è legata a considerazioni topologiche, ad esempio, all'assenza di punti di autointersezione dello strato $W_h(S)$, ed è troppo complicata per essere studiata in questo corso.

§ 3.7. *Integrali impropri*

3.71. Definizioni fondamentali. Abbiamo costruito la definizione di integrale per le funzioni limitate in un dominio limitato (insieme jordaniano) dello spazio R_n. Estenderemo qui questa definizone ai casi seguenti: a) una funzione localmente limitata in dominio chiuso illimitato (integrale di prima specie); b) una funzione illimitata in un dominio chiuso limitato (integrale di seconda specie) e c) una funzione illimitata in un dominio chiuso illimitato (integrale di terza specie). Chiamiamo qui *dominio chiuso* un insieme chiuso con l'insieme dei punti interni dappertutto denso.

a. Sia data in un dominio chiuso illimitato $G \subset R_n$ una funzione $f(x)$ ammissibile, cioè limitata e continua a tratti su ogni insieme limitato; vogliamo dare la definizione di integrale improprio di prima specie

$$If = \int_G f(x)\, dx. \tag{1}$$

Consideriamo una successione qualsiasi di domini chiusi limitati $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_m \subset \ldots \subset G$ che verifica la seguente condizione: per ogni sfera $V_\rho = \{x \in R_n: |x| \leqslant \rho\}$, esiste un m tale che il dominio G_m (e quindi ogni dominio successivo) contiene l'insieme $V_\rho \cap G$. Una tale successione di domini si chiama *esaustiva*. Gli integrali

$$I_m f = \int_{G_m} f(x)\, dx \tag{2}$$

esistono. Se, per $m \to \infty$, la successione $I_m(f)$ ha un limite (finito) indipendente dalla successione esaustiva G_m, si dice allora che l'integrale (1) *esiste* (o è *convergente*) e, per definizione, poniamo

$$If \equiv \int_G f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Se, per $m \to \infty$, gli integrali $I_m(f)$ non hanno limite, si dice che l'integrale (1) *è divergente*.

b. Sia data in un dominio chiuso limitato $G \subset R_m$ una funzione *ammissibile* $f(x)$; ciò significa qui che esiste un insieme nullo $Z \subset G$ tale che all'esterno di ogni suo intorno (*3.23 b*) la funzione $f(x)$ è limitata e continua a tratti.

Vogliamo dare la definizione di integrale improprio di seconda specie

$$If = \int_G f(x)\, dx. \tag{4}$$

Consideriamo una qualsiasi successione di insiemi jordaniani $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ tali che ogni insieme complementare $G - G_m$ contenga Z rigorosamente al suo interno e sia contenuto in un ε_m-intorno dell'insieme Z e, inoltre, $\varepsilon_m \to 0$ per $m \to \infty$. Una tale successione di insiemi $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ si dice *esaustiva*. Se, per $m \to \infty$, l'integrale

$$I_m(f) = \int_{G_m} f(x)\, dx \tag{5}$$

ha un limite indipendente dalla successione di insiemi G_m, si dice che l'integrale (4) *esiste* o *è convergente* (in caso opposto *è divergente*) e, per definizione, si pone

$$If \equiv \int_G f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\, dx. \tag{6}$$

c. Sia data in un dominio chiuso illimitato $G \subset R_n$ una funzione $f(x)$, eventualmente illimitata. E più precisamente, supponiamo che in ogni sfera $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$ esista un insieme nullo Z_ρ tale che la funzione $f(x)$ sia limitata e continua a tratti sulla differenza fra V_ρ e ogni intorno di Z_ρ. Chiameremo qui *ammissibili* tali funzioni. La definizione di « integrale improprio di terza specie »

$$If = \int_G f(x)\, dx \tag{7}$$

si costruisce nel seguente modo. Chiameremo *esaustiva* ogni successione $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ di domini jordaniani limitati se, per ogni sfera $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un m tale che il dominio G_m (e quindi ogni dominio successivo) contiene l'insieme $V_\rho \cap G$ ad eccezione dell' ε-intorno dell'insieme Z_ρ e che se, per un $\rho_1 > \rho$, questo dominio G_m è contenuto nella sfera V_{ρ_1}, esso non contiene né l'ε-intorno né l'insieme Z_{ρ_1}. Allora gli integrali

$$I_m = \int_{G_m} f(x)\, dx \tag{8}$$

sono definiti; se, per $m \to \infty$, questi integrali tendono a un limite If indipendente dalla successione esaustiva G_m, si dice che l'integrale (7) *esiste* o *è convergente* (in caso opposto, *divergente*)