mathbb{R}^3$. *Se la forma è chiusa è esatta.*

*Dimostrazione* Siano $\underline{x}_0$ e $\underline{x}$ due punti di $\mathcal{R}$ e consideriamo le tre curve: 1) $\underline{\varphi}(t) = (t, x_0, y_0)$, $x_0 \le t \le x$, 2) $\underline{\gamma}(t) = (x, t, y_0)$, $y_0 \le t \le y$, 3) $\underline{\psi}(t) = (x, y, t)$, $z_0 \le t \le z$. Definiamo la funzione di $\underline{x}$

$$f(\underline{x}) \doteq \int_{\underline{\varphi}\cup\underline{\gamma}\cup\underline{\psi}} \omega = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} c(x, y, t) \qquad (28/10.1)$$

Ora dobbiamo dimostrare che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \underline{a} = (a, b, c)$. Chiaramente $\underline{x}$ può essere scelto ovunque in $\mathcal{R}$ per cui il dominio di $f$ è tutto $\mathcal{R}$.

$$
\begin{aligned}
f_x &= a(x,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{y} b_x(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^{z} c_x(x,y,t) = \text{ (chiusura) } = \\
&= a(x,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{y} a_y(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^{z} a_z(x,y,t) = \\
&= a(x,y_0,z_0)+a(x,y,z_0)-a(x,y_0,z_0)+a(x,y,z)-a(x,y,z_0)=a(x,y,z)
\end{aligned}
$$

e analogamente per le altre due derivate.$\blacksquare$

Si poteva procedere pure ne seguente modo. Integriamo la equazione differenziale $f_x = a(\underline{x})$ ed otteniamo

$$
f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} a(t,y,z)dt + g(y,z)
$$

La relazione $f_y = b(\underline{x})$ diventa

$$
\int_{x_0}^{x} a_y(t,y,z)dt + g_y(y,z) = \text{(chiusura)} \int_{x_0}^{x} b_x(t,y,z)dt + g_y(y,z) = b(x,y,z)
$$

da cui

$$
b(x,y,z)-b(x_0,y,z)+g_y = b(x,y,z) \iff g_y = b(x_0,y,z) \iff g(y,z) = \int_{y_0}^{y} b(x_0,t,z)dt + h(z)
$$

e quindi

$$
f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} a(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} b(x_0,t,z)dt + h(z)
$$

L'ultima condizione è

$$
f_z = c(x,y,z) \iff \int_{x_0}^{x} a_z(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} b_z(x_0,t,z)dt + h'(z) = c(x,y,z)
$$

Dalla chiusura si ha

$$
\int_{x_0}^{x} c_x(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} c_y(x_0,t,z)dt + h'(z) = c(x,y,z)
$$

ossia

$$
c(x,y,z) - c(x_0,y,z) + c(x_0,y,z) - c(x_0,y_0,z) + h' = c(x,y,z) \iff h' = c(x_0,y_0,z)
$$

da cui $h(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} c(x_0, y_0, t)dt$. Finalmente

$$f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} a(t, y, z)dt + \int_{y_0}^{y} b(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} c(x_0, y_0, t)dt$$

♠ Dimostrare che

$$f(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} a(t, y, z)dt + \int_{y_0}^{y} b(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} c(x_0, y_0, t)dt$$

e la (28/10.1)

$$f(\underline{x}) \doteq \int_{x_0}^{x} a(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} c(x, y, t)$$

sono uguali a meno di una costante

• Nozione di omotopia. Siano date due curve in $\mathbb{R}^3$, $\underline{\varphi}_1(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ e $\underline{\varphi}_2(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ tali che $\underline{\varphi}_1(t_0) = \underline{\varphi}_2(t_0) \doteq \underline{x}_0$ e $\underline{\varphi}_1(t_1) = \underline{\varphi}_2(t_1) \doteq \underline{x}_1$.

*Definizione Le due curve sono dette omotope se esiste una funzione continua* $\underline{g}\colon [t_0, t_1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\underline{g}(t, 0) = \underline{\varphi}_1(t)$ *e* $\underline{g}(t, 1) = \underline{\varphi}_2(t)$. *Inoltre* $\underline{g}(t_0, \lambda) = \underline{x}_0$ *e* $\underline{g}(t_1, \lambda) = \underline{x}_1$ *per ogni* $\lambda \in [0, 1]$.

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ è detto *semplicemente connesso* se, date due curve qualsiasi aventi gli stessi estremi, esse sono omotope. Un esempio è $\underline{g}(t, \lambda) = \lambda\underline{\varphi}_2(t) + (1 - \lambda)\underline{\varphi}_1(t)$. Un disegno aiuta a capire.

**Teorema 28–10.2** *Sia data* $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ *con* $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in C^1(A)$ *dove* $A$ *è un aperto semplicemente connesso. Supponiamo che l'omotopia* $\underline{g}$ *sia* $C^1([t_0, t_1] \times [0, 1])$ *ed abbia le derivate seconde miste continue. Se la forma è chiusa è esatta.*

*Dimostrazione* Scriviamo $\displaystyle\int_{\underline{g}(t,\lambda)} \omega \doteq I(\lambda)$. Per definizione $I(0) = \displaystyle\int_{\underline{g}(t,0)} \omega = \int_{\underline{\varphi}_1} \omega$ e $I(1) = \displaystyle\int_{\underline{g}(t,1)} \omega = \int_{\underline{\varphi}_2} \omega$. Se facciamo vedere che $I'(\lambda) \equiv 0$, allora $I(0) = I(1)$ e quindi scatta la condizione equivalente a che una forma sia esatta ossia l'integrale curvilineo fra due estremi non dipende dalla curva che connette i due estremi. Dunque (indichiamo con $\underline{g} = (g^1, g^2, g^3)$.

$$I(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \left(a(\underline{g})g^1_t + b(\underline{g})g^2_t + c(\underline{g})g^3_t\right) dt$$

e quindi

$$I'(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \Big( a(\underline{g}) g^1_{\lambda,t} + b(\underline{g}) g^2_{\lambda,t} + c(\underline{g}) g^3_{\lambda,t} +$$

$$+ (a_x g^1_\lambda + a_y g^2_\lambda + a_z g^3 \lambda) g^1_t + (b_x g^1_\lambda + b_y g^2_\lambda + b_z g^3 \lambda) g^2_t + (c_x g^1_\lambda + c_y g^2_\lambda + c_z g^3 \lambda) g^3_t \Big) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big( a(\underline{g}) g^1_{t,\lambda} + b(\underline{g}) g^2_{t,\lambda} + c(\underline{g}) g^3_{t,\lambda} +$$

$$+ (a_x g^1_t + b_x g^2_t + c_x g^3_t) g^1_\lambda + (a_y g^1_t + b_y g^2_t + c_y g^3_t) g^2_\lambda + (a_z g^1_t + b_z g^2_t + c_z g^3_t) g^3_\lambda \Big) dt = (chiusura)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big( a(\underline{g}) g^1_{t,\lambda} + b(\underline{g}) g^2_{t,\lambda} + c(\underline{g}) g^3_{t,\lambda} +$$

$$+ (a_x g^1_t + a_y g^2_t + a_z g^3_t) g^1_\lambda + (b_x g^1_t + b_y g^2_t + b_z g^3_t) g^2_\lambda + (c_x g^1_t + c_y g^2_t + c_z g^3_t) g^3_\lambda \Big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big( a(\underline{g}) g^1_{\lambda,t} + b(\underline{g}) g^2_{\lambda,t} + c(\underline{g}) g^3_{\lambda,t} + g^1_\lambda \frac{d}{dt} a + g^2_\lambda \frac{d}{dt} b + g^3_\lambda \frac{d}{dt} c \Big) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big( a(\underline{g}) g^1_{\lambda,t} + b(\underline{g}) g^2_{\lambda,t} + c(\underline{g}) g^3_{\lambda,t} + \frac{d}{dt}(a g^1_\lambda) - a g^1_{t,\lambda} + \frac{d}{dt}(b g^2_\lambda) - b g^2_{t,\lambda} + \frac{d}{dt}(c g^3_\lambda) - c g^3_{t,\lambda} \Big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big( \frac{d}{dt}(a g^1_\lambda) + \frac{d}{dt}(b g^2_\lambda) + \frac{d}{dt}(c g^3_\lambda) \Big) dt =$$

$$= a(\underline{x}_1) g^1_\lambda(t_1,\lambda) + b(\underline{x}_1) g^2_\lambda(t_1,\lambda) + c(\underline{x}_1) g^3_\lambda(t_1,\lambda) - a(\underline{x}_0) g^1_\lambda(t_0,\lambda) - b(\underline{x}_0) g^2_\lambda(t_0,\lambda) - c(\underline{x}_0) g^3_\lambda(t_0,\lambda)$$

Siccome $\underline{g}(t_1,\lambda) \equiv \underline{x}_1$ per ogni $\lambda \in [0,1]$, ne segue che $g^1_\lambda(t_1,\lambda) = g^2_\lambda(t_1,\lambda) = g^3_\lambda(t_1,\lambda) \equiv 0$ ed analogamente per $t_0$ da cui $I'(\lambda) = 0$.■

**Lezione del 30/10/2014**

In aula è sorto ad un certo punto un dubbio circa i domini di definizione delle seguenti funzioni. Il resto dela lezione verrà postato lunedì prossimo.

Sia data la funzione con dominio $\mathbb{R}^2 \backslash \{y = 0\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} -\arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \dfrac{|x|}{x} & y = 0^+, \\ \dfrac{\pi}{2} \dfrac{|x|}{x} & y = 0^-, \end{cases}$$

D'altra parte è noto che

$$-\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2} \frac{|x|}{x} \frac{|y|}{y},$$

e $y \neq 0$, $x \neq 0$ data la presenza di $|y|/y$ e $|x|/x$. Notiamo che

$$\lim_{y\to 0^+} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = -\frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}, \qquad \lim_{y\to 0^-} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}$$

Se $y > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Se $y < 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Se $y > 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Se $y < 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{|x|}{x}\frac{|y|}{y} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Ne segue che possiamo definire

$$g(x,y) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{|x|}{x}\dfrac{|y|}{y}, & y \neq 0 \\ 0 \qquad x = 0 \end{cases}$$

e quindi $g \equiv f$.

• Studio della forma differenziale $\dfrac{xdx}{x^2+y^2} + \dfrac{ydy}{x^2+y^2}$

• È data la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$. Se ne trovi il dominio e si dica quanto valgono gli integrali curvilinei $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma$, orientata in senso antiorario, è nell'ordine
$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2+y^2 = 1\}$, $\qquad \gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ (x-1)^2+(y-1)^2 = 1\}$,
$\gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon\ x^2+(y-1)^2 = 4\}$,

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e e $\underline{\varphi}$ è la curva chiusa data dall'intersezione delle superfici $z = x^2+y^2$, $z = x+y+1$ e percorsa in modo che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario.

♠ Calcolare $\oint \omega_{\underline{\varphi}}$ dove $\omega = x^2z^2dy + 2zx^2ydz$ e $\underline{\varphi}$ è la curva data dall'intersezione del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}/\sqrt{2}$ e del piano $2z = x+y+2$.

♠ Si valuti l'integrale $\displaystyle\oint_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \dfrac{ydz - zdy}{y^2+z^2} + \dfrac{zdx - xdz}{z^2+x^2} +$ e la curva $\underline{\varphi}$ è data dall'intersezione fra la sfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ e il piano $x+y+z=0$ percorsa in modo che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario.

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = (y+z+y^2)dx + (z+x)dy + (x-y+y^2)dz$ dove $\underline{\gamma}$ è la circonferenza intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ ed il piano $z=y$ e percorsa in modo che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario.

**Lezione del 3/11/2014**

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = x^2z^2dy + 2zx^2ydz$ e $\underline{\gamma}$ è la curva il cui sostegno è dato dall'intersezione delle superfici $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $2z = x+y+2$ e persorsa in modo che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario.

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x-y)dz + y^2dx + y^2dz$ e $\underline{\gamma}$ è la curva il cui sostegno è dato dall'intersezione delle superfici $x^2+y^2+z^2=1$ e $z=y$ e percorsa in modo che la sua proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario.

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = ydx - xdy$ e $\underline{\gamma}$ è la curva il cui sostegno è dalla relazione $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ e percorsa in senso antiorario.

**Lezione del 4/11/2014**

Calcolo del volume della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ usando coordinate cartesiane.

*Svolgimento* L'insieme $S$ di cui si cerca il volume è $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Se il punto $(x_0,y_0,z_0)$ appartiene a $S$, anche il punto $(x_0,y_0,-z_0)$ appartiene a $S$. Quindi il volume che cerchiamo è pari a due volte il volume dell'insieme definito da $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le \sqrt{r^2-x^2-y^2}\}$ e quindi è pari a

$$2\int\int_{x^2+y^2\le r^2} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Poi facciamo l'ulteriore osservazione che se $x_0^2+y_0^2 \le r^2$ allora $(-x_0)^2+y_0^2 \le r^2$, $x_0^2+(-y_0)^2 \le r^2$, $(-x_0)^2+(-y_0)^2 \le r^2$ ed inoltre la funzione $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ assume lo stesso valore. Quindi abbiamo

$$2\int\int_{x^2+y^2\le r^2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dx\,dy = 2\cdot 4\int\int_{x^2+y^2\le r^2,\ x,y\ge 0}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dx\,dy$$

Dalle formule di riduzione arriviamo a

$$8\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dy$$

Cambiamo variabili $y=\sqrt{r^2-x^2}\sin t$ ed otteniamo

$$8\int_0^r dx\int_0^{\pi/2}(\sqrt{r^2-x^2}\cos t)^2 dt = 8\int_0^r dx(r^2-x^2)\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Lezione del 6/11/2014**

Calcolo dell'integrale del 4/11/2014

$$2\int\int_{x^2+y^2\le r^2}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dx\,dy$$

attraverso le coordinate polari nel piano $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$.

**Lezione del 10/11/2014**

• Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int\int_{[0,1]^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ usando coordinate polari nel piano.

• Calcolo dell'integrale dell'esempio 2 pag. 230 senza usare il cambio di variabili ma tenendo le coordinate $(x,y)$.

• Calcolo del volume racchiuso dalla sfera $x^2+y^2+z^2\le r^2$ usando coordinate polari tridimensionali (formula 41.17)

• Calcolo del volume racchiuso dalla sfera $x^2+y^2+z^2\le r^2$ usando coordinate cilindriche (47.26)

♠ Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di $2\pi$ il triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ attorno alla retta $y=3x$.

**Lezione dell'11/11/2014**

• Sia dato l'insieme descritto dalla relazione $(x^2+y^2)^2\le 2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Ruotiamo di $2\pi$ tale insieme intorno all'asse $x$. Calcolare il volume del solido ottenuto.

• Calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando di $2\pi$ il triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ attorno alla retta $y=3x$.

♠ Sia dato l'insieme descritto dalla relazione $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ruotiamo di $2\pi$ tale insieme intorno all'asse $y$. Calcolare il volume del solido ottenuto.

♠ Sia dato l'insieme descritto dalla relazione $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ruotiamo di $2\pi$ tale insieme intorno alla retta $y=x$. Calcolare il volume del solido ottenuto. Suggerimento: la distanza di un punto dalla bisettrice ha una formula semplice

**Lezione dell'17/11/2014**

• Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}(x^3+x\sin y-2xy^2-y\cos x^2)(x^2+y^2)^{-1/2}ds$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva $\gamma_1(t)=\cos t$, $\gamma_2(t)=\sin t$, $-\pi/2\leq 0\leq \pi/2$

• Calcolo dell'area della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ usando coordinate cartesiane e sferiche.

**Lezione dell'18/11/2014**

• Calcolo dell'area della superficie sferica $x^2+y^2+z^2=1$ usando il Teorema di Pappo–Guldino.

• Sia data la superficie cartesiana $z=1-x^2-2y^2$, $z\geq 0$, si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x})=x\underline{i}-y\underline{j}+2(x-y)\underline{k}$ attraverso di essa. Eseguire il calcolo diretto oppure usare il teorema della divergenza (di Gauss) in modo opportuno come fatto a lezione.

Calcolo diretto. Sia dato l'insieme $D=\{(u,v)\colon\ u^2+2v^2\leq 1\}$ e la superficie $\varphi^1(u,v)=u$, $\varphi^2(u,v)=v$, $\varphi^3(u,v)=1-u^2-2v^2$. $\underline{\varphi}_u=(1,0,-2u)$, $\underline{\varphi}_v=(0,1,-4v)$, $\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v=2u\underline{i}+4v\underline{j}+\underline{k}$. Per ogni coppia $(u,v)$ tale che $u^2+2v^2\leq 1$, $\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v$ è una delle due normali alla superficie cartesiana. Verifichiamo ora che se $(u,v)$ verificano $u^2+2v^2=1$, $\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v$ è lo stesso vettore che si ottiene eseguendo $\underline{\tau}\wedge\underline{t}$ dove i vettori $\underline{\tau}$ e $\underline{t}$ sono stati definiti a lezione.

Detta $\underline{\gamma}(t)=(\cos\vartheta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta)$ si ha $\underline{\gamma}'(t)=(-\sin\vartheta,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta)=(-\gamma_2\sqrt{2},\gamma_1/\sqrt{2})$. Sia $a\doteq(2\gamma_2^2+\gamma_1^2/2)^{-1/2}$ la lunghezza del vettore $\underline{\gamma}'$.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-2u&-4v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\gamma_2\sqrt{2}\\a\gamma_1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\gamma_2\sqrt{2}\\a\gamma_1/\sqrt{2}\\2a\sqrt{2}u\gamma_2-4av\gamma_1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

ed inoltre

$$\begin{pmatrix}-a\gamma_2\sqrt{2}\\a\gamma_1/\sqrt{2}\\2a\sqrt{2}\gamma_1\gamma_2-4a\gamma_2\gamma_1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\gamma_2\sqrt{2}\\a\gamma_1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\doteq\underline{t}$$

Il vettore unitario nel piano $(u,v)$ ed ortogonale a $\gamma'$ è $(a\gamma_1/\sqrt{2}, a\gamma_2\sqrt{2})$ e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u & -4v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\gamma_1/\sqrt{2} \\ a\gamma_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma_1/\sqrt{2} \\ a\gamma_2\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2}u\gamma_1 - 4av\gamma_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma_1/\sqrt{2} \\ a\gamma_2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}a(\frac{\gamma_1^2}{2} + 2\gamma_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma_1/\sqrt{2} \\ a\gamma_2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}a^{-1} \end{pmatrix}$$

Detto $\underline{\tau}$ quest'ultimo vettore, si ha $\underline{\tau} \wedge \underline{t} = 2\gamma_1\underline{i} + 4\gamma_2\underline{j} + \underline{k}a^2(\dfrac{\gamma_1^2}{2} + 2\gamma_2^2) = 2\gamma_1\underline{i} + 4\gamma_2\underline{j} + \underline{k}$ e sulla curva $u^2+4v^2=1$ si ha $2\gamma_1\underline{i} + 4\gamma_2\underline{j} + \underline{k} = 2u\underline{i} + 4v\underline{j} + \underline{k}$ esattamente come sopra.

La normale alla superficie è quindi diretta verso l'esterno di essa. Se quindi voglio calcolare il flusso uscente devo impostare

$$\int\int_D (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma$$

dove $\underline{n}^{(e)} = \dfrac{2u}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}\underline{i} + \dfrac{4v}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}\underline{j} + \dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}\underline{k}$ per cui

$$\int\int_{u^2+2v^2\le 1} \left( u\frac{2u}{A} - v\frac{4v}{A} + 2(u-v)\frac{1}{A} \right) A du\, dv$$

$A = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+16v^2}}$. Dopo essere passati a coordinate polari adattate all'insieme $u^2+2v^2 \le 1$, , $u = \rho\cos\vartheta$, $y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\vartheta$ si ha

$$2\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\rho}{\sqrt{2}}\rho^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0$$

come deve essere.

Esiste un terzo modo di procedere che passa attraverso il Teorema di Stokes

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \int\int_D (\underline{rotG}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma$$

dove $\omega = G_1dx + G_2dy + G_3dz$. Bisogna quindi trovare quel campo vettoriale $\underline{G}$ tale che $\underline{rotG} = (2x, -2y, 2(x-y))$. Dopo avere studiato quanto segue, lo studente provi ad applicarne il contenuto al problema in questione

Supponiamo di avere un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})$ in un insieme fortemente connesso (ad esempio $\mathbb{R}^3$) e $div\underline{V}(\underline{x}) \equiv 0$. Vogliamo trovare un campo vettoriale $\underline{H}(\underline{x})$ tale che $\underline{V} = rot\underline{H}$. Sia $\underline{V}(\underline{x}) = (V_1(\underline{x}), V_2(\underline{x}), V_3(\underline{x}))$.

Se esiste $\underline{H}(\underline{x}) = (H_1, H_2, H_3)$ tale che $rot\underline{H} = \underline{V}$ allora, *per qualsiasi* funzione $r(\underline{x})$ si ha $rot(\underline{H} + \underline{\partial} r) = rot\underline{H} + rot\underline{\partial} r = rot\underline{H} = \underline{V}$. Se si sceglie $r(\underline{x})$ in modo tale che $r_x + H_1 \equiv 0$ allora si può supporre che la prima componente del vettore $\underline{H}$ sia nulla e quindi si parte prendendo $\underline{H} = (0, H_2, H_3)$.

Dobbiamo risolvere l'equazione $rot\underline{H} = ((H_3)_y - (H_2)_z, -(H_3)_x, (H_2)_x) = (V_1, V_2, V_3)$. $H_3 = -\int_{x_0}^{x} dtV_2(t, y, z) + q(y, z)$, $H_2 = \int_{x_0}^{x} dtV_3(t, y, z) + p(y, z)$.

Poi $(H_3)_y - (H_2)_z = -\int_{x_0}^{x} dt(V_2)_y(t, y, z) + q_y(y, z) - \int_{x_0}^{x} dt(V_3)_z(t, y, z) - p_z(y, z) = V_1 =$ ( essendo $div\underline{V}(\underline{x}) = 0$) $= q_y(y, z) - p_z(y, z) + \int_{x_0}^{x} dt(V_1)_x(t, y, z) = q_y(y, z) - p_z(y, z) + V_1(x, y, z) - V_1(x_0, y, z) = V_1(x, y, z)$ e quindi $q_y(y, z) - p_z(y, z) - V_1(x_0, y, z) = 0$

Prendiamo $p \equiv 0$ e otteniamo $q(y, z) = \int_{y_0}^{y} dsV_1(x_0, s, z)$. Alla fine il risultato è $H_1 \equiv 0$, $H_2(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dtV_3(t, y, z)$, $H_3(\underline{x}) = -\int_{x_0}^{x} dtV_2(t, y, z) + \int_{y_0}^{y} dsV_1(x_0, s, z)$.

Il campo $\underline{H}(\underline{x})$) trovato non è certo l'unico possibile. *Tutti gli altri differiscono dal precedente per un gradiente.*

♠ Sia data una qualsiasi curva chiusa, regolare a tratti, semplice, detta $\underline{\gamma}$, passante per i tre punti $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e la forma differenziale. $\omega = xdy + (-x + \frac{y}{2})dz$. Si calcoli $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$. Il verso di percorrenza è a piacere

• Sia data la curva $\underline{\gamma}(t)$ percorsa in senso antiorario il cui sostegno è la circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$. Calcolare $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = -\frac{1}{2}y^3dx + dy + ydz$. Il calcolo sia eseguito direttamente. Si può usare pure il Teorema di Stokes. Detto $\underline{F}(\underline{x}) = (-\frac{y^3}{2}, 1, y)$, il Teorema afferma che

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \int\int_S (\underline{rotF}, \underline{n}^{(e)})d\sigma$$

Come $S$ scegliamo $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le R, z = 0\}$. La parametrizzazione di $S$ è $x = u$, $y = v$, $z = 0$, con $u^2 + v^2 \le R^2$. Chiaramente $\underline{n}^{(e)} = (0, 0, 1)$ per cui

$$\int\int_S (\underline{rotF}, \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int\int_{u^2+v^2 \le R^2} (\underline{rotF})_3 \cdot 1du\,dv = \int\int_{u^2+v^2 \le R^2} \left(\frac{-3}{2}y^2\right)_{y=v} du\,dv$$

Passiamo a ccordinate polari $u = R\rho\cos t$, $v = R\rho\sin t$ da cui

$$-\frac{3}{2}\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} dt(\rho R^2)\rho^2 R^2\sin^2 t = -\frac{3}{8}R^4\pi$$

La normale esterna è quella che punta verso l'alto. Vediamo perché.

Sia $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t) = (-y, x)$ la tangente alla circonferenza $x^2+y^2 = R^2$ percorsa min senso antiorario. Sia $a \doteq (x^2+y^2)^{-1/2} = 1/\sqrt{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ya \\ xa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ya \\ xa \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \underline{t}$$

Il vettore normale alla curva è $(x, y)$ per cui

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xa \\ ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa \\ ya \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \underline{\tau}$$

$$\underline{\tau}\wedge\underline{t} = \underline{k}$$

Quindi delle due normali alla superficie $S$, $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, la prima è l'unica che soddisfa $\underline{k}\cdot(0,0,1) > 0$ ed è quella che entra nel teorema di Stokes.

Lo studente verifichi che se al posto di $S$ si fosse presa la superficie $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$, il risultato sarebbe stato le stesso ma il calcolo più lungo.

**Lezione del 20/11/2014**

• **Esercizio** Sia dato il volume $V = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$ avente densità di massa costante $\delta$. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume. [Esercizio preso dal file denominato "Lezioni personali" e scaricabile dal sito]

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse $z$ ossia abbia coordinate $(0,0,\zeta)$. Il potenziale generato da $V$ in $\underline{y}_0$ è $I = \int\int\int_V \frac{\delta dxdydz}{dist(\underline{x}, \underline{y}_0)}$. L'integrale diventa $\delta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\vartheta\int_0^r d\rho\frac{\rho^2\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}} = \frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(|\rho+\zeta|-|\rho-\zeta|)$. Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \leq r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è $\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho) = \frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$.
Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso.

Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece $\displaystyle\frac{2\pi\delta}{\zeta}\left(\int_0^\zeta d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho)+\int_\zeta^r(\rho+\zeta-(\rho-\zeta)\right) =$

$2\pi\delta(r^2-\frac{1}{3}\zeta^2)$ e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono.

♠ Sia dato il disco $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2 \le r^2, z=0\}$ avente densità di massa costante $\delta$. 1) Si calcolari il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dell'asse $z$ 2) Si calcoli il potenziale in un punto del bordo del disco [È il problema num.**10.8.1** del file *integrali multipli, di superficie, equazioni differenziali* ]

*Svolgimento* Per il punto 2) si può scrivere il disco come $(x-r)^2+y^2 \le r^2$ da cui, dette $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, si ha $0 \le \rho \le 2R\cos t$ e l'integrale è

$$\delta\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \int_0^{2R\cos t} \frac{\rho}{\rho} d\rho = 4\delta R$$

• Si calcoli la porzione di semisuperficie sferica $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \ge 0$, che si proietta sul piano $(x,y)$ nell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$, $b \le a$ [Esercizio num. **1.8.1** preso dal file "integrali multipli, di superficie, equazioni differenziali" e scaricabile dalla pagina del corso]

*Svolgimento* Detta $E$ l'ellisse in questione, abbiamo $E \subset \{x^2+y^2 \le a^2\}$ e l'integrale che cerchiamo è dato da $\int\int_E dx\,dy \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ che in coordinate "polari ellittiche" diventa

$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 d\rho\, ab\rho \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}$. Il 4 di fronte all'integrale è dipende dal fatto che le quattro porzioni in cui l'ellisse è divisa dagli assi cartesiani danno lo stesso contributo alla superficie della semisfera e ciò è dovuto alla parità sia rispetto ad $x$ che $y$ dell'integrando. L'integrale rispetto a $\rho$ si può eseguire ottenendo

$4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\sqrt{a^2-\rho^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}{-(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}\Big|_0^1 =$

$= 4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{a}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} - \frac{\sqrt{a^2-(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}\right]$

La sostituzione $\varphi = \arctan t$, ricordando che $\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, trasforma gli integrali in $4a^2b\int_0^\infty dt\left[\frac{a}{a^2+b^2t^2} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2t^2}\right]$.

Il primo integrale diventa $4a^3b\frac{1}{ab}\arctan\frac{bt}{a}\Big|_0^\infty = 2\pi a^2$. Nel secondo integrale bisogna eseguire l'ulteriore sostituzione $\sqrt{1+t^2} = z$ avendone

$-4a^2b\sqrt{a^2-b^2}\int_1^\infty \frac{dz}{a^2-b^2+b^2z^2} = -4a^2b\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{bz}{\sqrt{a^2-b^2}}\Big|_1^\infty = -4a^2(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}) =$

$-4a^2\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

È opportuno notare che se non si fosse scritto l'integrale come 4 volte l'integrale esteso fra $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ma si fosse lasciato $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, non si sarebbe potuto cambiare variabile $\varphi = \arctan t$ in quanto $\arctan t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si sarebbe potuto scrivere $2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ldots$ e cambiare la variabile nello stesso modo. Volendo lasciare $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ si sarebbe dovuto invertire la tangente anche in intervalli diversi da quello per il quale si definisce la funzione arcotangente. Lo studente/ssa può eseguire il conto e verificare l'uguaglianza del risultato.

♠ Esercizio chiesto a "ricevimento studenti". Si calcoli l'area della superficie dell'ellissoide (palla da rugby") $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ [Esercizio num. **8.8.1** preso dal file "integrali multipli, di superficie, equazioni differenziali" e scaricabile dalla pagina del corso]

*Svolgimento* Vengono elencati tre possibili soluzioni.

Prima soluzione. Sia dato l'insieme $D = \{(u, \theta) \in \mathbf{R}^2\colon\ -b \leq u \leq b,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ e la superficie

$\underline{\varphi}(u, v) \doteq (x, y, z) = (a\cos\theta\sqrt{1 - \frac{u^2}{b^2}}, a\sin\theta\sqrt{1 - \frac{u^2}{b^2}}, u)$, $-b \leq u \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($\underline{\varphi}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$). La parametrizzazione dell'ellissoide corrisponde a fissare una ordinata $z = u$ e poi a parametrizzare la circonferenza di raggio $a\sqrt{1 - \frac{u^2}{b^2}}$. La matrice delle derivate è data da

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\sqrt{f(u)} & \frac{a}{b^2}\cos\theta\frac{-u}{\sqrt{f(u)}} \\ a\cos\theta\sqrt{f(u)} & \frac{a}{b^2}\sin\theta\frac{-u}{\sqrt{f(u)}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(u) = 1 - \frac{u^2}{b^2}$$

La radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine 2 dà luogo a $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2} - 1) + a^2}$. La superficie dell'ellissoide diventa dunque

$\int\int_D du\, d\theta\sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2} - 1) + a^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-b}^{b} du\, \sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2} - 1) + a^2} =$

$= 4\pi a\int_0^1 dz\, \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)z^2}$. A questo punto bisogna sapere se $a > b$ oppure $a < b$. Se $a > b$ l'integrale si risolve facilmente sostituendo $u = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\sinh t$ e si ottiene $4\pi\frac{b^2 a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\int_0^{t_o} dt\, \cosh^2 t$ dove $t_o$ è l'unica soluzione della equazione $\sinh t = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. La primitiva della funzione $\cosh^2 t$ è $\frac{1}{2}\cosh t\sinh t + \frac{1}{2}t$ e $t_o = \ln(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} + \sqrt{1 + (\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b})^2})$. Riunendo il tutto si ottiene $S = 2a\pi(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\ln(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}))$

Se invece $a < b$, sostituendo $z = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\sin t$ si ottiene $S = 2\pi b^2(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b})$

Seconda soluzione. Volendo si poteva usare un'altra superficie ossia un'altra terna di funzioni per descrivere il sostegno costituito dalla "superficie" dell'ellissoide di rotazione. Precisamente si poteva fare $D = \{(\theta, \psi)) \in \mathbf{R}^2\colon\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$

$\varphi(\theta, \psi) \doteq (x, y, z) = (a\sin\theta\cos\psi, a\sin\theta\sin\psi, b\cos\theta)$, ($\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$). La matrice delle derivate stavolta è $\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\psi & -a\sin\theta\sin\psi \\ a\cos\theta\sin\psi & a\sin\theta\cos\psi \\ -b\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

ed il modulo al quadrato della normale esterna alla superficie è dato da $a^4\cos^2\theta\sin^2\theta + a^2b^2\sin^4\theta$. L'area cercata è data da $\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta\, a\sin\theta\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2\theta + a^2}$ ed eseguendo la sostituzione $\cos\theta = z$ si ottengono gli integrali di prima.

Due parole vanno dette sulla regolarità delle parametrizzazioni scelte. Nel primo caso, facendo riferimento alla *Definizione 3.1* pag. 290 del libro di E.Giusti, si ha $K = D$, $\varphi$ è quella data. Le condizioni $b$ e $c$ sono verificate in quanto la terza componente è $z = u$. Infatti l'iniettività è immediata ed il fatto che la matrice delle derivate abbia rango 2 segue dal fatto che la grandezza $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}u^2(\frac{a^2}{b^2}-1)+a^2}$ è sempre non nulla per $-b \le u \le b$. La condizione non verificata è la prima. Infatti $\frac{-u}{\sqrt{f(u)}}$ è singolare per $u = \pm b$. Ad ogni modo la singolarità si riferisce ad un insieme di misura nulla e quindi si può eseguire l'integrazione senza problemi.

Nel caso dell'altra parametrizzazione si ha di nuovo $K = D$, ma la condizione non verificata è quella della iniettività in quanto per $\psi = 0$ e $\psi = 2\pi$ si ottengono gli stessi punti. Anche in questo caso non si hanno problemi in quanto gli insiemi interessati hanno misura nulla.

Terza soluzione. Dopo avere osservato che la superficie è dotata di simmetria di rotazione intorno all'asse $z$ (ossia se il punto $(x, y, z)$ appartiene alla superficie, anche il punto $(\xi, \eta, z)$ vi appartiene purché $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$,) usiamo il teorema di Pappo–Guldino. Parametrizzando l'ellisse $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ nel primo quadrante come $y = \gamma_1(t) = a\cos t$, $z = \gamma_2 = b\sin t$. La superficie che cerchiamo è $2\pi\cdot 2\int_0^{\pi/2}\gamma_1\|\underline{\gamma}'\|dt$ ossia $2\pi 2\int_0^{\pi/2} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$. Sostituiamo $z = \sin t$ da cui $4\pi\int_0^1 a\,dz\,\sqrt{(a^2-b^2)z^2+b^2}$ ossia uno degli integrali precedenti.

♠ (Esercizio del compito del 2/7/2012, A.A. 2011/2012) (Chiesto da studenti a ricevimento). Sia $S$ la superficie definita dalle relazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 3 \le 0$. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = -y\underline{i} + x\underline{j} + (x^2 + y^2 - x - z^2)\underline{k}$ attraverso $S$.

*Svolgimento* La superficie è composta da due parti ambedue giacenti sulla sfera di centro l'origine e raggio 2. Sia $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3\}$. La parte superiore è costituita dai punti che hanno $z \ge 1$. Parametrizziamo la parte superiore della sfera con coordinate cartesiane $x = \varphi^1(u, v) = u$, $y = \varphi^2(u, v) = v$, $z = \varphi^3(u, v) = \sqrt{4-u^2-v^2}$ $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{i} + \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{j} + \underline{k}$ (punta verso la parte superiore della semisfera superiore).

L'integrale che cerchiamo (solo parte superiore) è

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = \int\int_E \Big[\frac{-vu}{\sqrt{4-u^2-v^2}} + \frac{uv}{\sqrt{4-u^2-v^2}} +$$
$$+ (u^2+v^2-u-(4-u^2-v^2))\Big]du\,dv = \int\int_E (2(u^2+v^2)-u-4)du\,dv$$

Coordinate polari nel piano $u = r\sin t$, $v = r\sin t$ da cui

$$\int\int_E (2(u^2+v^2)-u-4)du\,dv = \int_0^{\sqrt{3}} dr\,r \int_0^{2\pi} (2r^2 - r\sin t - 4)dt = 4\pi\left(\frac{9}{4}-3\right)$$

Ora calcoliamo l'integrale sulla parte inferiore. Se parametrizziamo $x = \varphi^1(u,v) = u$, $y = \varphi^2(u,v) = v$, $z = \varphi^3(u,v) = -\sqrt{4-u^2-v^2}$ otteniamo $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \frac{-u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{i} + \frac{-v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{j} + \underline{k}$. Scegliamo la normale che punta verso il basso $\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{i} + \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\underline{j} - \underline{k}$ e otteniamo

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e)})d\sigma = -\int\int_E (2(u^2+v^2)-u-4)du\,dv = -4\pi\left(\frac{9}{4}-3\right)$$

La somma è chiaramente zero.

Secondo svolgimento. Usiamo il teorema di Gauss. A tal fine dobbiamo considerare la superficie chiusa data dalle due parti di cui sopra più la superficie laterale, detta $S_l$ definita da $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \colon x^3+y^3=3, x^2+y^2+z^2\le 4\}$. Sia $V$ il volume racchiuso da $S\cup S_l$. Il teorema di Gauss ci dice che

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_S^{(e)})d\sigma + \int\int_{S_l} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_{S_l}^{(e)})d\sigma = \int\int\int_V div\underline{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$\int\int\int_V div\underline{F}\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_V (-2z)dx\,dy\,dz = \int\int_E dx\,dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (-2z)dz = 0$$

per cui

$$\int\int_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_S^{(e)})d\sigma = -\int\int_{S_l} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_{S_l}^{(e)})d\sigma$$

Parametrizziamo $S_l$. $x = \varphi^1(t,u) = \sqrt{3}\sin t$, $y = \varphi^2(t,u) = \sqrt{3}\sin t$, $z = \varphi^3(t,u) = u$ e $z^2 \le 4 - x^2 - y^2 = 4-3 = 1$, da cui $-1\le u\le 1$ e $\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_u = \sin t\underline{i} + \cos t\underline{j} = \frac{y}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{x}{\sqrt{3}}\underline{j}$ e l'integrale

$$\int\int_{S_l} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_{S_l}^{(e)})d\sigma$$

è zero come è facile verificare.

Avendo scelto le due normali esterne alle due porzioni di semisfere come nella soluzione, quella in alto che punta verso l'alto e quella in basso che punta verso il basso, si poteva dire subito che il flusso era zero in quanto il campo vettoriale non cambia in nulla se al posto dell'insieme $(x, y, z)$ si sceglie $(x, y, -z)$.

**Lezione del 25/11/2014**

• Sia data la superficie $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ avente densità di massa costante $\delta$. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

*Svolgimento* Data la simmetria radiale, il potenziale in $\underline{x}$ dipenderà dalla relazione $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ossia la distanza dall'origine. Siano quindi $(0, 0, z_0)$ le coordinate del punto in cui vogliamo calcolare il potenziale. Parametrizziamo la superficie come $x = \varphi^{(1)}(\vartheta, \varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = \varphi^{(2)}(\vartheta, \varphi) = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = \varphi^{(3)}(\vartheta, \varphi) = r\cos\vartheta$. La distanza del punto dalla superficie è $\sqrt{(r\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (r\sin\vartheta\sin\varphi)^2 + (r\cos\vartheta - z_0)^2} = \sqrt{r^2 - 2rz_0\cos\vartheta + z_0^2}$ e quindi il potenziale è $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\delta r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2rz_0\cos\vartheta + z_0^2}}$ e $r^2 \sin\vartheta = \|\underline{\varphi}_\vartheta \wedge \underline{\varphi}_\varphi\|$ L'integrale è immediato $\displaystyle 2\pi\delta r^2 \frac{1}{rz_0}\sqrt{r^2 - 2rz_0\cos\vartheta + z_0^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi\delta r}{z_0}(|r + z_0| - |r - z_0|)$ Se $r < z_0$ otteniamo $\displaystyle\frac{2\pi\delta r}{z_0}2r = \frac{4\delta\pi r^2}{z_0}$. Se $r > z_0$ abbiamo $\displaystyle\frac{2\pi\delta r}{z_0}2z_0 = 4\pi\delta r$ ("Gabbia di Faraday").

• Sia data la curva $\underline{\gamma}$ in $\mathbb{R}^3$, $x = \sin t\cos(2t)$, $y = \sin t \sin(2t)$, $z = \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dire quanto vale $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\displaystyle\omega = \frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2} + xdx + ydy + zdz$

*Svolgimento* La curva è chiusa ed essendo $xdx+ydy+zdz$ esatta, il relativo integrale è zero. La forma $\displaystyle\frac{zdx - xdz}{x^2+z^2}$ è chiusa ma non esatta essendo definita in $\mathbb{R}^2\backslash\{0, 0\}$ ed è relativa al solo piano $(z, x)$ per cui bisogna andare a vedere il comportamento della proiezione di $\underline{\gamma}$ sul piano $(z, x)$. Si vede facilmente che la proiezione è una curva, chiusa naturalmente essendo data da $x = \sin t\cos(2t)$, $z = \cos t$, il cui sostegno ha equazione $x^2 = (1 - z^2)(2z^2 - 1)^2$ e si nota che racchiude l'origine al suo interno. Per il Lemma di Gauss–Green, $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}} \frac{zdx - xdz}{x^2+z^2}$ è lo stesso che avrei se lo calcolassi su di una qualsiasi curva contornante l'origine. Scegliendo come curva la circonferenza $x^2 + z^2 = 1$, l'integrale vale $2\pi$.

• Si calcoli $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

*Svolgimento* L'integrale è $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$ dove $D=\{\underline{x}: x^2+y^2 \le 4x\}$ (viene da $|y|\le\sqrt{4x-x^2}$). Passando ora a coordinate polari si ha $\rho^2\le 4\rho\cos\vartheta$ e quindi $-\pi/2\le \vartheta\le\pi/2$ e quindi $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{4\cos\vartheta} \rho \underbrace{\rho}_{\text{iacobiano}} d\rho$

• Si calcoli il volume, detto $V$, dello spazio finito racchiuso dai cilindri di equazione $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ e dai paraboloidi $\dfrac{x^2}{2}+2y^2=z$, $x^2+3y^2=z$.

*Svolgimento* Sia $E_1=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2: x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\}$, $E_2=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\}$,. Abbiamo $V=\displaystyle\int\int_{E_2}[(x^2+3y^2)-(\frac{x^2}{2}+2y^2)]dx\,dy-\int\int_{E_1}[(x^2+3y^2)-(\frac{x^2}{2}+2y^2)]dx\,dy$ e poi si possono usare le coordinate polari–ellittiche (un disegno aiuta).

**Lezione del 27/11/2014**

• Nel punto $P\equiv(0,e^2,0)$ si trovi il piano tangente $ax+by+cz+d=0$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $x+(\ln y)^z-1=0$

Sia $F(x,y,z)=x+(\ln y)^z-1$. $F_x\equiv 1$, per cui, nell'intorno del punto $P$ possiamo scrivere $x=f(y,z)$ dove $f(e^2,0)=0$ e $F(f(y,z),y,z)\equiv 0$ per ogni $\|(y,z)-(e^2,0)\|<\delta$. Derivando rispetto a $y$ e $z$ abbiamo $f_y=\dfrac{-F_y(x,f(y,z))}{F_x(x,f(y,z))}$ $f_z=\dfrac{-F_z(x,f(y,z))}{F_x(x,f(y,z))}$ e calcolate in $P$ danno rispettivamente 0 e $-\ln 2$. Ne segue che il piano cercato è $x-0=f_y(P)(y-e^2)+f_z(P)z=-(\ln 2)z$ ossia $x=-z\ln 2$.

♠ Nel punto $(e,e,0)$ si trovi il piano tangente $ax+by+cz+d=0$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $(x\ln y)^z-1=0$

• (chiesto a ricevimento) Sia dato l'insieme descritto dalla relazione $(x^2+y^2)^2\le 2(x^2-y^2)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Ruotiamo di $2\pi$ tale insieme intorno alla retta $y=x$. Calcolare il volume del solido ottenuto. Suggerimento: la distanza di un punto dalla bisettrice ha una formula semplice

*Svolgimento* Usando Pappo–Guldino, l'integrale che cerchiamo è $2\pi\displaystyle\int\int_D \rho(\underline{x},d)dx\,dy$ dove $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+y^2)^2\le 2(x^2-y^2), x\ge 0,\ y\ge 0\}$ e $\rho(\underline{x},d)$ è la distanza fra il punto $\underline{x}$ e l'asse di rotazione dato dalla retta $y=x$ e che è uguale a $(x-y)/\sqrt{2}$. Si possono usare le formule sulla rotazione di un angolo di $\pi/4$ radianti oppure fare appello a della geometria elementare la cui conoscenza dovrebbe essere patrimonio di tutti. Dunque alla fine l'integrale è $\int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2\cos(2\vartheta)}} r\,dr \frac{r\cos\vartheta - r\sin\vartheta}{\sqrt{2}}$. Gli integrali non sono immediati. Per quanto riguarda il secondo, un modo di procedere, non certo unico, è il seguente (solo schema senza dettagli): si cambia $\vartheta = \arctan t$, si integra per parti due volte $(t/(1+t^2)^3$ e $t/(1+t^2)^2)$ poi $t = \sin z$, poi $z = 2\arctan u$ e poi i fratti semplici. Il risultato è $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}$. Per quanto riguarda il primo si integra per parti in $\vartheta$, poi si pone $\vartheta = \arctan t$, poi si integra per parti $(t/(1+t^2)^3)$ poi si pone $t = \sin z$ e poi si pone $z = \arctan u$ e poi i fratti semplici. Il risultato è $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

• (chiesto a ricevimento) Calcolare $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = xdy - ydx$ e $\underline{\gamma}$ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno ha equazione $(x^2+y^2)^2 \leq 2(x^2-y^2)$. Si parametrizzi la curva $x = \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\vartheta}\cos\vartheta$, $y = \sqrt{2}\sqrt{\cos 2\vartheta}\sin\vartheta$, e si proceda. Si faccia attenzione che non può essere $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

**Lezione dell'1/12/2014**

**Teorema 1.(1/12/2014)** *Siano* $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, $\overset{o}{X} \subset \mathbb{R}^n$ *di classe* $C^2$. *Se la forma quadratica* $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}^o) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}^o)] h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}^o)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}^o$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$, *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}^o$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato.*

• Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura.

*Svolgimento* Innanzitutto ossrviamo che per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione $x^3 + xy_0 + y_0^2 = 0$ ha soluzione in $x$. Ciò accade in quanto $h(x) = x^3 + ax + a^2$ va da $-\infty$ a $+\infty$ ed è continua per cui interseca l'asse delle ordinate. Ciò implica che la funzione $f(x,y) = y$ non ammette né massimo né minimo assoluto. Per cercare i massimi e minimi locali formiamo la funzione $F(x,y,\lambda) = y - \lambda(x^3 + xy + y^2)$ e risolviamo il sistema

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_\lambda = 0$$

e viene fuori che $x_0 = 2/9$, $y_0 = -4/27$, $\lambda_0 = -27/2$. Per saperne di più usiamo il teorema sopra e costruiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{\underline{x}_0,\lambda_0} = \frac{27}{2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \doteq A$$

Il gradiente di $x^3 + xy + y^2$ è $(3x^2 + y, x + 2y)$ e calcolato in $\underline{x}_0$ dà $(0, -2/27)$. La relazione $(0, -2/27) \cdot (a, b) = 0$ comporta $b = 0$ per cui dobbiamo studiare la forma quadratica

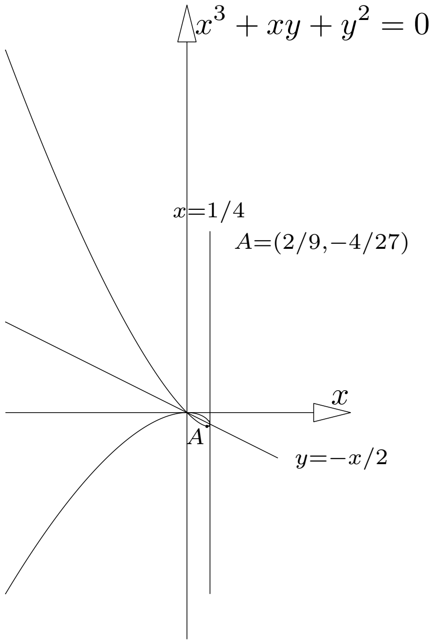
$(\underline{v}, A\underline{v})$ dove $\underline{v}$ è un vettore del tipo $(a,0)$ con $a \in \mathbb{R}$. Si ottiene $(\underline{v}, A\underline{v}) = 54a^2/3 > 0$ per ogni $a$ non nulla. Ne segue che il punto $\underline{x}_0$ è di minimo vincolato.

♠ Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = x$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto $(1/4, -1/8)$ è di massimo assoluto]

♠ Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = x + y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto $(2/9, -2/27)$ è di minimo locale]

**Lezione del 2/12/2014**

Tracciare il grafico della funzione definita da $x^3 + xy + y^2 = 0$ e ritrovare le conclusioni del primio esercizio dell'1/12/2014




• Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione $u = f(x,y,z) = z$ soggetta al vincolo $(x + 3y^2)e^{xz} - 1 = 0$. Risultato. Il punto $(e, 0, e^{-1})$ è una sella.

♠ Rimanendo nello stesso esercizio, si dica se la funzione $f(x,y,z) = z$ ammette massimo e/o minimo.

♠ Si dimostri che $(e,1,1)$ è un punto critico della funzione $u = f(x,y,z) = x$ soggetta al vincolo $x + y + z - \ln x - \ln y - \ln z = e + 1$. Si verifichi che è un massimo locale (non globale)

**Lezione del 4/12/2014**

• Trovare il minimo della funzione $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^n x_k$ soggetta alle condizioni $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n: x_i>0,\ i=1,\ldots,n,\ \prod_{k=1}^n x_k=A>0\}$ che definiscono un insieme $U\subset\mathbb{R}^n$.

Sia $\sum_{k=1}^n x_k\doteq S$. $\prod_{k=1}^n x_k\doteq P$ e sia $\mathbb{R}^{n,+}=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n: x_k>0,\ k=1\ldots,n\}$.

Definiamo $F(\underline{x},\lambda)=S-\lambda(P-A)$ da cui $F_{x_k}=1-\lambda\dfrac{P}{x_k}=0$ da cui $x_k-P=0$. Facendo la differenza $F_{x_k}-F_{x_q}=0$ si ottiene $x_k=x_q$ e dovendo essere $P=A$ si ha $x_1=x_2=\ldots=x_n=A^{\frac1n}$. Sia $\underline{x}^0=(A^{\frac1n},\ldots,A^{\frac1n})$ e quindi $f(\underline{x}^0)=nA^{\frac1n}$. Vogliamo dimostrare che tale valore è il minimo assoluto. Per questo dimostriamo che la funzione $f|_U(\underline{x})$ ha un minimo nell'insieme $\mathbb{R}^{n,+}\doteq\{x_k>0\}_{k=1}^n$. Tale minimo deve essere per forza un punto critico della funzione $F(\underline{x})$ da cui il fatto che esso è $\underline{x}^0$. Ragion per cui ora dimostriamo la proposizione

**Proposizione** *La funzione* $f|_U(\underline{x})$ *ha un minimo in* $\mathbb{R}^{n,+}$

*Dimostrazione* Osserviamo che in $U$, se $x_k\to0$ allora esiste $p$ tale che $x_p\to+\infty$. Ne segue che dato un valore positivo qualsiasi, diciamo $R$, esiste un iper–cubo opportuno, detto $Q\in\mathbb{R}^n$, tale che $f|_U(\underline{x})>R$ se $\underline{x}\in\mathbb{R}^{n,+}\backslash Q$.

Ora definiamo una successione $\{R_k\}$ di numeri positivi tale che $R_{k+1}>R_k$ e $R_k\to+\infty$. Poi definiamo una successione di iper–cubi (bordo compreso) $\{Q_k\}_{k=1,}^n$ tale che

i) $Q_{k+1}\supset Q_k$, ii) la successione $\{Q_k\}$ invade $\mathbb{R}^{n,+}$ ossia per ogni $\underline{x}\in\mathbb{R}^{n,+}$ esiste un iper–cubo $Q_k$ della famiglia tale che $\underline{x}\in Q_k$, iii) $f|_U(\underline{x})>R_k$ se $\underline{x}\in Q_{k+1}\backslash Q_k$.
Dalla i) e dalla iii) segue che $f|_U(\underline{x})>R_k$ non appena $\underline{x}\notin Q_k$.

Sia $l=\inf\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} f|_U$ che esiste essendo $f|_U>0$ (completezza dei reali; gira che ti rigira sempre lì si torna). Sia inoltre $m_k=\min\limits_{Q_k} f|_U$ che esiste essendo $f|_U$ continua (come si dimostra?) e $Q_k$ compatto. Inoltre dalla i) otteniamo

$$m_1\ge m_2\ge m_3\ge\ldots\ge l$$

Se accade che $m_{k_0}=l$ per certo $k=k_0$, allora abbiamo finito in quanto il valore $l$ sarebbe assunto e quindi diventerebbe minimo.

Supponiamo quindi che

$$m_1\ge m_2\ge m_3\ge\ldots>l$$

Per definizione di inf, supponendo che non sia max, sappiamo che

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \underline{x}_\varepsilon: l<f|_U(\underline{x}_\varepsilon)<l+\varepsilon$$

Se dovessimo contemplare anche la possibilità che $\underline{x}_\varepsilon$ sia max, la definizione sarebbe, come noto,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \underline{x}_\varepsilon \colon l \le f|_U(\underline{x}_\varepsilon) < l+\varepsilon$$

Dato un $p$ qualsiasi, prendiamo $\varepsilon = (m_p - l)/2$ per cui $f|_U(\underline{x}_\varepsilon) < m_p$. Ne segue che $\underline{x}_\varepsilon \notin Q_p$ e quindi $f|_U(\underline{x}_\varepsilon) > R_p$ il che è assurdo non appena $R_p > l+\varepsilon$. "L'assurdo" cade se supponiamo che $m_p = l$ e quindi $m_k = l$ per ogni $k > p$. ∎

Volendo usare il teorema dell'1/12/2014, a parte una costante positiva a fattore, si perviene a dover analizzare il segno della forma quadratica

$$-(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

soggetta alla condizione di tangenzialità $a_1+\ldots+a_n = 0$. Si arriva a

$$-(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix} a_2+\ldots+a_n \\ a_1+a_3+\ldots+a_n \\ a_1+a_2+a_4+\ldots+a_n \\ \vdots \\ a_1+\ldots+a_{n-1} \end{pmatrix} = -(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$$

da cui il minimo. Ho saltato diversi passaggi abbastanza ovvi che gli studenti possono agevolmente ricostruire.

• Trovare il minimo della funzione $u = f(x,y,z)$, $f(x,y,z) = x+y+z$, $x,y,z > 0$ tale che $x^p y^q z^r = A$, $p,q,r$ interi positivi.

Si potrebbero usare i moltiplicatori di Lagrange ma preferisco usare un argomento basato sulla disuguaglianza (1) del 23/10/2014 e scrivere

$$x+y+z = \underbrace{\frac{x}{p}+\ldots+\frac{x}{p}}_{\text{p}-\text{volte}} + \underbrace{\frac{x}{q}+\ldots+\frac{x}{q}}_{\text{q}-\text{volte}} + \underbrace{\frac{x}{r}+\ldots+\frac{x}{r}}_{\text{r}-\text{volte}} \ge (p+q+r)\left(\frac{x^p}{p^p}\frac{y^q}{q^q}\frac{z^r}{r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}} \ge$$

$$= A^{\frac{1}{p+q+r}}(p+q+r)\left(\frac{1}{p^p}\frac{1}{q^q}\frac{1}{r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}}$$

Per $p=q=r=1$ otteniamo $3A^{\frac{1}{3}}$ ossia quanto scritto sopra. Manca ancora un passo ossia far vedere che esiste effettivamente una terna $\underline{x}^0 = (x^0,y^0,z^0)$ tale che $x^0+y^0+z^0 =$

$(p+q+r)\left(\dfrac{A}{p^p q^q r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}}$. La diguaguagliaza fra media aritmetica e geometrica usata prima, diventa una uguaglianza se e solo se ogni elemento della somma è uguale agli altri per cui imponiamo $x/p = y/q = z/r$ da cui $y = x\frac{q}{p}$ $z = x\frac{r}{p}$ da cui

$$x^p y^q z^r = x^p \left(x\frac{q}{p}\right)^q \left(x\frac{r}{p}\right)^r = A \iff x = x^0 = A^{\frac{1}{p+q+r}} \left(\frac{p^{q+r}}{q^q r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}}$$

$$x^0+y^0+z^0 = A^{\frac{1}{p+q+r}} \left(\frac{p^{q+r}}{q^q r^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}} \left(1+\frac{q}{p}+\frac{r}{p}\right) = A^{\frac{1}{p+q+r}}(p+q+r)\frac{1}{(q^q r^r)^{\frac{1}{p+q+r}}} p^{\frac{q+r}{p+q+r}-1}$$

ossia

$$(p+q+r)\frac{A^{\frac{1}{p+q+r}}}{(p^p q^q r^r)^{\frac{1}{p+q+r}}}$$

♠ Sia $A$ una matrice $3\times 3$ simmetrica e positiva ($(\underline{v}, A\underline{v}) > 0$ per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$). Si trovino i punti critici della funzione $u = f(\underline{x}) = x^2+y^2+z^2$ soggetti al vincolo $(\underline{x}, A\underline{x}) = 1$ e se ne dia una caratterizzazione. [La matrice $A$ ha tre autovalori positivi non necessariamente distinti e tre autovettori che formano una base ortonormale. Se gli autovalori sono distinti $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, allora si ha un massimo assoluto, un minimo assoluto, ed una sella ]

♠ Trovare i punti critici e darne una caratterizzazione della funzione $z = f(x,y) = x^2+y^2$ soggetta la vincolo $y^2 - x^2 = 1$.

Primo modo (il più semplice). La funzione vincolata è $g(x,y) = x^2 + (1+x^2) = 1+2x^2$ da cui si vede $x = 0$ è un minimo assoluto e quindi $(0,\pm 1)$ sono due minimi assoluti e $f(0,\pm 1) = 1$. Non esiste massimo né relativo né assoluto.

Secondo modo. Si scrive $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2-\lambda(y^2-x^2-1)$ da cui

$$F_x = 0 = 2x(1+\lambda), \qquad F_y = 0 = 2y(1-\lambda), \qquad F_\lambda = 0 = y^2-x^2-1$$

Dalla prima si ha $x = 0$ oppure $\lambda = -1$.

$x = 0$. Dalla terza otteniamo $y = \pm 1$ e quindi la seconda implica $\lambda = 1$.

$\lambda = -1$. Dalla seconda discende $y = 0$ ma il punto $(0,0)$ non soddisda la terza.

Dunque abbiamo i due punti $(0,\pm 1.)$. Per sapere cosa sono possiamo usare il teorema dell'1/12/2014. La tangenzialità al vincolo implica $(-2x, 2y)\cdot(a,b) = 0$ e quindi $(0,\pm 1)\cdot(a,b) = 0$ ossia $b = 0$. La matrice hessiana rispetto a $x, y$ della $F(x,y,\lambda)$ è

$$\left.\begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}\right|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma quadratica
$$(a,0)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix} = 4a^2 > 0$$
per cui sono minimi assoluti in quanto sul vincolo, sono i punti aventi la minima distanza dall'origine e la $f(x,y)=x^2+y^2$ rappresenta proprio la distanza dall'origine.

♠ Trovare i punti critici e darne una caratterizzazione della funzione $z=f(x,y)=x^2+y^2$ soggetta la vincolo $y^2-x^2=1$ e $|x|\le 2$.

Si procede come prima ma stavolta vanno analizzati i quattro punti $(2,\pm\sqrt{5})$, $(-2,\pm\sqrt{5})$. $f(\pm 2,\pm\sqrt{5}) = 9$ per cui abbiamo dei massimi assoluti. Infatti siccome l'insieme $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon\ y^2-x^2=1, |x|\le 2\}$ è chiuso e limitato, la funzione $f$, ristretta a tale insieme assume massmo e minimo assoluti. Dal momento che i punti $(0,\pm 1)$ sono minimi, il massimo assoluto deve stare sul bordo ossia su almeno uno quattro punti di cui sopra.

♠ Si determinino i punti critici e se dia una caratterizzazione, della funzione $z=f(x,y)=x^2+y^2$ soggetta al vincolo $\sqrt{2}xy-x+y=0$

**Lezione del 10/12/2014**

• Trovare i punti critici e caratterizzarne la natura per la funzione $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2$ soggetta ai vincoli $x_1x_2=A$, e $x_3x_4=B$, $x_i>0$ per $i=1,2,3,4$ e $x_i\in\mathbb{R}$.
$$F(\underline{x},\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^n x_k^2-\lambda(x_1x_2-A)-\mu(x_3x_4-B)$$
$F_{x_1}=2x_1-\lambda x_2=0,\ F_{x_2}=2x_2-\lambda x_1=0,\ F_{x_3}=2x_3-\mu x_4=0,\ F_{x_4}=2x_4-\mu x_3=0,$
$F_{x_k}=2x_k=0,\ k\ge 5,\ F_\lambda=-(x_1x_2-A)=0,\ F_\lambda=-(x_3x_4-B)=0,$
$$F_{x_1}+F_{x_2}=0 \implies (x_1+x_2)(2-\lambda)=0 \implies \lambda=2 \implies x_1=x_2$$
Lo stesso argomento conduce a $x_3=x_4$ e quindi $x_1=x_2=\sqrt{A}$ e $x_3=x_4=\sqrt{B}$. Dunque abbiamo il punto critico vincolato $\underline{x}^0=(\sqrt{A},\sqrt{A},\sqrt{B},\sqrt{B},0,0\ldots)$. Verifichiamo cge sia regolare e per questo la matrice qui sotto deve avere rango due
$$\begin{pmatrix}(x_1x_2)_{x_1} & (x_1x_2)_{x_2} & (x_1x_2)_{x_3} & (x_1x_2)_{x_4} & (x_1x_2)_{x_5} & \ldots\\ (x_3x_4)_{x_1} & (x_3x_4)_{x_2} & (x_3x_4)_{x_3} & (x_3x_4)_{x_4} & (x_3x_4)_{x_5} & \ldots\end{pmatrix}\Bigg|_{\underline{x}^0}$$
ossia deve essere due il rango della matrice
$$\begin{pmatrix}\sqrt{A} & \sqrt{A} & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & \sqrt{B} & \sqrt{B} & 0 & \ldots\end{pmatrix}$$

e questo è assicurato in quanto, ad esempio, la seconda e terza colonna danno luogo ad un minore avente determinante $\sqrt{AB}$.

La tangenzialità al vincolo degli spostamenti implica

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_4 & x_3 & \dots \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x_1=x_2=\sqrt{A},\\ x_3=x_4=\sqrt{B}}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{A} & \sqrt{A} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{B} & \sqrt{B} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ossia $a_1 + a_2 = 0 = a_3 + a_4$.

Ora la matrice $F_{\underline{xx}}$ e calcolata per $\lambda = \mu = 2$ ci dà

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

ed il risultato è

$$V \doteq \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Ora la forma quadratica $(\underline{b}, V\underline{b})$ con $\underline{b} = (a_1, -a_1, a_3, -a_3, a_5, a_6, \dots, a_n)$ diventa

$$4a_1^2 + 4a_3^2 + \sum_{k=5}^{n} a_k^2 > 0$$

per cui abbiamo un minimo vincolato in $(\sqrt{A}, \sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{B}, 0, 0, \dots 0)$

Naturalmente la stessa cosa avremmo avuto scrivendo

$$x_1^2 + \frac{A^2}{x_1^2} + x_3^2 + \frac{B^2}{x_3^2} + \sum_{k=5}^{n} x_k^2$$

ed anzi, in casi del genere, laddove è possibile esplicitare una o più variabili dalle equazioni del vincolo, è vivamente consigliato di usare questa seconda strada senza introdurre i moltiplicatori di Lagrange.

♠ Ad esempio cerchiamo i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$ vincolati a $x^2 + y^2 \leq 1$. I punti per cui $x^2 + y^2 < 1$ sono interni e lì vale il gradiente di $f(x,y)$ ossia $f_x = 0 = 2x - 1$ e $2y = 0$ da cui $x = 1/2$, $y = 0$. La matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi è un minimo con $f(1/2,0) = 0$. Tralasciamo per ora i punti interni e concentriamoci su quelli vincolati.

Per i punti vincolati a stare su $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$, possiamo percorrere tre strade. La prima è quella di dire $y^2 = 1 - x^2$ e quindi $f|_U = 2x^2 + 1 - x^2 - x = x^2 - x + 1 \doteq h(x)$ con $-1 \leq x \leq 1$. Evidentemente $h'(x) = 2x - 1 \geq 0$ per $x \geq 1/2$ e chiaramente $x = 1/2$ è un minimo per $h(x)$. Ne segue che $(1/2, \sqrt{3}/4)$ è un minimo ed inoltre $f(1/2, \sqrt{3}/2) = 3/4$. Poi vediamo agli estremi esaminando $h(-1) = 1$, $h(1) = 1$. Ne concludiamo che il massimo assoluto si ha in $(\pm 1, 0)$. Il minimo assoluto in $(1/2, 0)$ mentre $f(1/2, \sqrt{3}/2)$ è un minimo locale.

Seconda strada. Si sarebbe pure potuto scrivere $x = \cos t$, $y = \sin t$ da cui $f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \cos t + 1 \doteq h(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$. $h'(t) = 2\cos t \sin t + \sin t = \sin t(-2\cos t + 1) \geq 0$ e quindi $t = \pm\pi/6$, sono dei punti di minimo mentre $t = 0, \pm\pi$ sono dei massimi. A $t = \pm\pi/6$ corrispondono in $\mathbb{R}^2$ i punti $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$ mentre a $t = 0$ corrisponde $(1,0)$ e a $t = \pi$ corrisponde $(-1,0)$ esattamente come sopra.

Terza strada. Moltiplicatori di Lagrange. $f(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ da cui

$$2x(2-\lambda) - 1 = 0, \qquad 2y(1-\lambda)0, \qquad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

e le uniche soluzioni sono $(1,0,3/2)$, $(-1,0,5/2)$, $(1/2, \sqrt{3}/2, 1)$. Usando la matrice dell'1/12/2014, otteniamo i risultati che già sappiamo.

. Personalmente ritengo la prima e seconda modalità migliori della terza e delle prime due, la prima. Rispetto alla prima, la seconda ha il vantaggio di non dover studiare cosa accade agli estremi dell'intervallo di integrazione ($x = \pm 1$) in quanto $t = -\pi$ e $t = \pi$ corrispondono allo stesso punto di $h(t)$.

Il punto è che tali procedure si possono attuare, in generale, fintantoché si hanno funzioni e vincoli quadratici. Eccezioni ve ne sono chiaramente (vedi il secondo problema del

2/12/2014) ma ad esempio nel primo problema dell'1/12/2014, conviene passare attraverso i moltiplicatori di Lagrange.

• Trovare i punti critici e caratterizzarne la natura per la funzione $\sum_{k=1}^{4} x_k^2 - \sum_{k=5}^{n} x_k^2$ soggetta ai vincoli $x_1x_2 = A$, e $x_3x_4 = B$ con $x_i > 0$, $i = 1,2,3,4$ e $x_k \in \mathbb{R}$ per $k > 4$.

• Nella proposizione del 4/12/2014, si afferma che $f|_U$ sia continua. Dimostrarlo.

• Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = (x-y)\underline{i} + (y-x)\underline{j} + z\underline{k}$ verso l'esterno della supeficie chiusa delimitata dal cono $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$, e dai piani $z = 0$, $z = 1$, $y = 0$

*Svolgimento* Usiamo Gauss. Dobbiamo parametrizzare il volume ed usiamo coordinate cilindriche. "Affettiamo" il cono con piani orizzontali di ordinata $z = u$. La porzione di piano così individuata si proietta sul piano $(x, y)$ e parametrizziamo tale proiezione

$$z = u \in [0,1], \qquad x = \rho\cos t,\ y = \rho\sin t, \quad 0 \le \rho \le 4-u, \quad 0 \le t \le \pi$$

Lo iacobiano è $\rho$, la divergenza del campo è 3 per cui l'integrale è

$$\int_0^\pi dt \int_0^1 du \int_0^{4-u} d\rho 3\rho = 3\pi\frac{1}{2}\int_0^1 du(4-u)^2 = \frac{3}{2}\pi\frac{1}{3}(64-27) = \frac{37}{2}\pi$$

• Studio della convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni $f_k(x) = x^k$, $0 \le x \le 1$, $f_k(x) = x/k$, $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k/k$, $0 \le x \le 1$.

**Lezione dell'11/12/2014**

• Sia $f_k(x) = 1/k$ se $1/k \le x \le 2$ e $f_k(x) = 0$ se $0 \le x \le 1/k$. Dimostrare che $f_k(x)$ converge per ogni $0 \le x \le 2$ e dire se la convergenza è uniforme e se la funzione limite è continua. Mettere in relazione tale risultato con il teorema di pag.4.

♠ Sia $f_k(x) = 1/k$ se $x \in [0,1)\cup(1,2]$ e $f_k(1) = 1$. Dimostrare che $f_k(x)$ converge per ogni $0 \le x \le 2$ e dire se la convergenza è uniforme e se la funzione limite è continua. Mettere in relazione tale risultato con il teorema di pag.4.

• Sia $f_k(x) = k$ se $x \in (0,1/k)$ e $f_k(x) = 0$ se $1/k \le x \le 1$. Verificare che $\int_0^1 f_k(x)dx = 1$ ma $\int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = 0$ per cui $\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)dx \ne \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = 0$. Verificare che la convergenza non è uniforme.

• Data la successione di funzioni $f_k(x) = \dfrac{1}{1+k^4x^4}$ e $x \in \mathbb{R}$. Trovare l'insieme di convergenza della successione e dire se la convergenza è uniforme nell'insieme $[a, +\infty)$ con $a > 0$. Dire se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.

• Data la successione di funzioni $f_k(x) = \dfrac{x}{1+k^4x^4}$ e $x \in \mathbb{R}$. Trovare l'insieme di convergenza della successione e dire se la convergenza è uniforme nell'insieme $[a, +\infty)$ con $a > 0$. Dire se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.

♠ Data la successione $f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2} + |x+1|^k}$, dire se converge puntualmente nel suo insieme di definizione e poi dire se la convergenza è uniforme.

♠ (esercizio del 20/11/2014) Sia data la forma differenziale $\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}dx + \frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}dy + \frac{2zdz}{x^2+y^2+z^2}$ e la curva $\underline{\gamma} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1/4,\ z = 1+x+y\}$. Si dica quanto vale $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$. Si dica poi quanto vale $\oint_{\underline{\gamma}_1} \omega$ dove $\underline{\gamma}_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 3,\ z = 1+x+y\}$. Le curve sono percorse in modo che la loro proiezione sul piano $(x,y)$ sia percorsa in senso antiorario. Si calcoli poi $\oint_{\underline{\gamma}_2} \omega$ dove $\underline{\gamma}_2 = (3\cos t, 3\sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

*Svolgimento*

Si verifica che la forma è chiusa.

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{8xy}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}+$$
$$-\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2+z^2)^2}\big(2y(x^2+y^2+z^2)+2y(x^2+y^2-1)\big)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{8xy}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}+$$
$$-\frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2+z^2)^2}\big(2x(x^2+y^2+z^2)+2x(x^2+y^2-1)\big)$$

e si vede subito che sono uguali.

Poi abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{4xz}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}+$$
$$-\frac{(4x^3+4xy^2+2xz^2-2x)}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)^2}(2z) = \frac{4xz(x^2+y^2+z^2)-2z(4x^3+4xy^2+2xz^2-2x)}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{-4x^3z-4xzy^2+4xz}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-4xz(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Per l'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

basta prendere la precedente e sostituire $x$ con $y$ e viceversa. Dunque la forma è chiusa

La curva $\underline{\gamma}=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1/4,\ z=1+x+y\}$ è una circonferenza contenuta all'interno del cilindro $x^2+y^2=1$. Sia $U=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}\backslash\{\underline{x}=\underline{0}\}$ che è l'interno del cilindro $x^2+y^2=1$ privato dell'origine. L'insieme è semplicemente connesso (ogni curva chiusa è deformabile con continuità fino a ridurla ad un punto senza mai uscire dall'insieme (senza mai passare attraverso l'origine). L'integrale è dunque zero.

Per calcolare il secondo integrale non possiamo più usare il precedente argomento in quanto la curva $\underline{\gamma}=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=3,\ z=1+x+y\}$ circonda l'insieme $U$ e quindi non posso contrarla ad un qualsisi punto senza incontrare $U$ stesso (ad esempio non posso contrarla fino a ridurla al punto $(0,0,1)$ senza passare attraverso $U$). Possiamo applicare l'equivalente del Lemma di Gauss–Green in più dimensioni ossia il teorema di Stokes.

Siano date due curve qualsisi, $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_2$, sul cilindro di equazione $x^2+y^2=3$ e per semplicità supponiamo che non abbiano punti in comune. La curva più in alto, $\underline{\gamma}_1$, la percorriamo in senso antiorario mentre la curva più in basso, $\underline{\gamma}_2$, in senso orario. Sia $\Gamma$ la curva $\underline{\gamma}_1\cup\underline{\gamma}_2$. Dal teorema di Stokes sappiamo che

$$\oint_{\underline{\Gamma}}\omega=\int\int_S(\underline{rot}F,\underline{n}^{(e)})d\sigma$$

dove $S$ è quella parte del cilindro $x^2+y^2=3$ compreso fra la due curve e $n^{(e)}$ è la normale esterna al cilindro ossia $\underline{n}^{(e)}=\sqrt{3}\underline{i}\cos t+\sqrt{3}\underline{j}\sin t$. Chiaramente $\underline{F}(\underline{x})=\Big(\frac{4x^3+4xy^2+2xz^2-2x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)},\frac{4y^3+4yx^2+2yz^2-2y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+z^2)},\frac{2zdz}{x^2+y^2+z^2}\Big)$. Essendo la forma chiusa, il rotore di $\underline{F}$ è zero per cui

$$\oint_{\underline{\Gamma}}\omega=0\implies\oint_{\underline{\gamma}_1}\omega+\oint_{\underline{\gamma}_2}\omega=0\implies\oint_{\underline{\gamma}_1}\omega=-\oint_{\underline{\gamma}_2}\omega\implies\oint_{\underline{\gamma}_1}\omega=\oint_{-\underline{\gamma}_2}\omega$$

e $-\underline{\gamma}_2$ è percorsa in senso antiorario. Ma allora io scelgo la curva, detta $\underline{\sigma}$, data da $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$ per calcolare l'integrale lungo la curva data nel problema ossia $x^2+y^2=3$, $z=1+z+y$.

$$\oint_{\underline{\sigma}} \omega = \int_0^{2\pi} dt \left( \frac{4\cdot 3\sqrt{3}\cos^2 t + 4\cdot 3\sqrt{3}\cos t \sin^2 t - 2\sqrt{3}\cos t}{(3-1)\cdot 3} (-\sqrt{3}\sin t) \right) +$$

$$+\int_0^{2\pi} dt \left( \frac{4\cdot 3\sqrt{3}\sin^2 t + 4\cdot 3\sqrt{3}\sin t \cos^2 t - 2\sqrt{3}\sin t}{(3-1)\cdot 3} (\sqrt{3}\cos t) \right) = 0$$

Alternativamente si poteva osservare che la forma differenziale si ottiene derivando la funzione $\ln(|(x^2+y^2-1)|(x^2+y^2+z^2))$ che è definita per $\underline{x} \neq \underline{0}$ e per $x^2+y^2 \neq 1$. Ne segue che se $x^2+y^2 \neq 1$, la forma è esatta. All'interno del cilindro di raggio 1 pure è esatta.

**Lezione del 15/12/2014**

• Sia data la successione di funzioni $f_k(x) = \dfrac{\sin(kx)}{k}$ che converge uniformemente in $\mathbb{R}$. La successione $f_k'(x) = \cos kx$ non converge per nessun valore di $x \neq 0$.

♠ Dimostrare che se $x \neq 0$ allora $\lim\limits_{k\to+\infty} \cos(kx)$ non esiste (Suggerimento: usare $\cos(2z)= \cos^2 x - \sin^2 x$ e $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

**Lezione del 16/12/2014**

• Trovare gli insiemi di convergenza puntuale della successione di funzioni $f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k}$. Dimostrare poi che converge uniformemente in ogni insieme $[-a,a]$ con $a>0$

♠ **1)** Dimostrare che non converge uniformemente nell'insieme $[a,+\infty)$.

♠ **2)** Si costruisca poi la successione $\{f_k'(x)\}$ e si trovi l'insieme di convergenza puntuale. Si dica poi se la convergenza è uniforme in ogni insieme $[-a,a]$.

*Svolgimento* Convergenza puntuale. Sia $|x+1| \geq 1$.

$$f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k} = |x+1| \left(1+e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x+1|$$

Sia $|x+1|<1$.

$$f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k} = e^{\frac{x^2}{k}} \left(1+e^{-x^2}|x+1|^{k}\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

Convergenza uniforme in $[-2,0]$ ossia $|x+1|<1$.

$$|f_k(x)-1| = \left| \sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k} - 1 \right| = \left| e^{\frac{x^2}{k}} \left(1+e^{-x^2}|x+1|^{k}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right|$$

Ora usiamo:
1) $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1 + x/k$ dimostrabile studiando il grafico della funzione $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{k}} - 1 - x/k$ per $x \geq 0$ e
2) $e^x \leq 1 + x(e-1)$, $0 \leq x \leq 1$.
Quindi otteniamo per $k \geq 2$

$$0 \leq \left| e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right| = e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{x^2}{k}(e-1)\right)\left(1 + \frac{1}{k}e^{-x^2}|x+1|^k\right) - 1 = (1 + O(\frac{1}{k})) - 1 = O(\frac{1}{k})$$

da cui la convergenza uniforme in $[-2, 0]$.

Convergenza uniforme in $[0, A]$ con $A > 0$. Dobbiamo stimare

$$|f_k(x) - |x+1|\,| = \left| |x+1| \left(1 + e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} - |x+1| \right| \leq |x+1| \left(1 + \frac{1}{k}e^{x^2}|x+1|^{-k} - 1\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k}(A+1)e^{A^2} \cdot 1$$

e quindi la convergenza uniforme. Ho usato $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1 + x/k$. Unendo con il punto precedente, otteniamo la convergenza uniforme nell'insieme $[-a, a]$.

**1)** Non convergenza uniforme in $[a, +\infty)$. Dobbiamo far vedere che

$$\exists\ \varepsilon > 0\colon\ \forall\ m\ \exists\ k > m\colon \sup_{x \in [a,+\infty)} |f_k(x) - |x+1|| \geq \varepsilon$$

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_k(x) - |x+1|\,| \geq |k+1| \cdot \left| \left(1 + e^{k^2}|k+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

**2)**

$$f'_k(x) = \frac{1}{k} \frac{2xe^{x^2} + k|x+1|^{k-2}(x+1)}{(e^{x^2} + |x+1|^k)^{1-\frac{1}{k}}} \to \begin{cases} \dfrac{x+1}{|x+1|}, & |x+1| \geq 1 \\ 0 & |x+1| < 1 \end{cases}$$

È facile verificare che la convergenza è uniforme in tutti gli insiemi della forma $(-\infty, a]$, con $a < -2$, $[a, b]$, $0 < a < b < 2$, $[a, +\infty)$, $a > 0$. Invece la convergenza non è uniforme nell'insieme $[a, b]$ con $a < -2$, e $b > -2$ e $a < 0$, $b > 0$. In quest'ultimo caso è facile applicare il teorema a pag.9 del libro.

♠ Si espliciti la non convergenza uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$.

• Studiare al convergenza puntuale ed uniforme della successione $f_k(x) = \dfrac{x}{1+(kx)^2}$.

Puntualmente converge a zero per ogni $x$. Per la convergenza uniforme si possono usare due strade. La prima consiste nel fare la derivata prima

$$f'_k(x) = \frac{1-k^2x^2}{1+(kx)^2} \geq 0 \iff |x| \leq 1/k$$

Quindi il massimo di $f_k(x)$ lo si ha per $x = 1/k$ e vale $1/k$. Abbiamo quindi $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| \leq \dfrac{1}{k} < \varepsilon$ per ogni $k > [1/\varepsilon]$ da cui la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

Il secondo modo consiste nello spezzare $\mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty) \cup [-1, 1]$. In $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ scriviamo

$$k^2x^2 + 1 = \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^2x^2}{2} + 1 \geq \frac{3}{4^{1/3}} x^{\frac{4}{3}} k^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4^{1/3}} |x|^{\frac{4}{3}} k^{\frac{4}{3}}$$

da cui

$$\frac{|x|}{1+(kx)^2} \leq \frac{4^{1/3}}{3k^{4/3}|x|^{1/3}} \leq \frac{4^{1/3}}{3k^{4/3}} < \varepsilon \iff k > \left[\frac{\sqrt{2}}{3^{3/4}\varepsilon^{3/4}}\right] \doteq k_\varepsilon^{(1)}$$

In $[-1, 1]\backslash\{0\}$ scriviamo

$$k^2x^2 + 1 = k^2x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{4^{1/3}} x^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4^{1/3}} |x|^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}}$$

da cui

$$\frac{|x|}{1+(kx)^2} \leq \frac{4^{1/3}|x|}{3|x|^{2/3}k^{2/3}} \leq \frac{4^{1/3}|x|^{1/3}}{3k^{2/3}} \leq \frac{4^{1/3}}{3k^{2/3}} < \varepsilon \iff k > \left[\frac{2}{3^{3/2}\varepsilon^{3/2}}\right] \doteq k_\varepsilon^{(2)}$$

Se $x = 0$ si ha $k_\varepsilon^{(3)} = 1$ per cui su tutto $\mathbb{R}$ vale $k_\varepsilon = \max\{k_\varepsilon^{(1)}, k_\varepsilon^{(2)}, k_\varepsilon^{(3)}\}$

**Lezione del 18/12/2014**

**Premessa** . Nella teoria della convergenza uniforme delle successoni di funzioni, tipicamente si trova $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) \doteq f(x)$ e poi si analizza la relazione

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon\ n > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dove $I$ è l'insieme in cui si vuole studiare l'uniformne convergenza.

Nelle serie di funzioni al posto di $f_n(x)$ c'è $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ ed al posto di $f(x)$ c'è $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ *che in genere è sconosciuta* . Per l'uniforme convergenza si studia la relazione

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon\ n > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

ossia

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon\ n > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I} \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big| < \varepsilon$$

Lo studente tenga presente che ad ogni $x$ fissato, una serie di funzioni diventa una serie numerica ordinaria cui applicare tutte le conoscenze acquisite al riguardo.

Se si vuole dimostrare che una serie di funzioni non è uniformemente convergente in $I$, bisogna mostrare che

$$\exists\, \varepsilon > 0\colon \forall m\ \exists\, n_\varepsilon > m\colon\ \sup_{x\in I} |S_{n_\varepsilon}(x) - S(x)| \geq \varepsilon$$

**Fine della Premessa**

♠ Sia data la successione di funzioni $f_k(x) = \dfrac{x}{1+(kx)^{2p}}$, $p > 1/2$. Chiaramente $f_k(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f_k'(x) = \dfrac{1}{1+(kx)^{2p}} - \dfrac{2pk^{2p}x^{2p}}{(1+(kx)^{2p})^2}$ che tende a zero se $x \neq 0$ mentre per $x = 0$ vale 1. Dunque in questo caso pur essendo $f_k'(x)$ convergente, essa non converge alla derivata della funzione limite ossia $f \equiv 0$ a causa del punto $x = 0$. Chiaramente il teorema di pag.9 non si applica in quanto manca l'uniforme convergenza della successione $\{f_k(x)\}$ nell'insieme $[-a, a]$ con $a > 0$ qualsiasi. Dimostriamo tale fatto. La successione $\dfrac{1}{1+(kx)^{2p}}$ tende a zero se $x \neq 0$ e tende a 1 se $x = 0$. Chiaramente la convergenza non è uniforme ed infatti

$$\sup_{x\in(0,1]} \left|\frac{1}{1+(kx)^{2p}} - \frac{2pk^{2p}x^{2p}}{(1+(kx)^{2p})^2}\right| \geq \left|\frac{1}{1+(kx)^{2p}} - \frac{2pk^{2p}x^{2p}}{(1+(kx)^{2p})^2}\right|_{x=1/k^{2p}} =$$

$$= \left|\frac{1}{1+k^{2p-4p^2}} - 2pk^{2p-4p^2}\frac{1}{(1+k^{2p-4p^2})^2}\right| = \left|\frac{1+(1-2p)k^{2p-4p^2}}{(1+k^{2p-4p^2})^2}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

♠ Dimostrare che la successione $f_k'(x)=\dfrac{1}{1+(kx)^{2p}}-\dfrac{2pk^{2p}x^{2p}}{(1+(kx)^{2p})^2}$ converge uniformemente in $[a,+\infty)$ con $a>0$.

♠ Sia data la successioni di funzioni $f_k(x)=\dfrac{x}{1+|(kx)^p|}$. Si dica per quali valori di $0<p\leq 1$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

*Risposta* Se $0<p<1$ la successione converge ma non uniformemente. Infatti certamente violo la relazione da soddisfare $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_k(x)|<\varepsilon$ se prendo $x_k=k^{\frac{1}{1-p}}$. Se invece $p=1$, maggiorando $|f_k(x)|\leq\dfrac{|x|}{|x|k}=\dfrac{1}{k}$ si ha la convergenza uniforme.

♠ Si dimostri che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$ converge uniformemente per $x\geq 0$ ma non converge totalmente.

*Dimostrazione* Certamente la serie converge puntualmente essendo una serie di Leibnitz. Sia quindi $S(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\doteq\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k(x)$ ed inoltre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k(x)\doteq S_n(x)$

$$\begin{aligned}&S-S_{2n}=-a_{2n+1}(x)+\big(a_{2n+2}(x)-a_{2n+3}(x)\big)+\big(a_{2n+4}(x)-a_{2n+5}(x)\big)+\ldots+\\&+\big(a_{2n+6}(x)-a_{2n+7}(x)\big)+\ldots\geq -a_{2n+1}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S-S_{2n-1}=a_{2n}(x)+\big(-a_{2n+1}(x)+a_{2n+2}(x)\big)+\big(-a_{2n+3}(x)+a_{2n+4}(x)\big)+\ldots+\\&+\big(-a_{2n+5}(x)+a_{2n+6}(x)\big)+\ldots\leq a_{2n}(x)\end{aligned}$$

Quindi

$$|S(x)-S_k(x)|\leq|a_{k+1}|=\frac{1}{x+k}\leq\frac{1}{k}$$

e quindi la convergenza uniforme. La serie non può convergere totalmente in quanto

$$\frac{1}{x+k}\geq\frac{1}{2k}\ \forall\ k>x,\ \Longrightarrow\ \sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{x+k}\geq\sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{2k}=+\infty$$

Ricordo che dalla convergenza totale segue sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme ma la convergenza assoluta è esclusa in questo caso.

♠ Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\pi k+\arctan\frac{x}{k})$. Si studi 1) la convergenza puntuale, 2) la convergenza uniforme sugli insiemi $[-a,a]$, 3) la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

*Svolgimento* 1) La serie è in realtà $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})$. Usiamo Le maggiorazioni $|\arctan x|\leq|x|$ e $|\sin x|\leq|x|$ ed abbiamo

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}}$$

da cui l'assoluta convergenza e quindi la convergenza semplice.

2) Se $x\in[-a,a]$ abbiamo $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k\sqrt{k}}$ da cui la totale convergenza e quindi uniforme, in $[-a,a]$

3) Per la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$, dobbiamo mostrare che, detta $S(x)$ la somma sella serie per ogni $x$, si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|S(x)-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|<\varepsilon$$

Dall'esercizio precedente, dopo aver notato che $\sin x$ e $\arctan x$ sono entrambe crescenti, possiamo dire che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(\arctan\frac{x}{n+1})\leq\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}<\varepsilon$$

se $n$ è grande abbastanza. Naturalmente si poteva risolvere direttamente questa parte dell'esercizio che avrebbe compreso anche le prime due.

♠ $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k^4x^4}$ diverge a $+\infty$ per $x=0$ e converge per ogni altro valore di $x$ in quanto il termine generale tende a zero come $1/k^4$. Chiaramente la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ ma è uniforme in ogni sottoinsieme del tipo $[a,+\infty)$, $a>0$.

♠ Si dica se converge e per quali valori di $x$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}}$. Si dica se nell'insieme trovato la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* Basta osservare che $1+x^2\geq 2\sqrt{|x|}$ per cui $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}$.

• Dare un esempio di serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ che diverge per ogni $x$ ma $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$ converge per ogni $x$.

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2 k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* . La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $x = 0$ vale identicamente zero. Se $x \neq 0$ possiamo osservare che $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{e^{-x^2k}} = e^{-x^2} < 1$ da cui la convergenza.

Possiamo anche osservare che $\lim_{k\to+\infty} k^2 e^{-x^2k} = 0.$

Convergenza uniforme. Siccome in questo caso specifico possiamo addirittura calcolare $S(x)$

$$S(x) \doteq x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2k} = x^2 \frac{1}{1-e^{-x^2}}$$

siamo in grado di dire che $\lim_{x\to 0} S(x) \neq 0$ ossia la funzione limite non è continua in $x = 0$; segno questo che la convergenza non è uniforme in nessun intervallo comprendente l'origine. Vogliamo ora evidenziare tale fatto mostrando che la convergenza non è uniforme in $(0, 1)$. Sia $x \in [1/\delta, 2/\delta] \subset (0, 1)$ e sia $x$ tale che $x^2k \leq 1$. Per questo è sufficiente $k \leq \delta^2/4$. Ne segue che

$$\sup_{(0,1)} x^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2k} \geq \sup_{[1/\delta,2/\delta]} x^2 \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} e^{-x^2k} \geq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}\frac{\delta^2-n}{4\delta^2} \geq \frac{1}{8e}$$

non appena $\delta^2 > n^2/4$ per cui, dato un qualsiasi intero $n$, trovo un $\delta$ che rende la precedente quantità maggiore di $1/(8e)$ ossia la non convergenza uniforme.

♣ Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* Per la convergenza puntuale si procede come sopra e si verifica che converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poi verifichiamo che $S(x) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2k} = \frac{x^3}{1-e^{-x^2}}$ se $x \neq 0$ mentre vale zero se $x = 0$. Siccome $\lim_{x\to 0} S(x) = 0$, ci sono gli indizi di una possibile uniforme convergenza ed infatti il massimo della funzione $x^3 e^{-x^2k}$ si ha per $x_k = \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq \overline{x}_k$ da cui

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k}\big|_{x_k=\overline{x}_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3/2} < \varepsilon$$

da cui la convergenza totale e quindi uniforme.

♣ Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3x^3}{(1+(kx)^4)^2}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* La serie converge puntualmente per ogni $x$ in quanto $\displaystyle\frac{k^3x^3}{(1+k^4x^4)^2} \le (kx)^{-5}$ e $\sum k^{-5}$ converge. Per $x=0$ è ovvio. Sia ora $|x|\ge a$. Abbiamo $1+\dfrac{k^4x^4}{2}+\dfrac{k^4x^4}{2} \ge 3\cdot 4^{-\frac13}(kx)^{\frac83}$ da cui $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^3x^3}{(1+(kx)^4)^2} \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3x^3}{(3\cdot 4^{-\frac13}(kx)^{\frac83})^2} = \frac{2^{\frac43}}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}(kx)^{\frac{-7}{3}} \le \frac{2^{\frac43}}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}(ka)^{\frac{-7}{3}}$ che chiaramente converge. Non converge uniformemente in ogni intervallo della forma $[-a,a]$ oppure $(0,a)$ oppure $(-a,0)$. Sia infatti $kx\le 1$ (prendiamo $x\ge 0$) da cui $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{+\infty}\frac{k^3x^3}{(1+(kx)^4)^2} \ge \frac18\sum_{k=k_0}^{[1/x]}k^3x^3 \ge \frac18 x^3\int_{k_0-1}^{[1/x]} y^3dy = \frac{1}{32}x^3\left(\left[\frac1x\right]^4-(k_0-1)^4\right)$ e se $x$ è piccolo abbastanza tale quantità non è piccola.

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{k}}\frac{x^3}{1+kx^4}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+k^2}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

*Svolgimento* La serie converge per ogni $x$ osservando che $x^2+k^2\ge k^2$. L'uniforme convergenza in $[-a,a]$ per ogni $a>0$ è assicurata da $\displaystyle\frac{|x|}{x^2+k^2}\le\frac{a^2}{k^2}$. La serie non converge uniformemente in $[a,+\infty)$. Infatti scriviamo

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{|x|}{x^2+k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\frac{1}{1+\frac{k^2}{x^2}}$$

Ora imponiamo $k \le [x]$ e scriviamo

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{|x|}\frac{1}{1+\frac{k^2}{x^2}} \ge \sup_{x\in[a,+\infty)} \sum_{k=n}^{[x]+1} \frac{1}{|x|}\frac{1}{2} = \sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{2}\frac{[x]+1-n+1}{|x|} = \frac{1}{2}$$

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{k}} e^{-x^2 k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{(1+x^2)^k}$. Dimostrare in almeno due modi che non può convergere uniformemente in $[-1,1]$. [Pringsheim, 1899]

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \cos x(1-\cos x)^k$. Dimostrare che non può esistere un intervallo di lunghezza pari a 7 in cui la convergenza è uniforme.

• BREVE DIGRESSIONE SUL LIMITE INFERIORE E SUPERIORE DI UNA SUCCESSIONE.

L'obiettivo è di dare un teorema più generale di quello presente a pag.18 del libro di testo (Teorema di Cauchy–Hadamard). Per capirne la ragione si consideri la successione $a_{2k} = 2^k$ e $a_{2k+1} = 0$. Se dovessimo calcolare $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$, concluderemmo che non esiste e quindi non saremmo in grado di trovare il raggio di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ mentre invece sappiamo che converge per $|x| < 1/2$ ma la dimostrazione richiede la conoscenza del "limite superiore" di una successione.

Sia $\{a_k\}$ una successione. Definiamo le quantità

$$L \doteq \overline{\lim}_{k\to+\infty} a_k \doteq \limsup_{k\to+\infty} = \inf_N \sup_{k\ge N} a_k, \qquad l \doteq \underline{\lim}_{k\to+\infty} a_k \doteq \liminf_{k\to+\infty} a_k \doteq \sup_N \inf_{k\ge N} a_k,$$

In generale sono diversi. Basta prendere $a_k = (-1)^k$ e si ha $L = +1$, $l = -1$.

Sia $A_N = \displaystyle\sup_{k\ge N} a_k$ e $B_N = \displaystyle\inf_{k\ge N} a_k$. La successione $\{A_N\}$ è non crescente dunque converge (eventualmente a $\pm\infty$). La successione $\{B_N\}$ è non decrescente dunque converge (eventualmente a $\pm\infty$).

Se $L = +\infty$ allora $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = +\infty$

Sia $L=-\infty$. In tal caso si ha $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k=-\infty$. Infatti essendo $L=\overline{\lim}_{k\to+\infty} a_k$ si ha che $\forall\ r>0\ \exists\ N_r\colon A_{N_r}<-r$ e quindi $a_k<-r$ *per ogni* $k\geq N_r$ che è come dire $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k=-\infty$.

Se $l=-\infty$ allora $B_1=B_2=B_3=\ldots=-\infty$

Se $l=+\infty$ allora $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k=+\infty$. Infatti $l=+\infty$ vuol dire che $\forall\ r>0\ \exists\ k_r\colon B_{k_r}\geq r$ ossia $a_k\geq r$ per ogni $k\geq k_r$.

Sia $L$ finito. Dalla definizione di inf segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ A_{N_\varepsilon}\colon\ L\leq A_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$ ed essendo $\{A_n\}$ non crescente, si ha

$$L\leq\ldots\leq A_{N_\varepsilon+2}\leq A_{N_\varepsilon+1}\leq A_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$$

Chiaramente $\{N_\varepsilon\}$ è illimitata se $\varepsilon\to 0$ oppure $A_k=L$ definitivamente. Inoltre dalla definizione di sup segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon\geq N_\varepsilon\colon\ A_{N_\varepsilon}-\varepsilon<a_{k_\varepsilon}\leq A_{N_\varepsilon}$ e chiaramente $a_k\leq A_{N_\varepsilon}$ per ogni $k\geq A_{N_\varepsilon}$. Quindi

$$L-\varepsilon\leq\ldots\leq A_{N_\varepsilon+2}-\varepsilon\leq A_{N_\varepsilon+1}-\varepsilon\leq A_{N_\varepsilon}-\varepsilon$$

Ne segue che

$$\forall\ \varepsilon>0\ \forall\ N\ \exists\ k_\varepsilon\geq N\colon\ L-\varepsilon<a_{k_\varepsilon},\qquad \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_\varepsilon\colon\ k\geq N_\varepsilon\implies a_k<L+\varepsilon \qquad (18/12/2014-1)$$

Sia $l$ finito. Dalla definizione di sup segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ B_{N_\varepsilon}\colon\ l-\varepsilon<B_{N_\varepsilon}\leq l$ ed essendo $\{B_N\}$ non decrescente si ha

$$l-\varepsilon<B_{N_\varepsilon}\leq B_{N_\varepsilon+1}\leq B_{N_\varepsilon+2}\leq l$$

$\{N_\varepsilon\}$ è illimitata se $\varepsilon\to 0$ oppure $B_k=l$ definitivamente. Inoltre dalla definizione di inf segue che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon\geq N_\varepsilon\colon\ B_{N_\varepsilon}\leq a_{k_\varepsilon}<B_{N_\varepsilon}+\varepsilon$ e chiaramente $a_k\geq B_{N_\varepsilon}$ per ogni $k\geq B_{N_\varepsilon}$. Quindi

$$B_{N_\varepsilon}+\varepsilon\leq B_{N_\varepsilon+1}+\varepsilon\leq B_{N_\varepsilon+2}+\varepsilon\leq\ldots\leq l+\varepsilon$$

Ne segue che

$$\forall\ \varepsilon>0\ \forall\ N\ \exists\ k>N\ :\ a_{k_\varepsilon}<l+\varepsilon,\qquad \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_\varepsilon\colon\ k\geq N_\varepsilon\implies a_k>l-\varepsilon \qquad (18/12/2014-2)$$

Esempi. La successione $\{(-1)^k k\}$ ha $L=+\infty$, $l=-\infty$.

Si ha la proposizione

**Proposizione** *In generale $l \le L$ mentre $l = L$ se e solo se esiste* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ *che uguaglia* $l = L$.

*Dimostrazione* Certamente $B_N \le B_{N+1} \le A_{N+1} \le A_N$ da cui $l \le L$. Supponiamo che esista $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \tilde L$ e quindi $\tilde L - \varepsilon < a_k < \tilde L + \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$. Ne segue che $\tilde L - \varepsilon \le \inf\limits_{k\ge k_\varepsilon+1} a_k \le \sup\limits_{k\ge k_\varepsilon+1} a_k \le \tilde L + \varepsilon$ e quindi $\tilde L - \varepsilon \le \inf\limits_{k\ge k_\varepsilon+1} a_k \le \inf\limits_{k\ge k_\varepsilon+2} a_k \le \sup\limits_{k\ge k_\varepsilon+2} a_k \le \sup\limits_{k\ge k_\varepsilon+1} a_k \le \tilde L + \varepsilon$. Come conseguenza per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\tilde L - \varepsilon \le \sup_N \inf_{k\ge N} a_k \le \inf_N \sup_{k\ge N} a_k \le \tilde L + \varepsilon$$

e quindi $l = L = \tilde L$.

Supponiamo ora che $l = L$. Vogliamo dimostrare che esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \tilde L$ e che $\tilde L = L$.

In generale $l - \varepsilon < B_{N_\varepsilon} \le l \le L \le A_{N_\varepsilon} < L + \varepsilon$ e quindi $L - \varepsilon < B_{N_\varepsilon} \le A_{N_\varepsilon} < L + \varepsilon$ il che implica $L - \varepsilon < B_{N_\varepsilon} \le a_k \le A_{N_\varepsilon} < L + \varepsilon$ per ogni $k > N_\varepsilon$ ossia la tesi.■

---

tralasciare quanto segue fino alla prossima doppia linea continua

---

È importante il seguente teorema sulle serie numeriche

**Teorema** *Sia data la serie* **numerica** $\sum a_k$. *Abbiamo: 1) se* $\liminf\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$ *la serie diverge 2) se* $\liminf\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ *la serie diverge, 3) se* $\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ *la serie converge 4) se* $\limsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ *la serie converge*

*Dimostrazione* 1). Dalla 18/12/2014–2 adattata alla successione $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ si ha che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon$: $k \ge N_\varepsilon \implies \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > l - \varepsilon$ e $l > 1$. Ne segue

$$\frac{|a_{N_\varepsilon+2}|}{|a_{N_\varepsilon+1}|} > l - \varepsilon \implies \frac{|a_{N_\varepsilon+q}|}{|a_{N_\varepsilon+1}|} > (l-\varepsilon)^q$$

e quindi $|a_{N_\varepsilon+q}| \not\to 0$ non appena $\varepsilon$ è abbastanza piccolo

2). Sempre dalla 18/12/2014–2 otteniamo che definitivamente in $k$ abbiamo $\sqrt[k]{|a_k|} > l - \varepsilon > 1$ se $\varepsilon$ è abbastanza piccolo e quindi $a_k \not\to 0$.

3). Dalla 18/12/2014–1 si ha che definitivamente ($L < 1$)

$$\frac{|a_{N_\varepsilon+2}|}{|a_{N_\varepsilon+1}|} < L + \varepsilon \implies \frac{|a_{N_\varepsilon+q}|}{|a_{N_\varepsilon+1}|} < (L+\varepsilon)^q$$

e quindi la serie converge assolutamente.

4). Dalla 18/12/2014–1 si ha che definitivamente ($L<1$) $\sqrt[k]{|a_k|}<L+\varepsilon$ se $\varepsilon$ è abbastanza piccolo e quindi $|a_k|\leq (L+\varepsilon)^k$ da cui la convergenza assoluta.$\blacksquare$

Si faccia attenzione però che se $\overline{\lim}_{k\to+\infty}|a_{k+1}|/|a_k|$ non esiste, $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ potrebbe benissimo esistere. Infatti La serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots \qquad (18/12/2014-s)$$

ha $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=(2/3)^k$ se $k$ è dispari mentre è uguale a $(3/2)^k/3$ se $k$ è pari per cui $\overline{\lim}_{k\to+\infty}|a_{k+1}|/|a_k|=+\infty$ ma la serie è convergente. Infatti $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi la serie (18/12/2014–s) converge mentre la serie di potenze $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$, come conseguenza della seguente proposizione, converge per $|x|<\sqrt{2}$.

---

Sia data ora la serie di potenze $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ e $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=R$

Vogliamo dimostrare la proposizione

**Proposizione** *Se $|x|>1/R$ allora la serie diverge mentre se $|x|<1/R$ la serie converge. Se $x\in[-r,r]\subset(-1/R,1/R)$, la serie converge uniformemente.*

*Dimostrazione*

Sia $|x|=1/R-\delta$ con $1/R>\delta>0$. Sappiamo che per ogni $k$ grande abbastanza $\sqrt[k]{|a_k|}\leq (R+\varepsilon)$ da cui $|a_k|\leq(R+\varepsilon)^k$ e quindi otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k||x|^k=\sum_{k=0}^{K}|a_k||x|^k+\sum_{k=K}^{+\infty}|a_k||x|^k$$

Abbiamo impostato la convergenza assoluta che è sufficiente per la convergenza non assoluta. La prima è una somma finita e ce ne disinteressiamo. Nella seconda prendiamo $K$ così grande che $\sqrt[k]{|a_k|}<R+\varepsilon$ per ogni $k\geq K$. ne segue

$$\sum_{k=K}^{+\infty}|a_k||x|^k\leq\sum_{k=K}^{+\infty}(R+\varepsilon)^k\left(\frac{1}{R}-\delta\right)^k=\sum_{k=K}^{+\infty}\left(1-\delta R+\frac{\varepsilon}{R}-\varepsilon\delta\right)^k$$

e $-\delta R+\dfrac{\varepsilon}{R}-\varepsilon\delta<0$ non appena $\varepsilon<\delta R/(1/R-\delta)$. La convergenza della serie è immediata.

Sia ora $|x| = 1/R + \delta$ con $\delta > 0$. Sappiamo che per ogni $\varepsilon$ trovo un $a_{k_\varepsilon}$ tale che $\sqrt[k_\varepsilon]{|a_{k_\varepsilon}|} > R - \varepsilon$ ossia $|a_{k_\varepsilon}| > (R-\varepsilon)^k$ ed inoltre $k_\varepsilon \to +\infty$ se $\varepsilon \to 0$. Ma allora

$$|a_{k_\varepsilon}||x|^{k_\varepsilon} \geq (R-\varepsilon)^{k_\varepsilon} \left(\frac{1}{R} + \delta\right)^{k_\varepsilon} > 1 \iff \varepsilon < \frac{\delta R}{\frac{1}{R} + \delta}$$

Siccome $k_\varepsilon \to +\infty$ quando $\varepsilon \to 0$, allora $a_{k_\varepsilon} x^{k_\varepsilon} \not\to 0$ e quindi la serie non può convergere semplicemente.

Sia ora $x \in [-r, r] \subset (-1/R, 1/R)$ e prendiamo $\xi \in [r, 1/R)$. Abbiamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{x}{\xi}\right|^k |a_k \xi^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{r}{\xi}\right|^k |a_k \xi^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k \xi^k|$$

ossia la totale convergenza e quindi la uniforme. ∎

Quindi la quantità $\overline{\lim}_{k\to+\infty} |a_{k+1}|/|a_k|$ non è minimamente interessante ai fini di trovare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Dunque $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ prende il posto di $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ e di $\lim_{k\to+\infty} |a_{k+1}|/|a_k|$ che stanno sul libro di testo. Se però $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ esiste, allora esso concide con $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Per cercare il raggio di convergenza di una serie bisogna calcolare $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$; tanto meglio se esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Alternativamente si può calcolare $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_{k+1}/a_k|$ e se tale limite dà un risultato, allora quello è l'inverso del raggio di convergenza in virtù della seguente proposizione

**Proposizione** *Se esiste* $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ *allora esiste pure* $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *e i due limiti sono uguali.*

L'inverso è falso come mostra la successione $a_k = 1$ se $k \neq n^2$, e $a_k = 1/2$ se $k = n^2$ con $n = 1, 2, \ldots$.

♠ La serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^k$ converge non uniformemente per $0 \leq x < 1$. infatti, detta $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ si ha $|S_k - S| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}| = |\dfrac{x^{n+1}}{1-x}|$ e $\sup\limits_{0\leq x<1} |\dfrac{x^{n+1}}{1-x}| = +\infty$ qualunque sia $k$ da cui la non uniformità della convergenza. D'altra parte converge uniformemente in ogni intervallo del tipo $[0,a]\subset[0,1)$. Infatti $\sup\limits_{0\le x\le a}|\frac{x^{n+1}}{1-x}|\le\frac{a^{n+1}}{1-a}\le\frac{1}{1-a}$ oppure si può usare il teorema 6 di pag.19 del libro per cui il raggio di convergenza della serie è 1. Ne segue che converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo chiuso sottoinsieme di $(-1,1)$.

♠ La serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$ converge uniformemente per $0\le x\le 1$ e ciò si evince da $x^k/k^2\le 1/k^2$. Sulla base del teorema 6 pag.19 possiamo solo dire che converge in $(-1,1)$ e che diverge per $|x|>1$. La serie può essere derivata tutte le volte che vogliamo ed ogni volta otteniamo una serie di potenze che converge in $(-1,1)$. Possiamo però osservare che la derivata prima $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k}$ converge per $x=-1$ (serie di Leibnitz) e diverge per $x=1$.

♠ Stabilire la convergenza della serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ dove $a_k=2^k$ se $k$ è pari e $a_k=0$ se $k$ è dispari. Notare che $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k^{1/k}$ non esiste.

♠ Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^n+2^n)n^2(x(1-x))^n$, determinare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

*Svolgimento* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(3^n+2^n)n^2}=3\sqrt[n]{(1+\frac{2^n}{3^n})n^2}=3$ per cui la serie converge quando $|x(1-x)|<1/3$ ossia $\xi\doteq(3-\sqrt{21})/6<x<(3+\sqrt{21})/6\doteq\eta$. Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3^n+2^n)n^2(\xi(1-\xi))^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3^n+2^n)n^2}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(3^n+2^n)n^2(\eta(1-\eta))^n$$

divergono, l'insieme di convergenza uniforme è un qualsiasi intervallo $[a,b]\subset(\xi,\eta)$.

♠ Dimostrare ovvero confutare la seguente affermazione. *Siccome la serie precedente converge uniformemente in ogni insieme* $[a,b]\subset(\xi,\eta)$, *la convergenza è uniforme nell'insieme* $\bigcup\limits_{k=k_0}^{k_0+10^{10}}[\xi+\frac{1}{k},\eta-\frac{1}{k}]$; $k_0=[2/(\eta-\xi)]$ *serve a far si che* $\xi+1/k<\eta-1/k$, .

♠ Dimostrare ovvero confutare la seguente affermazione. *Siccome la serie precedente converge uniformemente in ogni insieme* $[a,b]\subset(\xi,\eta)$, *la convergenza è uniforme nell'insieme* $\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty}[\xi+\frac{1}{k},\eta-\frac{1}{k}]$

♠ Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n^2}(x(1-x))^n$, determinare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

*Svolgimento* Il raggio di convergenza è come sopra. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n^2}(\xi(1-\xi))^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+2^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n^2}(\eta(1-\eta))^n$$

ed osserviamo che la serie $\displaystyle\left|(-1)^n\frac{3^n+2^n}{n^2 3^n}\right| \leq \frac{2}{n^2}$ per cui converge assolutamente. Inoltre la maggiorazione vale per ogni $x \in [\xi, \eta]$ per cui la serie converge totalmente.

♠ Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x(1-x))^n$, determinare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

*Svolgimento* Il raggio di convergenza è come sopra. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(\xi(1-\xi))^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+2^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(\eta(1-\eta))^n$$

ed osserviamo che $\displaystyle\frac{3^n+2^n}{n3^n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{2^n}{3^n}$ converge assolutamente. Dunque la serie converge pure per $x=\xi$, $x=\eta$ e quindi per il teorema di Abel converge uniformemente in tutto l'intervallo $[\xi,\eta]$.

♠ Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}x^n$, determinare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

*Svolgimento* Il raggio di convergenza è $1/3$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(-3)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+2^n}{n3^n}$$

ed osserviamo che $\displaystyle\frac{3^n+2^n}{n3^n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{2^n}{3^n}$ converge assolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2^n}{3^n}\right)$$

che chiaramente diverge. Per il teorema di Abel la serie converge uniformemente in un qualsiasi intervallo $[-1/3, \eta]$, $\eta < 1/3$.

♠ **Si dia un esempio di serie di funzioni positive uniformemente convergente in R ma che non è totalmente convergente.**

Prendiamo la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|}$. Data la parità della funzione basta far vedere che converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

*Svolgimento* Dato un qualsiasi valore di $x$, per il criterio del rapporto studiamo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} e^{-||x|-k-1|+||x|-k|}$$

Per $k$ grande abbastanza si ha $\displaystyle\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} e^{-1}$ da cui la convergenza. Ora usiamo il criterio di Abel del 20/10/2014 ed abbiamo

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} = B_q a_q - B_{p-1} a_{q-1} + \sum_{k=p}^{q} B_{k-1}(a_{k-1} - a_k)$$

dove

$$B_q = \sum_{k=1}^{q} e^{-|x-k|} = \sum_{k=1}^{[x]} e^{-([x]-k)} + \sum_{[x]+1}^{q} e^{-(k-[x])}, \qquad a_k = 1/\sqrt{k}$$

$$\sum_{k=1}^{[x]} e^{-([x]-k)} = e^{-[x]} e \frac{1-e^{[x]}}{1-e}, \qquad \sum_{[x]+1}^{q} e^{-(k-[x])} = e^{[x]} e^{-[x]-1} \frac{1-e^{-(q-[x])}}{1-e^{-1}}$$

e quindi

$$e^{-[x]} e \frac{1-e^{[x]}}{1-e} \leq \frac{2e^{1-[x]}}{e-1} \leq \frac{2e}{e-1}, \qquad e^{[x]} e^{-[x]-1} \frac{1-e^{-(q-[x])}}{1-e^{-1}} \leq \frac{1}{e-1}$$

Inoltre

$$\sum_{k=p}^{q} B_{k-1}(a_{k-1} - a_k) \leq \frac{2e+1}{e-1} \sum_{k=p}^{q} (a_{k-1} - a_k) \leq \frac{2e+1}{e-1}(a_{p-1} - a_q)$$

Dunque alla fine abbiamo

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-||x|-k|} \leq \frac{2e+1}{e-1}(a_q + a_{p-1} + a_{p-1} - a_q) = \frac{2e+1}{e-1} 2a_{p-1} = \frac{2e+1}{e-1} 2 \frac{1}{\sqrt{p-1}}$$

e prendendo $p$ grande abbastanza, tale quantità è minore di $\varepsilon$.

Notare che se avessimo operato

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-||x|-k|}\le\sum_{k=p}^{q}\sup_{x\in[0,+\infty)}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-||x|-k|}=\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

e non è una quantità piccola non appena $q$ è grande abbastanza dopo avere fissato $p$.

♠ Studiare la convergenza uniforme in $[0,+\infty)$ della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x^k)^k}$ (Non del tutto facile)

**Lezione del 12/01/2015**

• Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x})=x\underline{i}-y\underline{j}+(2x-2y)\underline{k}$ verso l'esterno della superficie laterale della piramide la cui base è data dal rettangolo $A\equiv(1,-1,0)$, $B\equiv(1,2,-3)$, $C\equiv(-1,2,-1)$, $D\equiv(-1,-1,2)$, ed il vertice nel punto $E\equiv(0,0,3)$.

*Svolgimento* Sia $\underline{u}=A-B$, $\underline{v}=A-C$ e si trovi $\underline{u}\wedge\underline{v}\doteq\underline{w}$. Il piano su cui giacciono i tre punti $A,B,C$ è dato dall'equazione $\underline{x}\cdot\underline{w}=0$ ossia $x+y+z=0$. Si verifica che anche $D$ appartiene al piano. La divergenza del campo vettoriale è nulla per cui

$$\sum_{i=1}^{4}\int\int_{S_i}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e_i)})d\sigma^{(i)}+\int\int_{b}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(b)})d\sigma^{(b)}=0$$

dove $S_i$ è una delle quattro facce laterali e $b$ è la base. Quindi

$$\sum_{i=1}^{4}\int\int_{S_i}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e_i)})d\sigma^{(i)}=-\int\int_{b}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(b)})d\sigma^{(b)}=0$$

La normale $n^{(b)}$ è $(-1,-1,-1)/\sqrt{3}$ essendo la componente $z$ del vertice, superiore ad ognuna delle componenti $z$ dei vertici di base. $(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(b)})=-x+y-2x+2y=3y-3x$.

$$-\int\int_{b}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(b)})d\sigma^{(b)}=-\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{2}dy(3y-3x)=-9$$

Chi volesse può parametrizzare il piano di base e pervenire all'integrale qui sopra.

**Teorema (Abel)** *Sia* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k$ *una serie di potenze con raggio di convergenza* $r$. *Se la serie converge per* $x=x_0+r$ *allora converge uniformemente in tutto l'intervallo* $[x_0,x_0+r]$. *Una cosa analoga accade se la convergenza avviene a* $x=x_0-r$.

*Dimostrazione* Definendo $y = (x - x_0)/r$ possiamo ridurci a $x_0 = 0$ e $r = 1$. Usiamo il **Criterio di Abel** del 20/10/2014. Detta $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} A_n$ esiste e vale $A$.

$$\sum_{k=p}^{q} a_k x^k = A_q x^q - A_{p-1}x^{p-1} + \sum_{k=p}^{q} A_{k-1}(x^{k-1} - x^k) =$$

$$= (A_q - A)x^q - (A_{p-1} - A)x^{p-1} + \sum_{k=p}^{q}(A_{k-1} - A)(x^{k-1} - x^k) +$$

$$+ \sum_{k=p}^{q} A(x^{k-1} - x^k) + Ax^q - Ax^{p-1} =$$

$$= (A_q - A)x^q - (A_{p-1} - A)x^{p-1} + \sum_{k=p}^{q}(A_{k-1} - A)(x^{k-1} - x^k)$$

Poi abbiamo $|(A_q - A)x^q| \le |A - A_q|$, $|(A_{p-1} - A)x^{p-1}| \le |A - A^{p-1}|$,

$$\left|\sum_{k=p}^{q}(A_{k-1} - A)(x^{k-1} - x^k)\right| \le \sum_{k=p}^{q} |A_{k-1} - A||x^{k-1} - x^k| \le$$

$$\le \max_{p\le k\le q} |A_{k-1} - A| \sum_{k=p}^{q} |x^{k-1} - x^k| = \max_{p\le k\le q} |A_{k-1} - A| \sum_{k=p}^{q}(x^{k-1} - x^k)$$

$$= \max_{p\le k\le q} |A_{k-1} - A|(x^{p-1} - x^q) \le \max_{p\le k\le q} |A_{k-1} - A|$$

Se $p$ è abbastanza grande, tutte e tre le quantità sono minori di $\varepsilon$ con $\varepsilon$ scelto a priori positivo e arbitrariamente piccolo. L'ultimo passo è osservare che

$$\sup_{0\le x\le 1} \left|\sum_{k=p}^{q} a_k x^k\right| \le |A - A_q| + |A - A_{p-1}| + \max_{p\le k\le q} |A_{k-1} - A| \le 3\varepsilon \blacksquare$$

Il teorema precedente ci permette di dire che la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$ converge uniformemente in $[-1, a]$, per ogni $a < 1$.

**Applicazione delle serie di potenze alle equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti.**

Sia data l'equazione di Hermite $y''(x) - 2y'(x) + 2\varepsilon y(x) = 0$. Scriviamo la soluzione come $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ e deriviamo

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

Mettendo assieme si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left(c_{k+2}(k+1)(k+2) - 2c_k k + 2\varepsilon c_k\right) = 0 \ \forall \ x$$

Ne segue

$$c_{k+2} = c_k \frac{2k - 2\varepsilon}{(k+1)(k+2)}$$

e proseguendo si ha

$$c_{2k+2} = 2\frac{2(2k-2-\varepsilon)}{2k(2k-1)} \frac{2(2k-4-\varepsilon)}{(2k-2)(2k-4)} \cdots \frac{2(2-\varepsilon)}{(4\cdot 3)\cdot 2} c_0 = \frac{2^k}{(2k)!}(2k-2-\varepsilon)(2k-4-\varepsilon)\cdots(2-\varepsilon)(-\varepsilon)c_0$$

Allo stesso modo

$$c_{2k+1} = \frac{2^k}{(2k+1)!}(2k-1-\varepsilon)(2k-3-\varepsilon)\cdots(1-\varepsilon)c_1$$

Ora dobbiamo calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}$$

Riscriviamo la prima serie come $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x^2)^k$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} = \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{2k-\varepsilon}{(2k+1)(2k+2)} \to 0$$

e quindi la serie converge per ogni $x$. La stessa cosa accade per la seconda serie.

**Lezione del 13/01/2015, 15/01/2015, 19/01/2015, 20/01/2015**

**Di quanto segue, l'unica dimostrazione da sapere è quella del Teorema 9.1. La definizione dell'integrale di tipo c) può essere evitata.**

**Integrali impropri multidimensionali.**

Così come per funzioni di una variabile, per funzioni di più variabili si possono definire degli integrali di funzioni illimitate e/o il cui dominio di integrazione è illimitato. Facciamo alcuni esempi. Supponiamo di voler calcolare l'integrale $\displaystyle\int\int_{0<x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$ laddove si vede chiaramente che la funzione è illimitata nel dominio di integrazione. Come vedremo, l'integrale si calcola eseguendo $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\int_{\varepsilon\leq x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$. A parte problemi nella legittimità della scelta nella modalità di "invasione" del cerchio di raggio 1, sappiamo benissimo che $\displaystyle\int\int_{\varepsilon\leq x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy=\int_\varepsilon^1 dr\int_0^{2\pi}d\vartheta\frac{r}{r}=2\pi(1-\varepsilon)\to 2\pi$. Se con le setsse modalità calcolassimo l'integrale $\displaystyle\int\int_{0<x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy$, otterremmo $+\infty$. Nei casi precedenti abbiamo una funzione illimitata su un dominio limitato. Nel prossimo caso abbiamo una funzione limitata su di un dominio illimitato $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$. L'integrale è $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{rdr}{r^4}\int_0^{2\pi}d\vartheta=\lim_{R\to+\infty}2\pi\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{R^2}\right)=\pi$ ed invece $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\geq 1}\frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy=+\infty$.

Sia dato l'integrale $\displaystyle\int\int_{0<x^2+y^2\leq 1}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx\,dy$ e consideriamo i seguenti insiemi $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 1/k\leq\|\underline{x}\|\leq 1\}$. Osserviamo che $\displaystyle\int\int_{G_k}\frac{x}{x^2+y^2}dx\,dy=\int_{1/k}^1 r\,dr\int_0^{2\pi}d\vartheta\frac{r\cos\vartheta}{r^2}=0$ e quindi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx\,dy=0$

Definiamo ora i seguenti insiemi $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 0\leq\vartheta\leq 2\pi(1-1/k),\quad 1/k<r<1\}$ $\displaystyle\int\int_{G_k}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx\,dy=\int_{\frac{1}{k}}^1 dr\,r\int_0^{2\pi(1-\frac{1}{k})}\frac{r\cos\vartheta}{r^3}d\vartheta=\ln k\sin\frac{2\pi}{k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ (vedi fig.9.1)

Se invece definiamo $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 0\leq\vartheta\leq 2\pi(1-1/k),\quad e^{-k}<r<1\}$

$$\int\int_{G_k} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx\, dy = \int_{e^{-k}}^{1} dr\, r \int_0^{2\pi(1-\frac{1}{k})} \frac{r\cos\vartheta}{r^3} d\vartheta \;= k\sin\frac{2\pi}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2\pi$$

Si può certamente dire che l'integrale improprio $\displaystyle\int\int_{0<x^2+y^2\leq 1} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx\, dy$ non esiste in quanto, a seconda di come ” “si invade” lo spazio, il valore del limite può cambiare.

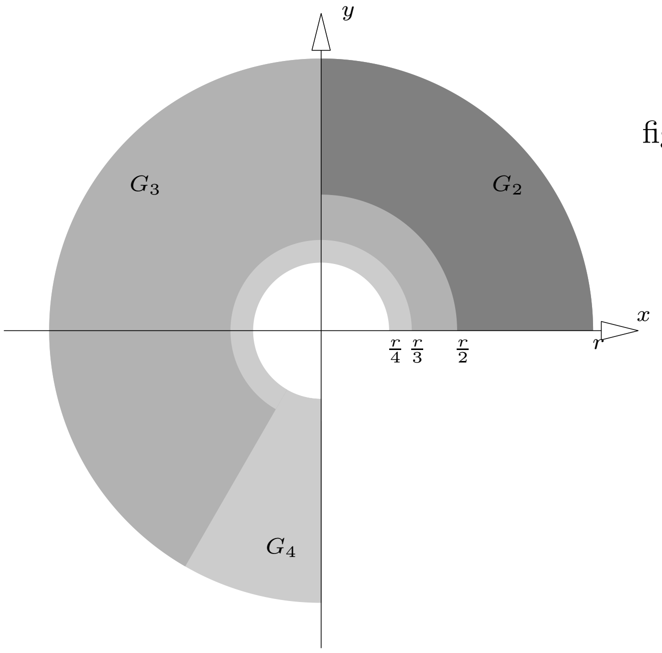



fig.9.1

Notare che se invece eseguissimo l'ultimo integrale sull'insieme $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon 0 < \|\underline{x}\| \leq 1, -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$ allora in tutti e tre i casi otterremmo $+\infty$.

Chiamiamo *dominio chiuso* un insieme chiuso con l'insieme dei punti interni denso.

**Integrale improprio** $\displaystyle\int_G f(\underline{x})d\underline{x},\ G\subset\mathbb{R}^n$

Esistono tre tipi di integrali impropri.

**(a)** Integrale di prima specie. Sia data una funzione è *localmente limitata* in un dominio chiuso illimitato. Localmente limitata vuol dire che per ogni punto del dominio esiste un intorno nel quale la funzione è limitata. Supponiamo pure che la funzione sia *ammissibile* ossia limitata e continua a tratti su ogni insieme limitato.

Consideriamo una successione qualsiasi di domini chiusi limitati $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots \subset G$ che verifica la seguente condizione: per ogni sfera $B_r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n\colon \|\underline{x}\| \leq r\}$, esiste un $m$ tale che il dominio $G_m$ (e quindi tutti i successivi) contiene l'insieme $B_r \cap G$. Una tale successione di domini si dice *esaustiva.* Gli integrali $I_m(f) \doteq \displaystyle\int_{G_m} f(\underline{x})d\underline{x}$ esistono essendo $f$ ammissibile. Se per $m\to+\infty$ la successione $I_m(f)$ ha un limite finito *indipendente* dalla successione esaustiva $G_m$, si dice allora che l'integrale esiste (o è convergente) e per definizione si scrive $I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x} = \lim_{m\to+\infty}\int_{G_m} f(\underline{x})d\underline{x}$. Se per $m\to\infty$ gli integrali $I_m(f)$ hanno limite $\pm\infty$, si dice che l'integrale è divergente. Se gli integrali $I_m(f)$ non hanno limite oppure dipende dalla successione $\{G_k\}$ si dice che l'integrale è non–convergente.

**(b)** Integrale di seconda specie. Sia data una funzione illimitata in un dominio chiuso limitato (compatto) $G$. Supponiamo poi che la funzione sia ammissibile: esiste un insieme nullo $Z\subset G$ tale che all'esterno di ogni suo intorno la funzione è limitata e continua a tratti. Consideriamo una successione di insiemi chiusi la cui frontiera è nulla $G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G$. Gli insiemi sono tali che $G\backslash G_k$ contiene $Z$ rigorosamente al suo interno e sia contenuto in un $\varepsilon_k$ intorno dell'insieme $Z$ [9.1] ed inoltre $\varepsilon_k\to 0$ per $k\to+\infty$. Una tale successione di insiemi si dice *esaustiva*. Se per $k\to+\infty$ l'integrale $I_k(f) = \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ ha un limite indipendente dalla successione di insiemi $g_k$ si dice che l'integrale $I_k(f)$ converge e si indica

$$I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x} = \lim_{k\to+\infty}\int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$$

Se invece $\lim_{k\to+\infty} I_k(f) = \pm\infty$ diciamo che l'integrale è divergente. Se il limite non esiste oppure il limite dipende dalla successione $\{G_k\}$ allora l'integrale di dice non convergente.

Tralasciare per ora il prossimo caso e gli esercizi che ad esso si riferiscono

**(c)** Integrale di terza specie. Sa data una funzione $f(\underline{x})$ in un dominio illimitato $G\subset\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni sfera $B_r$ esista un insieme nullo $Z_r$ tale che la funzione sia limitata e continua a tratti sulla differenza fra $B_r$ ed un qualsiasi intorno di $Z_r$. Chiamiamo ammissibili tali funzioni. La definizione di integrale improprio di terza specie $I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x}$ si costruisce nel seguente modo. Definiamo *esaustiva* ogni successione $G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G$ di domini aventi frontiera nulla e limitati se per ogni $r$ ed ogni $\varepsilon>0$ esiste un $k$ tale che il dominio $G_k$ e qundi tutti i successivi, contiene l'insieme $B_r\cap G$ ad eccezione dell'$\varepsilon$–intorno dell'insieme $Z_r$ e che se per un $r_1>r$ tale dominio $G_k$ è contenuto nella sfera $B_{r_1}$, esso non contiene né l'$\varepsilon$–intorno né l'insieme $Z_{r_1}$. Allora gli integrali $I_k(f) = \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ sono definiti. Se per $k\to+\infty$ questi integrali tendono ad un limite $I(f)$ indipendente dalla successione esaustiva $\{G_k\}$, si dice che l'integrale esiste (o è convergente). Se invece il limite è $\pm\infty$ allora è divergente mentre se il limite non esiste oppure dipende dalla successione $\{G_k\}$ allora l'integrale non esiste.

[9.1] Dato un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$, un $r$ intorno di $A$ è $U_r(A)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n\colon dist(\underline{x},A)<r\}$ e $dist(\underline{A})=\inf_{\underline{y}\in A} dist(\underline{x},\underline{y})$

Nelle definizioni (a)–(c), uno dei punti basilari, è dimostrare che il valore del limite $\lim_{k\to+\infty}\int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ non dipende dalla particolare successione $\{G_k\}$. Nel caso di funzioni nonnegative possiamo usare il teorema 9.1 ma prima abbiamo bisogno di un Lemma

**Lemma 9.1** *Siano date due successioni $\{G_k\}$ e $\{G'_k\}$. Allora esiste una successione di indici $\{i_k\}$ tale che*

$$G_1 \subset G'_{i_1} \subset G_2 \subset G'_{i_2} \subset G_3 \subset G'_{i_3} \subset \ldots \subset$$

Abbiamo il Teorema

**Teorema 9.1** *Se la funzione in (a)–(c) è pure nonnegativa $f \geq 0$, allora l'esistenza del limite $\lim_{k\to+\infty}\int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ per una particolare successione, implica l'esistenza del limite per ogni successione ed i limiti sono uguali*

*Dimostrazione* Per ipotesi sappiamo che $\lim_{k\to+\infty}\int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x} = L < +\infty$. Dal Lemma 9.1 abbiamo $\int_{G_k} f \leq \int_{G_{i_k}} f \leq \int_{G_{k+1}} f$ e quindi, dal teorema del confronto, $\lim_{k\to+\infty}\int_{G'_{i_k}} f(\underline{x})d\underline{x} = L$. Ora la successione $\left\{I_{G'_k}(f)\right\}$ è non decrescente essendo $f \geq 0$ e $\{G'_k\}$ una successione esaustiva. È quindi convergente. Essendo la sottosuccessione $\int_{G'_{i_k}} f$ convergente ad $L$, anche $\int_{G'_k} f$ converge ad $L$. ∎

**Corollario 9.1** *Se $f$ e $g$ sono due funzioni ammissibili sul dominio $G$ e se $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ allora se esiste l'integrale $g$ esiste pure l'integrale di $f$ ed inoltre $I(f) \leq I(g)$. Inoltre se $I(f) = +\infty$ allora $I(g) = +\infty$.*

**Corollario 9.2** *Se $f(\underline{x})$ è una funzione ammissibile non negativa e se $I(f) = I_G(f)$ è convergente, allora l'integrale $I_Q f$ su ogni dominio $Q \subset G$ è convergente anche esso e si ha $I_Q(f) \leq I_G(f)$.*

**Corollario 9.3** *Se $f(\underline{x})$ è una funzione ammissibile non negativa e se $I(f) = I_Q f = +\infty$ allora $I_G(f) = +\infty$ per ogni dominio $G \supset Q$.*

**Corollario 9.4** *Se per una funzione $f(\underline{x}) \geq 0$ ammissibile gli integrali $I_{G'}(f)$ e $I_{G''}(f)$ esistono, allora esiste pure l'integrale $I_{G'\cup G''}(f)$*

**Corollario 9.5; principio di localizzazione** *Sia data una funzione* $f(\underline{x}) \geq 0$ *ammissibile ed illimitata nel dominio chiuso e limitato* $G \subset \mathbb{R}^n$. *Se per ogni punto* $p \in G$ *esiste un intorno* $B_r(p)$ *in cui* $I_{B_r(p)}(f)$ *è convergente, allora* $I_Q(f)$ *è convergente. Se invece esiste un punto ed un intorno* $B_r(p)$ *tale che* $I_{B_r(p)}(f)$ *non esiste (nel senso che vale* $+\infty$*), allora non esiste neppure* $I_G(f)$.

**Teorema 9.2** *Sia* $f(\underline{x})$ *una funzione ammissibile data su di un dominio* $G \subset \mathbb{R}^n$. *Supponiamo che esista una funzione* $g(\underline{x}) \geq 0$ *il cui integrale* $I_G(g)$ *è convergente e tale che* $0 \leq |f(\underline{x})| \leq g(\underline{x})$. *Allora le funzioni* $f(\underline{x})$ *e* $|f(\underline{x})|$ *sono pure integrabili e*
$$\left|\int_G f(\underline{x})d\underline{x}\right| \leq \int_G |f(\underline{x})|d\underline{x} \leq \int_G g(\underline{x})dux$$

**Teorema 9.3** *Per funzioni di tipo* **a), b), c)**, *se un integrale converge semplicemente, converge assolutamente.*

**Esercizi**

• Sia dato l'integrale $\displaystyle\int\int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$. Passiamo a coordinate polari $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ con $0 \leq t \leq \pi/4$, e $0 \leq r \leq 1/\cos t$. Inoltre prendiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} \in G, r \geq 1/m\}$ ed otteniamo
$$\int\int_{G_m} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\int_{1/m}^{1/\cos t} \frac{\cos(2t)}{r}dr = \int_0^{\pi/4}\cos(2t)(-\ln\cos t + \ln m)dt.$$
L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos(2t)\ln\cos t dt$ è convergente mentre $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\cos(2t)\ln m dt = \infty$.

• Sia dato l'integrale $\displaystyle\int\int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 1 \leq y \leq x$. Passiamo a coordinate polari $x = 1 + r\cos t$, $y = 1 + r\sin t$ con $0 \leq t \leq \pi/4$, e $r \geq 0$. Inoltre prendiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} \in G, r \leq m\}$ ed otteniamo $\displaystyle\int\int_{G_m} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy =$
$$\int_0^{\pi/4}\int_0^m r\frac{r^2\cos(2t) + 2r(\cos t - \sin t)}{(2 + r^2 + 2r(\sin t + \cos t))^2}dr \geq \int_0^{\pi/4}\int_0^m r^3\frac{\cos(2t)}{(2 + r^2 + 4r)^2}dr$$
(si è usato il fatto che se $0 \leq t \leq \pi/4$ allora $\cos t - \sin t \geq 0$ ed inoltre $\cos t + \sin t \leq 2$). Siccome
$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\int_0^m r^3\frac{\cos(2t)}{(2 + r^2 + 4r)^2}dr = +\infty.$$

• Integrale di Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Si veda "http ://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Gauss" solo la parte dove dice "Calcolo dell'integrale".

• Sia dato l'integrale $\displaystyle\int\int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.
Scriviamo l'integrale come $\displaystyle\int\int_G \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\,dy$. Definiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \underline{1} \leq x \leq m,\ 0 \leq y \leq 1\}$ ed otteniamo $\displaystyle\int\int_{G_m} \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\,dy = \int\int_{G_m} \frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy - \int\int_{G_m} \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$. $\displaystyle\int\int_{G_m} \frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2}dx\,dy = \int_1^m dx \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\Big|_{y=0}^{y=1} = \int_1^m \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}dx \doteq I_m$. La successione $\{I_m\}$ è positiva crescente limitata in quanto $\displaystyle I_m \leq \int_1^m \frac{1}{x}\frac{1}{x}dx = 1 - \frac{1}{m} < 1$. Ne segue che esiste il limite $m \to +\infty$. Non essendo interessati al valore specifico ma solo alla convergenza dell'integrale si poteva pure maggiorare $\displaystyle\int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2} \leq \int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{m}$.
Nell'integrale $\displaystyle\int\int_{G_m} \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ maggioriamo con $\displaystyle\int_0^1 dy y^2 \int_1^m dx \frac{2}{x^4}$ ed abbiamo pure qui la convergenza.

*Osservazione* Come si può notare, il precedente integrale converge ma quello prima diverge sebbene ambedue vengano calcolati su di un dominio infinito (nell'ultimo caso solo per $x \to +\infty$). Si cerchi di spiegare come tale fatto entra nel calcolo dell'integrale.

Impostiamo in coordinate polari $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $\displaystyle\int\int_G \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1$. Sia $G_1 = G \cap \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq \sqrt{2},\ x^2+y^2 \leq 2\}$ e $G_2 = G \backslash G_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \geq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$. L'integrale su $G_1$ è chiaramente finito e quello su $G_2$ è $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^k dr \int_0^{\arcsin\frac{1}{r}} \frac{r^2\cos(2t)}{r^4} r dt = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dr}{r}\frac{2}{r}\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}$ e chiaramente converge. La differenza con l'integrale su $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1,\ 1 \leq y \leq x\}$ consiste nel fatto che se $r \to +\infty$, in questo caso $\arcsin(1/r)$ tende a zero mentre prima si aveva $0 \leq t \leq \pi/4$.

♠ Dire se sono integrabili le funzioni $f(x,y) = 1/(x+y)$ e $f(x,y) = y/(x+y)$ nell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1, y \leq 1/x^2\}$ ed eventualmente calcolare l'integrale.

$$\int\int_D \frac{1}{x+y}dxdy = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{dy}{x+y} = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx \left(\ln(x+\frac{1}{x^2}) - \ln x\right) =$$
$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx \ln(1+\frac{1}{x^3}) = \int_1^{+\infty} dx \ln(1+\frac{1}{x^3})$ e tale integrale improprio è convergente.

Si può anche calcolare integrando per parti ed ottenere $2\pi/\sqrt{3}$

$$\int\int_D \frac{y}{x+y}dxdy = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx\int_0^{\frac{1}{x^2}}\frac{y}{x+y}dy = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx\int_0^{\frac{1}{x^2}}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)dy =$$
$$= \lim_{a\to+\infty}\int_1^a dx\left(\frac{1}{x^2}-\ln(x+\frac{1}{x^2})+\ln x\right)$$

e chiaramente converge.

♠ Dire se converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D\frac{1}{x+y}dx\,dy$ dove $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x\le 0, y\ge -x, (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\le (x^2-y^2)^2\}$. In coordinate polari l'integrale diventa $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4}dt\int_0^{\cos^2(2t)}\frac{r}{r(\cos t+\sin t)}dr = \int_{\pi/2}^{3\pi/4}dt(\cos t-\sin t)^2(\cos t+\sin t) = \frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}$

• Dire se la funzione $e^{-xy^2}$ è integrabile nel semipiano $x\ge 0$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 0\le x\le k,\ -k\le y\le k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int\int_{D_k}e^{-xy^2}dx\,dy = \int_{-k}^k dy\int_0^k dx\,e^{-xy^2} = \int_{-k}^k dy\frac{1-e^{-ky^2}}{y^2}$$

Poi poniamo $\sqrt{k}y=t$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{-k^{3/2}}^{k^{3/2}}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\sqrt{k}dt\to+\infty$ per $k\to+\infty$. Infatti l'integrale è $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\sqrt{k}dt+\int_{1\le|x|\le k^{3/2}}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\sqrt{k}dt \doteq \sqrt{k}I_1+\sqrt{k}I_2$. Sia $I_1$ che $I_2$ sono integrali, positivi, convergenti e limitati e quindi $\sqrt{k}I_1+\sqrt{k}I_2\to+\infty$.

♠ Dire se la funzione $e^{-xy^2}$ è integrabile nell'insieme $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x\ge a>0\}$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 0<a\le x\le a+k,\ -k\le y\le k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int\int_{D_k}e^{-xy^2}dx\,dy = \int_{-k}^k dy\int_a^{a+k}dx\,e^{-xy^2} = \int_{-k}^k dy\frac{e^{-ay^2}-e^{-(a+k)y^2}}{y^2} \ge \int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}}e^{-ay^2}\frac{1-e^{-ky^2}}{y^2}$$

Per $k$ grande abbastanza e $|y|\le k^{-3/4}$, si ha $e^{-ky^2}\le 1-cky^2$, $c=1-e^{-1}$ da cui

$$\int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}}e^{-ay^2}\frac{1-e^{-ky^2}}{y^2}dy \ge \int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}}e^{-ay^2}\frac{cky^2}{y^2}dy \ge 2e^{-ak^{-3/4}}ckk^{-3/4} = 2e^{-ak^{-3/4}}ck^{1/4}$$

♠ Dire se la funzione $e^{-xy^2}$ è integrabile nell'insieme $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0, y\geq a>0\}$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon 0\leq x\leq k,\ a\leq y\leq a+k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int\int_{D_k} e^{-xy^2}dx\,dy=\int_a^{a+k}dy\int_0^k dx\,e^{-xy^2}=\int_a^{a+k}dy\frac{1-e^{-ky^2}}{y^2}=\sqrt{k}\int_{a\sqrt{k}}^{a\sqrt{k}+k^{3/2}}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$$

e per $k$ grande abbastanza possiamo maggiorare ($C>0$ grande a sufficienza)

$$\sqrt{k}\int_{a\sqrt{k}}^{a\sqrt{k}+k^{3/2}}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\leq C\sqrt{k}\int_{a\sqrt{k}}^{k^{3/2}}\frac{dt}{t^2}<+\infty$$

♠ Si studi l'integrabilità della funzione $\dfrac{1}{|x|\sqrt{|y-x|}}$ nel dominio di definizione. Questa è una funzione di tipo **(c)**. Il dominio è $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3\colon\ x\neq 0, y\neq x\}$. Restringiamo il dominio alla seconda metà del primo quadrante. Se dimostriamo che non è ivi integrabile, allora non lo è in tutto il suo dominio. Sia $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x=\varepsilon_k+r\cos\vartheta, y=2\varepsilon_k+r\sin\vartheta,\ 0\leq r\leq R_k, \pi/4\leq\vartheta\leq\pi/2\}$ e $\varepsilon_k\to 0$, $R_k\to+\infty$. L'integrale è

$$\int_0^{R_k}dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{(\varepsilon_k+r\cos\vartheta)\sqrt{\varepsilon_k+r(\sin\vartheta-\cos\vartheta)}}>$$

$$>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}}\int_0^{\frac{R_k}{\varepsilon_k}}dt\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\frac{1}{1+t\cos\vartheta}\frac{1}{\sqrt{1+t(\sin\vartheta-\cos\vartheta)}}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}}\int_0^{1/2}dt\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+2t}}\xrightarrow[k\to\infty]{}+\infty$$

♠ Si studi l'integrabilità della funzione $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2\sqrt{|y-x|}}$, $x^2+y^2\geq 1$, nel dominio di definizione. Il dominio è $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\geq 1, y\neq x\}$ e siccome la funzione è simmetrica rispetto allo scambio fra $x$ e $y$, ci basta prendere quella parte di $D$ in cui $y>x$. Studiamo

$$\int_1^{R_k}dr\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon_k}^{\frac{4\pi}{4}-\varepsilon_k}\frac{r\,dr}{r^4\sqrt{r(\sin\vartheta-\cos\vartheta)}}d\vartheta$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon_k}^{\frac{3\pi}{4}-\varepsilon_k}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta-\cos\vartheta}}d\vartheta=\frac{1}{2^{1/4}}\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon_k}^{\frac{3\pi}{4}-\varepsilon_k}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\vartheta-\cos\vartheta)}}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2^{1/4}}\int_{\frac{\pi}{4}+\varepsilon_k}^{\frac{3\pi}{4}-\varepsilon_k}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin(\vartheta-\pi/4)}}d\vartheta$$

e per $k \to \infty$ converge dal momento che $\displaystyle\lim_{R_k \to +\infty} \int_1^{R_k} \frac{dr}{r^{7/2}}$ è finito.

♠ Dire se converge l'integrale della funzione $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ esteso all'insieme $G$ compreso fra le funzioni $y = x$ e $y = \sqrt{x^2 + e^{-x}}$ per $x > 0$.

*Svolgimento* facile; Sia $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \le x \le k,\ x \le y \le \sqrt{x^2 + e^{-x}}\}$ e quindi $\displaystyle\int\int_G \sqrt{y - x}dx\,dy = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k dx \int_x^{\sqrt{x^2+e^{-x}}} \sqrt{y - x}dy = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k dx \frac{2}{3}(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_x^{\sqrt{x^2+e^{-x}}}$.

Si ottiene $\displaystyle\frac{2}{3} \lim_{k\to+\infty} \int_0^k (\sqrt{x^2 + e^{-x}} - x)^{\frac{3}{2}} dx$ che è una quantità finita e qundi l'integrale esiste.

♠ Sia $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\underline{x}\| \le \sqrt{2}\}$ e $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\| \ge \sqrt{2},\ x \ge 1,\ |y| \ge 1/x\}$. Trovare per quali valori di $a$ esiste l'integrale $\displaystyle\int\int_{H\cup K} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^a}$

*Svolgimento* Esaminiamo l'integrale su $H$. $\displaystyle\int\int_H f(x, y)dx; dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\int_{\varepsilon\le x^2+y^2\le 2} =$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\varepsilon^1 \frac{r}{r^{2a}} dr = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi \frac{1}{2 - 2a} \left(2^{2-2a} - \varepsilon^{2-2a}\right)$ e vogliamo che per $\varepsilon \to 0$ il limite sia finito da cui $a < 1$. L'integrale su $K$ è due volte l'integrale sulla parte superiore ossia

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\pi/4} d\vartheta \int_2^{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\vartheta}}} \frac{r}{r^{2a}} dr = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\pi/4} d\vartheta \frac{1}{2 - 2a} \left(2^{1-a}(\sin 2\vartheta)^{-1+a} - 2^{2-2a}\right)$$

e l'integrale converge se $-1 + a > -1$ ossia $a > 0$ da cui $0 < a < 1$.

♠ Dire se converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D xy^2 e^{-(xy)^2} dxdy$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 1 \le x^2 y \le 2\}$

*Svolgimento* solo accennato; Si consideri $G_k = \{1/\sqrt{y} \le x \le 2/\sqrt{y},\ 1/k \le y \le k\}$. Si integri e poi si mandi $k \to \infty$. Il limite esiste e vale $1/4$.

♠ Si dica per quali $a, b \in \mathbb{R}$ converge l'integrale $\displaystyle\int\int_D \frac{x^a y^b}{1 + (xy)^4} dxdy$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 1 \le x^2 y \le 2\}$ Risultato: $-1 < 2b - a < 3$

♠ Dati gli insiemi $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon \|\underline{x}\| \le 2\}$, $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon \|\underline{x}\| \le 2,\ y \ge |x|\}$, $C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon 2y \ge x^2\}$.

1) Dimostrare che $\displaystyle\int\int_A \frac{dxdy}{|x^2 + y^2 - 1|^a}$ $\displaystyle\int\int_B \frac{dxdy}{|x^2 + y^2 - 1|^a}$ convergono per gli stessi valori di $a$.

2) Dire per quali valori di $a$ converge l'integrale $\displaystyle\int\int_C \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{|x^2+y^2-1|^a}$

*Svolgimento* Sia $A_1 = \{\|\underline{x}\| < 1\}$ e $A_2 = \{1 < \|\underline{x}\| < 2\}$. L'integrale su $A$ converge se e solo se converge l'integrale su $A_1$ e $A_2$ in quanto la funzione è positiva. Sia $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le \|\underline{x}\| \le 1 - 1/k\}$ e

$$\int\int_{A_1} f(x,y)dxdy = \lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1-1/k} \frac{rdr}{|r^2-1|^a} = 2\pi\int_0^{1-1/k}\frac{rdr}{(1-r)^a(1+r)^a}$$

e l'integrale improprio di una variabile converge per $a < 1$

$$\int\int_{A_2} f(x,y)dxdy = \lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+1/k}^{2} \frac{rdr}{|r^2-1|^a} = 2\pi\int_{1+1/k}^{2}\frac{rdr}{(1-r)^a(1+r)^a} = 2\pi\int_1^2\frac{rdr}{(1-r)^a(1+r)^a}$$

e l'integrale improprio di una variabile converge per $a < 1$. Riunendo si ha convergenza per $a < 1$.

L'integrale su $B$ è come il precedente solo che $\pi/4 \le \vartheta \le 3\pi/4$ e quindi anche esso converge per $a < 1$.

Vediamo ora $\displaystyle\int\int_C \frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a}$. Definiamo $C_1 = C \cap \{\|\underline{x}\| < 1\}$ e $C_2 = C\cap\{\|\underline{x}\| > 1\}$. Chiaramente l'integrale su $C$ converge se e solo se convergono gli integrali su $C_1$ e $C_2$.

Cominciamo con l'integrale su $\displaystyle\int\int_{C_1} \frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a}$.

L'intersezione fra la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ e la parabola $y = x^2/2$ è data da due punti che in coordinate polari sono $(r, \vartheta_r)$ e $(r, \pi - \vartheta_r)$. Dunque se definiamo $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2\colon \underline{x} = (r,\vartheta),\ 0 \le r \le 1-1/k,\ \vartheta_r \le \vartheta \le \pi - \vartheta_r\}$, si ha

$$\int\int_{C_1} \frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a} = \lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k}\frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a}$$

Poi osserviamo che

$$\int\int_{G_k}\frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a} = \int_{\vartheta_r}^{\pi-\vartheta_r} d\vartheta\int_0^{1-1/k} dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} \le \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{1-1/k} dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} =$$
$$= \int_0^\pi d\vartheta\int_0^{1-1/k} dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} \le \pi\int_0^{1-1/k} dr\frac{1}{|r^2-1|^a}$$

e $\lim\limits_{k\to+\infty}\pi d\vartheta\int_0^{1-1/k}dr\dfrac{1}{|r^2-1|^a} = \pi d\vartheta\int_0^1 dr\dfrac{1}{|r^2-1|^a}$. L'integrale improprio converge per $a<1$. Abbiamo ottenuto una maggiorazione di $\displaystyle\int\int_{G_k} f(x,y)dxdy$ indipendente da $k$ e questo induce la convergenza della successione all'integrale su $C_1$. Lungo la stessa linea si ha

$$\int\int_{C_2}\frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a} = \lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k}\frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a}$$

dove $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon \underline{x}=(r,\vartheta),\, 1+1/k\le r\le k,\ \vartheta_r\le\vartheta\le\pi-\vartheta_r\}$,

$$\int\int_{G_k}\frac{e^{-(x^2+y^2)}dxdy}{|x^2+y^2-1|^a} = \int_{\vartheta_r}^{\pi-\vartheta_r}d\vartheta\int_{1+1/k}^{k}dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} \le \int_0^{\pi}d\vartheta\int_{1+1/k}^{k}dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} =$$
$$= \int_0^{\pi}d\vartheta\int_0^{1-1/k}dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} = \pi\int_{1+1/k}^{k}dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} =$$
$$= \pi\int_{1+1/k}^{2}dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} + \pi\int_2^k dr\frac{e^{-r^2}}{|r^2-1|^a} \le$$
$$\le \pi\int_{1+1/k}^{2}dr\frac{1}{|r^2-1|^a} + \pi\int_2^k dr\frac{e^{-r^2}}{3^a}$$

Nel limite si ha

$$\pi\int_1^2 dr\frac{1}{|r^2-1|^a} + \pi\int_2^{+\infty}dr\frac{e^{-r^2}}{3^a}$$

Il primo integrale converge se $a<1$ ed il secondo converge sempre.

♠ Dire per quali valori di $a$ converge l'integrale $\displaystyle\int\int\int_{|x|+|y|+|z|\le 1}\frac{dxdydz}{(1-z^2)(x^2+y^2)^a}$

*Svolgimento*

L'integrale è simetrico rispetto ad ogni cambiamento di variabili in cui almeno una di esse cambia segno per cui l'integrale è $8\displaystyle\int\int\int_{\substack{x+y+z\le 1\\ x,y,z\ge 0}}\frac{dxdydz}{(1-z^2)(x^2+y^2)^a}$. Sia $F_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon\ x,y\ge 0, 1/k\le x+y\le 1\}$ e sia $G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3\colon\ x,y\ge 0, 1/k\le x+y\le 1,\ 0\le z\le 1-x-y\}$.

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\int\int\int_{\substack{x+y+z\leq 1\\ x,y,z\geq 0}} \frac{dxdydz}{(1-z^2)(x^2+y^2)^a} = \lim_{k\to+\infty}\int\int\int_{G_k}\frac{dxdydz}{(1-z^2)(x^2+y^2)^a} = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2}\int\int_{F_k} dxdy\int_0^{1-x-y} dz\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right) = \\
&= \int\int_{F_k} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y} = \\
&= \int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|\leq 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y} + \\
&+ \int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y}
\end{aligned}
$$

Ora

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y} = (fare\ un\ disegno) \\
&= \int\int_{F_2\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y} \leq \\
&\leq \int\int_{F_2\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\
&= \ln 3\int\int_{F_2\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a} \leq \\
&\leq \ln 3\int\int_{F_2\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy 2^a \leq 2^a\ln 3
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\, x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|> 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y}
$$

è una successione positiva crescente limitata dall'alto e quindi convergente.

Esaminiamo ora la successione $\displaystyle\int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\,x,y\geq 0\ \|\underline{x}\|\leq 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y}$.

$$\int\int_{F_k\cap\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\,x,y\geq 0,\ \|\underline{x}\|\leq 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y}\leq$$

$$\leq\int\int_{\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\,x,y\geq 0,\ 1/(\sqrt{2}k)\leq\|\underline{x}\|\leq 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-x-y}{x+y}\leq\ \left(|x|+|y|\geq\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\leq\int\int_{\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\,x,y\geq 0,\ 1/(\sqrt{2}k)\leq\|\underline{x}\|\leq 1/\sqrt{2}\}} dxdy\frac{1}{(x^2+y^2)^a}\ln\frac{2-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\int_0^{2\pi}dt\int_{1/(\sqrt{2}k)}^{1/\sqrt{2}}\frac{rdr}{r^{2a}}(\ln(2-r)-\frac{1}{2}\ln r)=2\pi\int_{1/(\sqrt{2}k)}^{1/\sqrt{2}}\frac{rdr}{r^{2a}}(\ln(2-r)-\frac{1}{2}\ln r)$$

e si vede che per $k\to+\infty$ si hanno delle quantità limitate se $a<1$ mentre per $a\geq 1$ sono illimitate (gli studenti devono verificare ciò ).

• Dire per quali valori di $a>0$ converge l'integrale $\displaystyle\int\int\int_D\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^a}$ dove $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3:\,z\geq 0,\ \sqrt{z}\leq x^2+y^2\leq 1\}$.

*Svolgimento* Usando coordinate polari sferiche, detto

$G_k=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3:\,0\leq\varphi\leq 2\pi,\ \pi/4\leq\vartheta\leq\pi/2-1/k,\ \frac{\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta}{\sin^{\frac{4}{3}}\vartheta}\leq r\leq\frac{1}{\sin\vartheta}\},.$

$$\int\int\int_D\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^a}=\lim_{k\to+\infty}\int\int\int_{G_k}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^a}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k}d\vartheta\int_{\frac{\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta}{\sin^{\frac{4}{3}}\vartheta}}^{\frac{1}{\sin\vartheta}}dr\frac{r^2\sin\vartheta}{r^{2a}}\underbrace{=}_{a\neq 3/2}$$

$$=\lim_{k\to+\infty}2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k}d\vartheta\sin\vartheta\frac{1}{3-2a}\left(\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right)^{3-2a}-\left(\frac{\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta}{\sin^{\frac{4}{3}}\vartheta}\right)^{3-2a}\right)$$

Ora

$$\lim_{k\to+\infty}2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k}d\vartheta(\sin\vartheta)^{2a-1}\frac{1}{3-2a}=2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\vartheta(\sin\vartheta)^{2a-1}\frac{1}{3-2a}$$

ed è esattamente calcolabile. Poi abbiamo

$$-\lim_{k\to+\infty}2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k}d\vartheta(\sin\vartheta)^{-3+\frac{8}{3}a}\frac{1}{3-2a}(\cos\vartheta)^{1-\frac{2}{3}a}$$

ed il limite converge se e solo se $1-\dfrac{2}{3}a > -1$ ossia $0<a<3$, $a\neq 3/2$. Se $a=3/2$ abbiamo

$$= \lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k} d\vartheta\int_{\frac{\cos^{\frac13}\vartheta}{\sin^{\frac43}\vartheta}}^{\frac{1}{\sin\vartheta}} dr\frac{\sin\vartheta}{r} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2-1/k} d\vartheta\sin\vartheta\left(-\ln\sin\vartheta-\frac13\ln\cos\vartheta+\frac43\ln\sin\vartheta\right)$$

Il primo ed il terzo integrale non sono impropri e quindi convergono a

$$2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta\sin\vartheta\left(-\ln\sin\vartheta+\frac43\ln\sin\vartheta\right)$$

Il secondo converge a

$$-\frac{2\pi}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta\sin\vartheta\ln\cos\vartheta$$

che è un integrale improprio convergente. Per vederlo cambiamo variabile $u=\pi/2-\vartheta$ da cui

$$-\frac{2\pi}{3}\int_{\pi/4}^{0} -\cos u\ln\sin u\,du \underbrace{=}_{\sin u=y} \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{0}\ln y dy = \frac{2\pi}{3}(y\ln y-y)\Big|_{\frac{1}{\sqrt2}}^{0} = \frac{2\pi}{3}(-\frac{\ln 2}{2\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2})$$

La conclusione è che anche per $a=3/2$ l'integrale improprio converge ad un valore finito. Anche le coordinate cilindriche funzionano e forse semplificano il calcolo.

♠ Sia $H=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon \|\underline{x}\|\le\sqrt3\}$ e $K=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon |x|+|y|\le 2\}$. Al variare di $a$ si studino gli integrali $\displaystyle\int\int_H\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a}\quad\int\int_K\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a}$

*Svolgimento* Sia $a\ge1$. Sappiamo che $(|x|+|y|)^2\le x^2+y^2+2|xy|\le x^2+y^2+x^2+y^2 = 2(x^2+y^2)$. Ne segue $(|x|^a+|y|^a)^2\le 2(x^{2a}+y^{2a})\le 2(x^2+y^2)^a$. Sia $H_k=\{1/k<\|\underline{x}\|\le\sqrt3\}$ per cui

$$\int\int_H\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a} = \lim_{k\to+\infty}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a} \ge \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2^a}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|y|^a}\ge$$

$$\ge\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2^a}\frac{1}{2^a}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac a2}}$$

Passiamo ora a coordinateb polari per cui

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2^a}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac a2}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2^a}\int_0^{2\pi}dt\int_{\frac1k}^{\sqrt2}\frac{rdr}{r^a}$$

che diverge non appena $1-a<-1$ ossia $a\geq 2$. Dunque per $a\geq 2$ l'integrale diverge.

Sia ora $1\leq a<2$. Dalla convessità della funzione $x^a$ con $x$ nonnegativo, si ha $|x|^a+|y|^a\geq e^{1-a}(|x|+|y|)^a$ ed inoltre da $|x|+|y|\geq\sqrt{x^2+y^2}$ si ha $|x|^a+|y|^a\geq 2^{1-a}(x^2+y^2)^a$. Ne segue

$$\lim_{k\to+\infty}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a}\leq\lim_{k\to+\infty}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|y|^a}\leq\lim_{k\to+\infty}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{2^{1-a}(x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{2^{1-a}}\frac{rdr}{r^a}$$

che converge se $a-1<1$ ossia $a<2$ e quindi converge per $1\leq a<2$.

Sia ora $0\leq a<1$. Se $\|\underline{x}\|\leq 1$ si ha $|x|^a+|y|^a\geq|x|+|y|\geq\sqrt{x^2+y^2}$ per cui spezziamo il dominio $H$ in due parti, $K$ e $J$. In $K$ abbiamo $\|\underline{x}\|\leq 1$ mentre in $J$ abbiamo $1\leq\|\underline{x}\|\leq\sqrt{2}$. L'integrale in $J$ non è improprio e quindi converge.

$$\lim_{k\to+\infty}\int\int_{K_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|2y|^a}\leq\lim_{k\to+\infty}\int\int_{H_k}\frac{dxdy}{|x|^a+|y|^a}\leq\lim_{k\to+\infty}\int\int_{K_k}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{1}\frac{rdr}{r}$$

da cui la convergenza.

Sia $a<0$. L'integrale non è definito per $x=0$ oppure $y=0$ ma la funzione è limitata in un intorno dell'origine per cui l'integrale non è improprio.

Volendo si può passare a coordinate polari fin dall'inizio.

♠ Sia data la funzione $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ definita nell'insieme $H\cup K$ dove $H=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 2\}$ $K=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 1,\ |y|\leq 1/x^2\}$. Stabilire se è convergente l'intgerale su $H\cup K$.

*Svolgimento* Sulla base del Teorema 9.3, l'integrale converge se e solo se converge l'integrale del modulo. Esaminiamo l'integrale su $H$. $\displaystyle\int\int_H f(x,y)dx;dy=\lim_{\varepsilon\to0}\int\int_{\varepsilon\leq x^2+y^2\leq 2}=$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_\varepsilon^1\frac{rr^2|\cos\vartheta||\sin\vartheta|}{r^{2a}}dr$ e vogliamo che $2a-3<1$ ossia $a<2$.

L'integrale su $K$ è due volte l'integrale sulla parte superiore ossia

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{\pi/4}d\vartheta\int_2^{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\vartheta}}}\frac{r^3|\sin\vartheta\cos\vartheta|}{r^{2a}}dr$$

e l'integrale converge se $a-1>-1>0$ ossia $a>0$ per cui l'integrale esteso ad $H\cup K$ converge per $0<a<2$.

• Sia data la seguente funzione $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ definita su $G=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon\ x\geq 0,\ y\geq 0, \underline{x}\neq\underline{0}\}$. Definiamo $G_k=\{\underline{x}=(r\cos t, r\sin t)\colon 0\leq t\leq \pi/2,\ \varepsilon_k\leq r\leq 1\}$ con $\varepsilon_k\to 0$. È facile vedere che $\displaystyle\int\int_{G_k} f(x,y)=0$ per cui $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int\int_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy=0$ e quindi $\displaystyle\int\int_G f(x,y)\,dx\,dy=0$. È corretta la conclusione?

• Si dimostri che $\displaystyle\int\int_D \frac{y-x}{(x+y)^3}dx\,dy$, $D=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^2\colon x\in[1,+\infty), y\in[0,1]\}$ esiste. Poi si verifichi che $\displaystyle\int_0^1 dy\int_1^{+\infty}\frac{y-x}{(x+y)^3}dx=-\frac{1}{2}$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}dx\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}dy=-1$.

*Svolgimento*

$$\int\int_D \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\,dy=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k drr\int_0^{\arcsin\frac{1}{r}}\frac{r(\cos t-\sin t)}{r^3(\cos t+\sin t)^3}dt\leq$$
$$\leq\lim_{k\to+\infty}\int_1^k drr\int_0^{\arcsin\frac{1}{r}}\frac{r\cos t}{r^3}dt=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dr\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}<+\infty.$$

Si è usato $\cos t+\sin t\geq 1$ nel primo quadrante inoltre la funzione è positiva

*Commento* L'integrale doppio improprio è pari a

$$\int\int_{[1,+\infty)\times[0,1]} f(x,y)dx\,dy=\lim_{k\to+\infty}\int\int_{[0,k]\times[0,1]} f(x,y)dx\,dy=\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

Il primo uguale viene dalla definizione laddove si è definita la successione esaustiva $\{G_k\}$, $\{G_k=[1,k]\times[0,1]\}$ ai sensi della definizione **b)** data prima. Il secondo uguale deriva dal fatto che la funzione consente di spezzare l'integrale su $G_k$ come un integrale iterato. Inoltre

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^1 f(x,y)dy=\int_1^{+\infty}dx\int_0^1 f(x,y)dy=-1$$

D'altra parte $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dx\int_0^1 f(x,y)dy=\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 dy\int_1^k dxf(x,y)dx$ e $\displaystyle\int_0^1 dy\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dxf(x,y)dx=\int_0^1 dy\int_1^{+\infty}\frac{y-x}{(x+y)^3}dx=-\frac{1}{2}$. Questo dimostra che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 dy\int_1^k dxf(x,y)dx\neq\int_0^1 dy\lim_{k\to+\infty}\int_1^k dxf(x,y)$ e quindi la sola esistenza di un integrale improprio di funzioni ammissibili non è condizione sufficiente per poter scambiare l'ordine di integrazione qualora si effettui prima l'integrazione rispetto ad una variabile e dopo rispetto ad un'altra.

**• Soluzione della domanda 5), compito A del 20/7/2012**

**In rete è già presente la soluzione ma i calcoli sono un pò diversi.**

Convergenza puntuale per $s \geq 0$

Sia $s \geq 0$. Se $|x| > 1$ il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} e^{-x^2/n^s}$ o non esiste o non è zero. In tal caso non si ha convergenza della serie.

Sia $s \geq 0$ e $|x| < 1$. Si ha convergenza in quanto $\displaystyle\frac{|x|^n}{n} e^{-x^2/n^s} \leq \frac{|x|^n}{n}$ e la serie converge evidentemente

Sia $s \geq 0$ e $x = 1$. Il termine generale della serie è $\displaystyle\frac{e^{-1/n^s}}{n} \geq \frac{1}{2n}$ se $n$ è grande abbastanza. La serie diverge.

Sia $s \geq 0$ e $x = -1$. Il termine generale della serie è $\displaystyle\frac{(-1)^n e^{-1/n^s}}{n}$. Forse è una serie di Leibnitz e per $s = 0$ certamente lo è . Per questo deriviamo $f(x) = x^{-1} e^{-1/x^s}$ ottenendo $e^{-1/x^s}(1 - s/x^s) > 0$ se $x$ è grande abbastanza e quindi è di Leibnitz

Se $s > 0$ e $x = -1$ c'è un secondo modo. Basta fare $\displaystyle\frac{(-1)^n e^{-1/n^s}}{n} = \frac{(-1)^n}{n}\big(1 - O(n^{-s})\big)$ e quindi $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{1+s}}$. La prima è una serie di Leibnitz e la seconda assolutamente convergente essendo $s > 0$.

Convergenza uniforme per $s \geq 0$. Ha senso indagarla solo nell'insieme $[-1, 1)$.

Se $s = 0$ abbiamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} e^{-x^2}$ che converge unifromemente in $[-1, a]$ per ogni $-1 < a < 1$ (vedi la teoria e il teorema di Abel).

Se $s > 0$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} e^{-x^2/k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\big(1 + O(k^{-s})\big)$ e quindi si ha lo stesso risultato.

La convergenza non può essere unifrome in $[-1, 1)$ in quanto se così fosse allora dovrebbe essere $\displaystyle\sup_{-1\leq x<1} \left|\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k}{k}\big(1 + O(k^{-s})\big)\right| < \varepsilon$ per ogni $p, q > k_\varepsilon$. Siccome la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^{1+s}}$ è convergente totalmente per $|x| \leq 1$, certamente $\displaystyle\sup_{-1\leq x<1} \left|\sum_{k=p}^{q} \frac{x^k}{k^{1+s}}\right| < \varepsilon$ per ogni $p, q > \overline{k}_\varepsilon$

e qundi è necessario e sufficiente far vedere che $\sup\limits_{-1\leq x<1}\left|\sum\limits_{k=p}^{q}\frac{x^k}{k}\right|<\varepsilon$ per ogni $p,q>\tilde{k}_\varepsilon$ ma questo è falso in quanto $\sup\limits_{-1\leq x<1}\left|\sum\limits_{k=p}^{q}\frac{x^k}{k}\right|=\sum\limits_{k=p}^{q}\frac{1}{k}$ e questa quantità diverge se $q$ è grande rispetto a $p$.

Convergenza semplice per $s<0$.

$s=-|s|\doteq -t$ con $t>0$. La serie è $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}e^{-x^2k^t}$ converge per ogni valore di $x$.

Sia $s\leq -1$ e quindi $t\geq 1$.

Se $|x|<1$. Essendo $e^{-x^2k^t}\leq 1$ per ogni $x$ si ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-x^2k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^k$ e quindi si ha convergenza anche uniforme in $[-a,a]$ per ogni $0<a<1$.

Se $|x|\geq 1$ maggioriamo $e^{-x^2k^t}\leq e^{-|x|k^t}$ da cui $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-x^2k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-|x|k^t}$. Il massimo della funzione $|x|^ke^{-|x|k^t}$ si ha per $|x|=k^{1-t}\leq 1$ e quindi bisogna prendere $|x|=1$. Abbiamo $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-|x|k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-k^t}$ che chiaramente converge.

Convergenza uniforme per $s\leq -1$.

Dalla maggiorazione precedente $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-|x|k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-k^t}$ segue la uniforme convergenza in per $|x|\geq 1$. Inoltre sia $|x|\in[1-a,1+a]$, $0<a<1/2$. Abbiamo $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-|x|k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(1+a)^k}{k}e^{-(1-a)k^t}$ e chiaramente converge (si usi ad esempio il criterio della radice).

Abbiamo dunque stabilito la convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ per $s\leq -1$.

È rimasto $-1<s<0$.

$\frac{|x|^k}{k}e^{-|x|k^t}=\frac{e^{k\ln|x|-|x|k^t}}{k}$ per cui se $|x|>1$ il termine generale non tende a zero e la serie non può convergere.

Sia quindi $|x|\leq 1$. Chiaramente converge in quanto se $|x|<1$ maggioro con $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^k}{k}e^{-x^2k^t}\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^k$ e per $x=\pm 1$ la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{k^t}$ converge. Ne segue pure la convergenza uniforme in ogni insieme $|x| \le a$ con $0 < a < 1$. Ora prendiamo $|x| \in [1-a, 1]$ e maggioriamo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-(1-a)^2 k^t}$ e converge da cui la convergenza uniforme per $|x| \in [1-a, 1]$ e quindi su tutto $[-1, 1]$.

**Lezione del 22/01/2015**

Data una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ periodica di periodo $T$ ($f(x+T) = f(x)$ per ogni $x$) i suoi coeffcienti di Fourier sono dati da

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} kx) dx, \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} kx) dx$$

e si ha il Teorema senza dimostrazione

**Teorema**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

*La convergenza è uniforme.*

**Lezione del 26/01/2015**

• Calcolare la serie di Fourier della funzione che vale $\cos x$ per $0 \le x \le \pi$ e $-\sin x$ per $-\pi \le x < 0$.

• Calcolare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2 pari a $x^2$ per $0 \le x < 2$.

• Dire se converge l'integrale $\int\int_D xy^2 e^{-(xy)^2} dxdy$ dove $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 1 \le x^2 y \le 2\}$

*Svolgimento* solo accennato; Si consideri $G_k = \{1/\sqrt{y} \le x \le 2/\sqrt{y},\ 1/k \le y \le k\}$. Si integri e poi si mandi $k \to \infty$. Il limite esiste e vale $1/4$.

**Lezione del 27/01/2015**

• Si considerino le tre successioni di funzioni $f_n(x) = \frac{x^{1/n}}{n^n}$, $g_n(x) = \frac{x}{n^{1/n} + |x|}$, $h_n(x) = \frac{x^n}{x^2 + n}$

Per ciascuna di esse si individuino gli insiemi di convergenza puntuale.

Si dica argomentando per quale $N \in \mathbf{N}$ ciascuna delle precedenti successioni converge uniformemente nell'insieme $[-N, N]$

Si dica argomentando se se esiste almeno un insieme illimitato (eventualmente diverso per ciascuna delle funzioni) in cui la convergenza è uniforme.

• Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x\tan y - y\tan x}{xy} & \underline{x} \in D \\ 0 & x = 0 \ \vee \ y = 0 \end{cases}$ dove

$$D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0 \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ y \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi, \ (k, k') \in \mathbf{Z}^2\}$$

Si trovi l'insieme dei punti in cui è continua e si scriva il risultato nello spazio sottostante.

**Lezione del 29/01/2015**

• Calcolare la superficie del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ interna alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. In coordinate polari centrate nell'origine $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$ ed il cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ diventa $\rho = 2\sin t$ con $0 \leq t \leq \pi$. Il cilindro quindi si parametrizza come $x = 2\sin t \sin t$, $x = 2\sin t\cos t$ e $z = u$ con $-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq u \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Chiaramente deve essere $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ ossia $1 - 4\sin^2 t \geq 0$ e quindi $-1/2 \leq \sin t \leq 1/2$ e quindi $0 \leq \sin t \leq 1/2$ ossia $0 \leq t \leq \pi/6$ e $5\pi/6 \leq t \leq \pi$. $\|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_u\|$ è pari a 2. L'integrale è

$$\int_0^{\pi/6} dt 2 \int_{-\sqrt{1-4\sin^2 t}}^{\sqrt{1-4\sin^2 t}} du + \int_{5\pi/6}^{\pi} dt 2 \int_{-\sqrt{1-4\sin^2 t}}^{\sqrt{1-4\sin^2 t}} du = 8 \int_0^{\pi/6} dt \int_0^{\sqrt{1-4\sin^2 t}} du$$

ossia

$$8 \int_0^{\pi/6} dt \sqrt{1 - 4\sin^2 t}$$

È un integrale ellittico e come tale non esprimibile in termini di funzioni elementari.