Quanto alla convergenza dell'integrale (1), dobbiamo qui far tendere m verso $+\infty$. La questione della convergenza di questo integrale si riduce così alla convergenza in R_1 dell'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

Per esempio, utilizzando il risultato *P11.11 a*, possiamo dire che l'integrale

$$\int_G \frac{dx}{r^\alpha}$$

è convergente per $\alpha > n$ e divergente per $\alpha \leqslant n$. Si osservi che il risultato è indipendente dall'insieme Σ sulla sfera unitaria in R_n, che definisce il dominio G (purché l'insieme Σ abbia un'area positiva).

In accordo con il criterio del confronto *3.72 b*, per le stesse condizioni, è convergente o divergente anche l'integrale

$$\int_G \theta(x) \frac{dx}{r^\alpha}, \tag{2}$$

dove $\theta(x)$ è una funzione ammissibile, tendente a un limite positivo per $|x| \to \infty$. Se la funzione $\theta(x)$ è soltanto limitata per $|x| \to \infty$, allora, in base al criterio del confronto *3.72 b*, si può affermare soltanto che l'integrale (2) è convergente per $\alpha > n$.

b. Sia $f(r) \geqslant 0$ una funzione data su un intervallo $0 < r \leqslant b$, continua a tratti su ogni intervallo chiuso $a \leqslant r \leqslant b$ $(a > 0)$ e, eventualmente, illimitata per $r \to 0$. Ponendo $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = |x|^2$, otteniamo la funzione ammissibile $f(r) = f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$ definita in R_n per $0 < |x| \leqslant b$. Consideriamola nel dominio $G = \{x \in R_n,\ 0 < |x| \leqslant b,\ \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$, dove Σ è un insieme di misura positiva sulla sfera unitaria in R_n, e studiamo il problema della convergenza dell'integrale improprio di seconda specie

$$\int_G f(r)\, dx. \tag{3}$$

Come successione esaustiva consideriamo i domini

$$G_m = \left\{x \in R_n : \frac{1}{m} \leqslant |x| \leqslant b,\ \frac{x}{|x|} \in \Sigma\right\}.$$

Analogamente all'esempio **a**, abbiamo

$$\int_{G_m} f(r)\, dx = |\Sigma| \int_{r=1/m}^{b} f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

Il problema della convergenza dell'integrale (3) si riduce così a quello della convergenza in R_1 dell'integrale improprio di seconda specie

$$\int_0^b f(r)^{n-1}\, dr.$$

Per esempio, utilizzando i risultati *P11.22 a*, otteniamo che l'integrale

$$\int_G \frac{dx}{r^\alpha}$$

è convergente per $\alpha < n$ e divergente per $\alpha \geqslant n$.

In base al criterio del confronto *3.72 b*, con le stesse condizioni, è convergente o divergente l'integrale

$$\int_G \theta(x) \frac{dx}{r^\alpha}, \tag{5}$$

dove $\theta(x)$ è una funzione ammissibile tendente a un limite positivo per $x \to 0$. Se invece la funzione $\theta(x)$ è soltanto limitata per $x \to 0$, allora, utilizzando il criterio del confronto *3.72, b*, si può affermare soltanto che l'integrale (4) è convergente per $\alpha < n$.

c. Otteniamo come conseguenza degli esempi *a* e *b* che l'*integrale di terza specie della funzione* $1/r^\alpha$ *su un «angolo solido»* $G = \{x \in R_n : \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$ (dove, come sopra, Σ è un insieme di misura positiva sulla sfera unitaria in R_n) *non esiste per nessun* α.

d. Vogliamo analizzare la convergenza dell'integrale

$$\iint_{G_i} \frac{x^2 - y^2}{r^4}\, dx\, dy \tag{5}$$

in ciascuno dei domini G_i $(i = 1, 2, 3)$ rappresentati nella fig. 3.20.

Consideriamo dapprima il dominio G_1.

Per ogni ε positivo e per un ρ sufficientemente grande, il settore $\{x, y \in R_2 : \varepsilon < y/x < 1 - \varepsilon,\ x > \rho\}$ appartiene a questo dominio. L'espressione integranda nel detto settore è non minore di C/r^2 per un $C > 0$. Di conseguenza, l'integrale (5) è divergente su questo settore e, a maggior ragione, sul dominio G_1 in accordo con il risultato dell'esempio *a* e del criterio del confronto *3.72 b*. Al dominio G_2 appartiene il settore $\{x, y \in R_2 : 0 \leqslant y/x \leqslant 1 - \varepsilon,\ r \leqslant 1\}$; in questo settore l'espressione integranda è ugual-