

e, per definizione, si pone

$$If \equiv \int_G f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{G_m} f(x) dx. \quad (9)$$

d. La costruzione delle successioni esaustive nei tre casi a, b e c gode della seguente proprietà: se $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ e $G'_1 \subset G'_2 \subset \dots$ sono due successioni esaustive (per un particolare tipo di integrale improprio), allora il dominio G_m della prima successione è contenuto in un dominio G'_m della seconda, e viceversa. Pertanto, avendo due successioni esaustive, si può sempre costruire la successione esaustiva mista

$$G_{i_1} \subset G'_{i'_1} \subset G_{i_2} \subset G'_{i'_2} \subset \dots \quad (10)$$

Ne segue che l'esistenza di un limite per gli integrali del tipo (2), rispetto ad ogni successione esaustiva, implica l'identità di questi limiti: il limite rispetto alla successione mista (10) deve coincidere sia con il limite rispetto alla successione $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ che con il limite rispetto alla successione $G'_1 \subset G'_2 \subset \dots$, da cui deriva necessariamente l'uguaglianza di questi limiti.

e. Vediamo dunque che, in tutti i casi, la definizione dell'integrale improprio If di una funzione ammissibile $f(x)$ è ridotta alla definizione del limite della successione degli integrali propri della funzione $f(x)$ su una successione esaustiva qualsiasi. Ne deriva, in particolare, che l'integrale improprio, così come quello proprio, gode della proprietà lineare: se esso è convergente per due funzioni qualsiasi $f_1(x)$ e $f_2(x)$, lo è anche per ogni combinazione lineare $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ (c_1 e c_2 sono dei numeri) e

$$I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 If_1 + c_2 If_2.$$

3.72. Integrali impropri delle funzioni non negative e convergenza assoluta.

a. Se, oltre alle ipotesi 3.71, la funzione $f(x)$ è non negativa, $f(x) \geq 0$, allora le definizioni di tutti gli integrali impropri 3.71 a — c diventano più semplici. E precisamente, è sufficiente considerare gli integrali propri del tipo (2) soltanto per una particolare successione esaustiva G_m e verificare soltanto che l'insieme di questi integrali sia limitato. In virtù della relazione indicata nel 3.71 d fra successioni esaustive qualsiasi, dal fatto che gli integrali (2) siano limitati rispetto ad una successione G_m e che la funzione $f(x)$ sia non negativa segue che gli integrali del tipo (2) sono pure limitati rispetto ad ogni altra successione esaustiva. E il fatto che la successione $I_m f$ sia limitata con la relazione $I_1 f \leq I_2 f \leq \dots$ significa che il limite della successione numerica $I_m f$ esiste rispetto ad ogni successione esaustiva, da cui, in virtù della proposizione 3.71 d, deriva l'esistenza dell'integrale improprio corrispondente.

b. Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e che le due funzioni siano ammissibili (3.71 c). Se l'integrale di $g(x)$ sul dominio G esiste, esiste anche l'integrale di $f(x)$ su G , e si ha $If \leq Ig$. Infatti, gli integrali di $g(x)$ rispetto ad una successione esaustiva tendono a un limite e sono pertanto maggiorati dal numero Ig ; perciò sono maggiorati dallo stesso numero Ig anche gli integrali della funzione $f(x)$ rispetto a questa successione esaustiva; da qui e dalla proposizione a deriva che l'integrale If esiste e che la disuguaglianza $If \leq Ig$ è verificata, che è quanto affermato.

Come conseguenza otteniamo: se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ sono due funzioni ammissibili e se l'integrale di $f(x)$ sul dominio G è divergente, sarà divergente anche l'integrale della funzione $g(x)$ su questo dominio.

I due risultati sopra ottenuti rappresentano il criterio del confronto per gli integrali impropri.

c. Se $f(x)$ è una funzione ammissibile non negativa e se l'integrale $If = I_G f$ sul dominio G è convergente, allora l'integrale $I_Q f$ su ogni dominio minore $Q \subset G$ è anch'esso convergente e si ha $I_Q f \leq I_G f$. Infatti, se $\chi_Q(x)$ è la funzione caratteristica del dominio Q , allora la funzione $\chi_Q(x)f(x)$ è ammissibile come la funzione $f(x)$ e verifica la disuguaglianza $0 \leq \chi_Q(x)f(x) \leq f(x)$; applicando a, otteniamo

$$I_G \chi_Q f = I_Q f \leq I_G f,$$

come dovevasi dimostrare.

Come conseguenza otteniamo: se l'integrale su un dominio Q di una funzione ammissibile $f(x) \geq 0$ è divergente, sarà divergente anche l'integrale di $f(x)$ su ogni dominio maggiore $G \supset Q$.

d. Se, per una funzione ammissibile $f(x) \geq 0$, gli integrali su due insiemi jordaniani G' e G'' sono convergenti, allora il suo integrale sull'insieme $G' \cup G'' = G$ sarà anch'esso convergente.

Sostituendo G'' con $G'' - G' \cap G''$, si può ridurre l'affermazione al caso in cui i due insiemi jordaniani G' e G'' non si intersecano. Sia G'_m una successione esaustiva di insiemi jordaniani per il dominio G' , e G''_m per il dominio G'' . È evidente allora che gli insiemi $G'_m \cup G''_m$ formano una successione esaustiva per l'insieme G .

Inversamente, ogni successione esaustiva G_m per l'insieme G genera due successioni $G'_m = G' \cap G_m$ e $G''_m = G'' \cap G_m$ che, evidentemente, sono esaustive per i domini G' e G'' .

In accordo con la proposizione 3.33 b, abbiamo

$$\int_{G'_m \cup G''_m} f(x) dx = \int_{G'_m} f(x) dx + \int_{G''_m} f(x) dx, \quad (1)$$

e poiché gli integrali a secondo membro tendono ad un limite, l'integrale a primo membro tende anch'esso a un limite. Da qui e in accordo con 3.71 d deriva l'esistenza dell'integrale della funzione $f(x)$ anche sul dominio $G = G' \cup G''$. In particolare,