

per due domini non intersecantisi G' e G'' , passando al limite nella (1), otteniamo l'uguaglianza

$$\int_{G' \cup G''} f(x) dx = \int_{G'} f(x) dx + \int_{G''} f(x) dx.$$

È ovvio che il risultato ottenuto si estende facilmente a ogni numero (finito) di domini jordaniani $G', G'', \dots, G^{(k)}$.

e. Principio di localizzazione. Sia data una funzione ammissibile illimitata $f(x) \geq 0$ in un dominio chiuso limitato $G \subset R_n$. Se per ogni punto $a \in G$ esiste un intorno $V(a)$ in cui la funzione $f(x)$ è integrabile (cioè l'integrale improprio di seconda specie di $f(x)$ su $V(a)$ è convergente), allora la funzione $f(x)$ è integrabile su tutto il dominio G ; se invece, almeno per un punto $b \in G$, esiste un intorno $V(b)$ in cui la funzione $f(x)$ non è integrabile, essa non è integrabile neppure su tutto il dominio G .

Dimostrazione. Dato per ogni punto $a \in G$ un intorno $V(a)$ in cui la funzione $f(x)$ è integrabile, scegliamo una copertura finita $V(a_1), \dots, V(a_k)$ del dominio G . Ma in virtù della proposizione d, la funzione $f(x)$ è integrabile anche sull'unione G di questi intorni, come dovevasi dimostrare.

Se la funzione $f(x)$ non è integrabile sull'intorno $V(b)$, essa non è integrabile neppure su tutto il dominio G in accordo con la proposizione c.

f. Integrali assolutamente convergenti. Sia $f(x)$ una funzione ammissibile data su un dominio $G \subset R_n$. Supponiamo che si abbia una funzione ammissibile non negativa $g(x)$ il cui integrale su G è convergente. Allora, se $|f(x)| \leq g(x)$, le funzioni $f(x)$ e $|f(x)|$ sono pure integrabili sul dominio G , e si ha

$$\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| dx \leq \int_G g(x) dx. \quad (2)$$

Per dimostrare questa proposizione consideriamo una successione esaustiva di insiemi jordaniani $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G$; per $k < m$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{G_m} f(x) dx - \int_{G_k} f(x) dx \right| &= \left| \int_{G_m - G_k} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{G_m - G_k} |f(x)| dx \leq \int_{G_m - G_k} g(x) dx = \int_{G_m} g(x) dx - \int_{G_k} g(x) dx. \end{aligned}$$

Il secondo membro della disuguaglianza ottenuta è non negativo e tende a zero per $k \rightarrow \infty$ e $m \rightarrow \infty$ in virtù della convergenza dell'integrale di $g(x)$. In accordo con il criterio di Cauchy, esiste pure il limite degli integrali della funzione $f(x)$ sui domini G_m ; ciò significa che, in accordo con la proposizione 3.71 c, esiste

anche l'integrale sul dominio G della funzione $f(x)$. L'esistenza dell'integrale di $|f(x)|$ discende dalla proposizione b. Per $m \rightarrow \infty$, passando al limite nella disuguaglianza

$$\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_m |f(x)| dx \leq \int_{G_m} g(x) dx,$$

otteniamo la disuguaglianza richiesta (2).

L'integrale della funzione $f(x)$ che soddisfa tutte le suddette condizioni si dice *assolutamente convergente*. È interessante notare che in R_n , in generale, non esistono integrali che non convergano assolutamente (si veda il problema 6).

3.73. Esempi.

a. Sia $f(r) \geq 0$ una funzione data sulla semiretta $0 < a \leq r < \infty$, continua a tratti su ogni intervallo finito $a \leq r \leq b$.

Ponendo $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = |x|^2$, otteniamo la funzione ammissibile

$f(r) = f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$ definita in R_n . Consideriamola nel dominio

$G = \{x \in R_n : |x| \geq a, \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$, dove Σ è un insieme dato di area positiva sulla sfera unitaria dello spazio R_n . Studiamo il problema della convergenza dell'integrale improprio di prima specie

$$\int_G f(r) dx. \quad (1)$$

Come successione esaustiva, consideriamo i domini $G_m = \{x \in R_n : a \leq |x| \leq m, \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$. L'integrale della funzione $f(r)$ sul dominio G_m viene calcolato in base alla regola 3.65 a, e precisamente

$$\int_{G_m} f(r) dx = \int_{r=a}^m \left\{ \int_{r\Sigma} f(r) d(r\Sigma) \right\} dr,$$

dove l'insieme $r\Sigma$ giace sulla sfera di raggio r . Poiché la funzione $f(r)$ è costante su questa sfera, l'integrale interno, in accordo con la proposizione 3.63 c, vale

$$f(r) |r\Sigma| = f(r) r^{n-1} |\Sigma|.$$

Otteniamo finalmente

$$\int_{G_m} f(r) dx = |\Sigma| \int_{r=a}^m f(r) r^{n-1} dr.$$