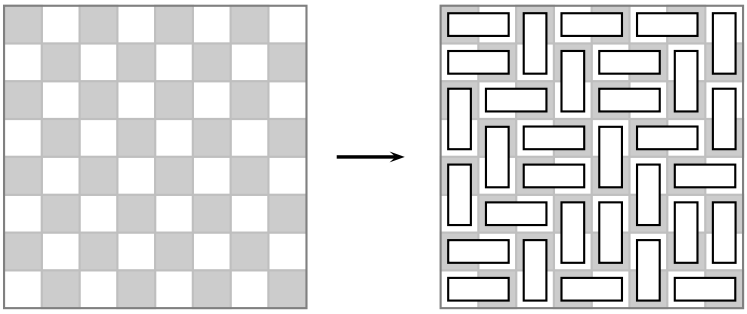
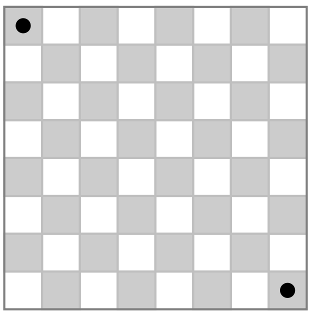
La matematica del domino

Se lei si spiega con un esempio
non capisco più niente.
(Ennio Flaiano, *Frasario Essenziale*)

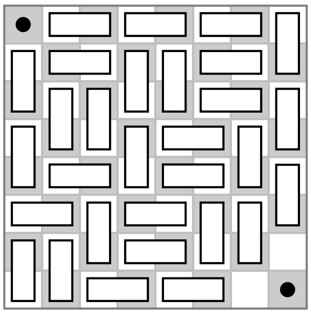
Per quasi trent'anni, attraverso la rubrica *Mathematical Games* della rivista Scientific American, Martin Gardner ha raccontato in modo informale e divertente alcune importanti idee della matematica. Questi articoli sono stati via via raccolti in una decina di libri e nel primo di questi, *Mathematical puzzles and diversions* ([3]), compare il seguente problema (si veda anche [4]): una scacchiera 8×8 può essere ricoperta completamente con le tessere del domino (una tessera da domino è un rettangolo 1×2) in modo da non avere sovrapposizioni. Questo risultato si può ottenere in vari modi.



Supponiamo ora di togliere due caselle agli angoli opposti. È ancora possibile ricoprire la scacchiera ridotta?



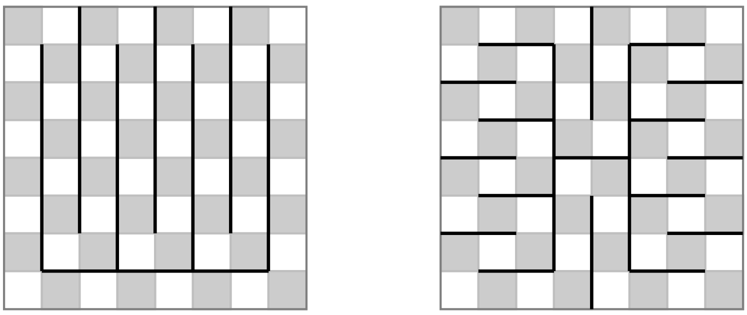
Prima di svelare come si risolve il problema facciamo qualche considerazione. Se fosse stata tolta una sola casella, la risposta sarebbe senz'altro no in qualunque posizione essa si trovasse. Ogni tessera infatti copre due caselle e dunque per ricoprire senza sovrapposizioni tutta la scacchiera il numero di caselle utilizzabili deve essere un multiplo di due, mentre se togliessimo una sola casella quelle rimaste sarebbero in numero dispari: $64 - 1 = 63$. Quest'argomentazione costituisce un esempio di una delle tecniche dimostrative più usate in matematica: il ragionamento per assurdo. In questo caso si suppone che la tesi da dimostrare sia vera (esiste una copertura) e si cerca di individuare un argomento (ogni copertura copre un numero pari di caselle) che sia in contraddizione con una delle ipotesi (la regione da coprire ha un numero dispari di caselle). Quando però se ne tolgono due, le caselle utilizzabili restano in numero pari, $64 - 2 = 62$, e dunque il ragionamento precedente non ci aiuta: abbiamo dimostrato che per poter ricoprire la scacchiera le caselle rimaste devono essere in numero pari, ma non sappiamo se questa è una condizione sufficiente. Anzi il problema sembra ora dipendere anche dalla posizione delle caselle tolte. Se si tolgono infatti due caselle adiacenti è facile ricoprire il resto della scacchiera, ma se togliamo i due angoli opposti e proviamo a disporre le tessere sulla scacchiera vediamo che tutti i nostri tentativi si bloccano prima di completare la copertura:



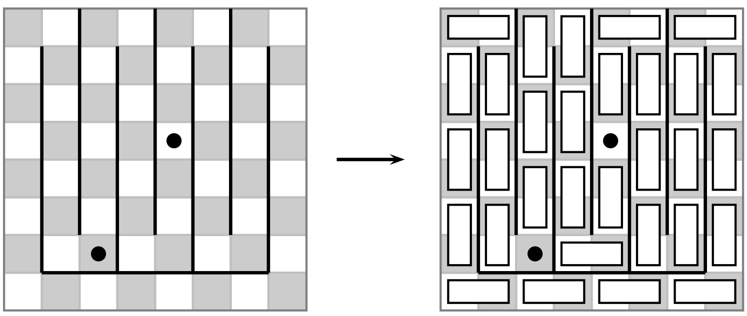
La risposta al problema potrebbe dunque essere negativa. Per provarlo utilizzeremo ancora la tecnica del ragionamento per assurdo, ma con un'argomentazione più sottile. Supponiamo quindi che si possa coprire la scacchiera senza sovrapposizioni anche dopo aver tolto due caselle agli angoli opposti. Ora ogni tessera comunque sia disposta e orientata (orizzontalmente o verticalmente) copre sempre sia una casella nera che una casella bianca. Nell'ipotetica copertura verrebbero impiegate $62/2 = 31$ tessere e dunque dovrebbero esserci 31 caselle nere e 31 caselle bianche. Dato però che le caselle tolte sono entrambe nere, le caselle da ricoprire sono 32 bianche e 30 nere e quindi abbiamo una contraddizione. Questo ragionamento dimostra che è impossibile ricoprire la scacchiera non solo nel caso in cui vengano tolte due caselle agli angoli opposti, ma ogni volta che venga tolta una coppia di caselle dello stesso colore. A volte è l'apparenza misteriosa del linguaggio simbolico a rendere difficile per molte persone che si avvicinano alla matematica apprezzare l'eleganza di certi ragionamenti. Un indovinello come quello appena risolto mette in evidenza come con strumenti elementari e con un po' di fantasia si possano fare esperimenti su questioni interessanti. Se poi si hanno anche un po' di fiuto e di fortuna, usando una scacchiera e delle tessere da domino si possono porre domande particolarmente promettenti che conducono a veri e propri problemi di ricerca. È quanto cercheremo di realizzare attraverso i prossimi esempi.

⋆ ⋆ ⋆

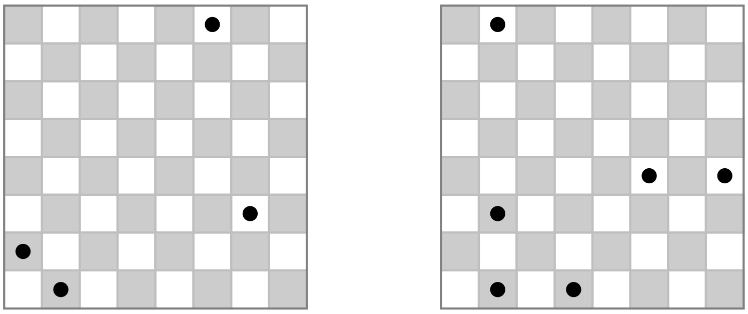
Spesso un problema è solo lo stimolo ad indagare un certo argomento e scavando più in profondità si scoprono a volte veri e propri piccoli tesori. Quindi anche se l'indovinello è risolto proviamo a continuare la nostra discussione. Cosa succede per esempio se le due caselle tolte sono di colore diverso? In questo caso, come vedremo tra un momento, la copertura è sempre possibile, ossia la condizione che le caselle abbiano colore diverso è non solo necessaria ma anche sufficiente. Ma come facciamo a provarlo? La dimostrazione per assurdo ci ha aiutato a chiarire che in determinate condizioni non è possibile ricoprire la scacchiera. Proviamo ora a cambiare tecnica svolgendo un'argomentazione che non solo prova l'esistenza della copertura ma addirittura suggerisce come costruirla. A tal proposito, mettiamo delle barriere sulla scacchiera in modo da individuare un percorso chiuso che attraversa tutte le caselle una e una sola volta. Ci sono diversi modi per farlo, ecco due esempi:



Se togliamo due caselle qualunque di colore diverso il percorso chiuso verrà diviso in due parti, ciascuna delle quali ha un numero pari di caselle (ciò non sarebbe vero se le due caselle avessero lo stesso colore). Per realizzare la copertura possiamo quindi partire da una delle caselle proibite e disponendo le tessere lungo il percorso (senza attraversare le barriere) riempiamo il primo tratto. Analogamente ricopriamo anche il secondo tratto.



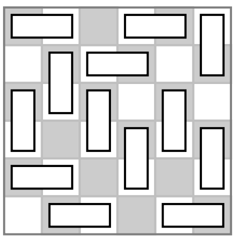
L'analisi di un problema di questo tipo potrebbe continuare aumentando il numero di caselle da togliere e cercando dei teoremi che garantiscano l'esistenza della copertura o che ne dimostrino l'impossibilità. Quando togliamo un numero maggiore di coppie di caselle, possiamo riciclare la parte che riguardava la condizione necessaria: comunque le caselle proibite devono essere una metà nere e una metà bianche. Determinare invece una condizione necessaria e sufficiente diventa più complicato: il problema comincia fortemente a dipendere non solo dal colore ma anche dalla posizione delle caselle da togliere. Negli esempi seguenti è stato tolto un numero uguale di caselle nere e bianche ma le parti che rimangono non sono ricopribili. Come mai?



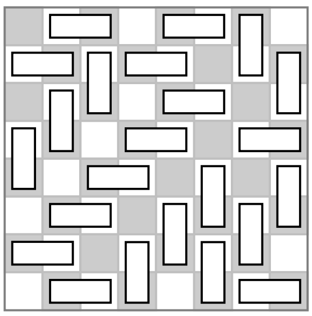
Supponiamo che vengano tolte due caselle bianche e due nere: riuscite a dimostrare che è possibile ricoprire il resto della scacchiera se almeno due delle caselle tolte di colore opposto non stanno sul bordo?

⋆ ⋆ ⋆

Per ora abbiamo ragionato ponendoci il problema di coprire la scacchiera o una sua parte in modo completo. Se noi disponessimo le tessere senza la dovuta attenzione potrebbe però capitare che una certa configurazione pur essendo ricopribile verrebbe coperta solo in parte lasciando dei buchi. Nella figura seguente ci sono due esempi:



scacchiera 6×6
13 tessere



scacchiera 8×8
23 tessere

Questi risultati si possono "peggiorare"? Ossia si può disporre un numero minore di tessere in modo che sia impossibile aggiungerne altre alla copertura? Qual è il numero minimo di tessere che si possono impiegare a tal fine? Il problema è stato proposto per la prima volta da Bill Sands in [9] e ora ripercorreremo una parte delle sue considerazioni. Fissiamo alcune notazioni: per un'ipotetica copertura della scacchiera $n \times n$ siano t il numero totale di tessere e b il numero totale di buchi. Questi tre parametri non sono indipendenti: ognuna delle n^2 caselle è coperta dalla metà di una tessera oppure è un buco ossia $n^2 = 2t + b$. Si può andare più lontano se classifichiamo le tessere e i buchi in base alla loro posizione: per le tessere denotiamo con t_0 il numero di quelle che non toccano il bordo, con t_1 quelle che toccano il bordo ma non sono negli angoli e con t_2 quelle che sono negli angoli. L'indice in basso ricorda il numero di lati del bordo che sono toccati (supponiamo che $n > 2$). Analogamente per i buchi introduciamo b_0, b_1 e b_2. Per esempio per la copertura della scacchiera 6×6 nella figura precedente: $t = 13$, $t_0 = 5$, $t_1 = 5$, $t_2 = 3$ mentre $b = 10$, $b_0 = 5$, $b_1 = 4$ e $b_2 = 1$. È il momento di vedere come si individua la relazione che risulterà decisiva. A tal fine contiamo le coppie adiacenti buco-tessera in due modi. Prima rispetto ai buchi, ossia per ogni buco consideriamo le tessere che lo circondano: i buchi interni sono adiacenti a 4 tessere, i buchi che toccano il bordo e non sono negli angoli sono adiacenti a 3 tessere e infine i buchi negli angoli sono adiacenti a 2 tessere. Ora rifacciamo lo stesso conto rispetto alle tessere: le tessere interne sono adiacenti al massimo a 4 buchi, le tessere che toccano il bordo e non sono negli angoli sono adiacenti al massimo a 3 buchi e le tessere negli angoli sono adiacenti al massimo a 2 buchi. Quindi se confrontiamo i due calcoli otteniamo

$$4b_0 + 3b_1 + 2b_2 \leq 4t_0 + 3t_1 + 2t_2$$

ossia, dato che $t = t_0 + t_1 + t_2$ e $b = b_0 + b_1 + b_2$,

$$4b - b_1 - 2b_2 \leq 4t - t_1 - 2t_2.$$

Siccome due buchi non possono essere adiacenti (altrimenti in quella posizione si può inserire una tessera), lungo il bordo buchi e tessere sono al più alternati e il numero di buchi non può superare il numero di tessere: $b_1 + b_2 \leq t_1 + t_2$. Quindi la disuguaglianza precedente diventa

$$4b - b_2 \leq 4t - t_2.$$

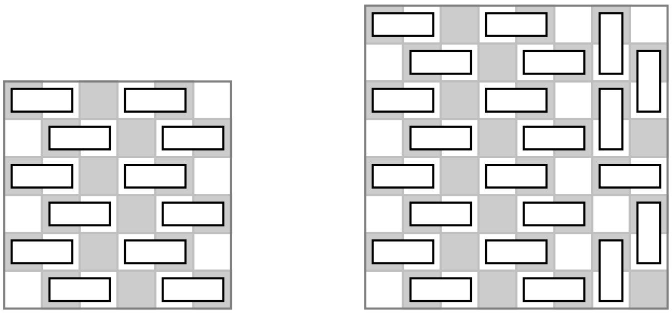
Inoltre la somma delle tessere e dei buchi negli angoli è uguale al numero di angoli della scacchiera cioè a 4. Così $b_2 - t_2 \leq 4$ e abbiamo che

$$b \leq t + 1.$$

Infine ricordando che $b = n^2 - 2t$ otteniamo una stima del numero di tessere t rispetto alla dimensione della scacchiera n:

$$\frac{n^2 - 1}{3} \leq t.$$

Come possiamo utilizzare questo risultato? La disuguaglianza dice che, comunque ricopriamo una scacchiera $n \times n$ con tessere del domino lasciando eventualmente solo buchi 1×1, il numero di tali tessere sarà sempre maggiore o uguale a $(n^2 - 1)/3$. Se per esempio $n = 6$ allora $t \geq 35/3 \approx 11.67$ ossia $t \geq 12$ (t è un numero intero). Quindi se riusciamo a ricoprire la scacchiera con $t = 12$ tessere, possiamo essere certi di aver realizzato la copertura minima che stavamo cercando. Come si può vedere nella prossima figura, tale copertura è effettivamente realizzabile e anzi con lo stesso schema è possibile risolvere il problema per ogni n che sia divisibile per 3. Se invece $n = 8$ la stima è un po' ottimistica in quanto $t \geq 21$, mentre si verifica con una faticosa ricerca esaustiva che il minimo si ottiene per $t = 22 > 21$. Nel caso in cui n non sia un multiplo di 3, la copertura minima è stata per ora determinata solo per $n \leq 12$ mentre quando n è maggiore esistono soltanto delle stime più precise di quella che abbiamo dedotto qui (per un approfondimento si veda [6]).



scacchiera 6×6 12 tessere — scacchiera 8×8 22 tessere

⋆ ⋆ ⋆

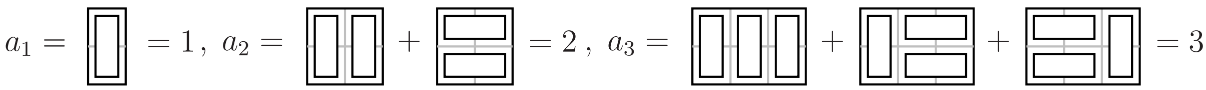
Per ora ci siamo occupati solo di dimostrare se esista o meno una certa copertura. Ma in alcuni casi può essere particolarmente interessante calcolare anche in quanti modi sia possibile ricoprire una scacchiera. Se per esempio consideriamo la scacchiera 8×8 ci sono ben 12988816 modi di ricoprirla. Esiste anche una formula generale per la scacchiera rettangolare $m \times n$ quando almeno una delle due dimensioni è pari (altrimenti non ci sono coperture complete!):

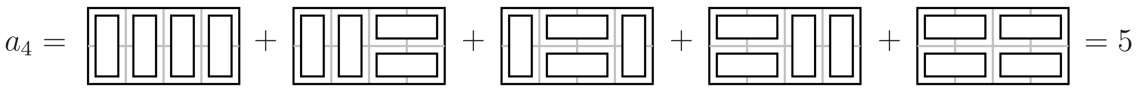
$$T_{m\times n} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(4\cos^2\left(\frac{\pi j}{m+1}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right)^{1/4}.$$

È sorprendente che il risultato di questo calcolo sia sempre un numero intero, ma c'è di più: se la scacchiera è quadrata, diciamo $n \times n$, tale numero è un quadrato perfetto se n è divisibile per 4 o il doppio di un quadrato perfetto se il resto della divisione per 4 è 2. Ecco alcuni valori:

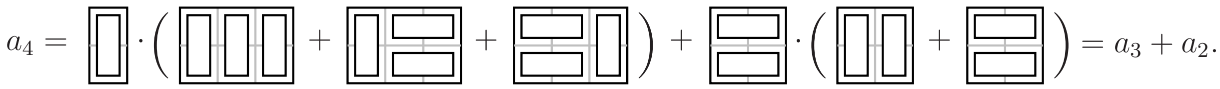
$$T_{2\times2} = 2\,, \quad T_{4\times4} = 6^2\,, \quad T_{6\times6} = 2 \cdot 58^2\,, \quad T_{8\times8} = 3604^2.$$

Evidentemente la simmetria della regione da riempire (una proprietà geometrica) si ripercuote sulla fattorizzazione del numero totale delle coperture (una proprietà algebrica). A tal proposito si veda l'interessante articolo di Jockusch [7]. La derivazione di questa formula è piuttosto complicata e interessò prima i fisici che i matematici (si veda per esempio [8]) ai quali serviva per il calcolo dell'entropia di strutture planari di bipoli magnetici. Qui considereremo un esempio più semplice: il calcolo del numero di coperture di un rettangolo $2 \times n$. Denotiamo il numero delle coperture con a_n e determiniamo i primi elementi di questa successione realizzando direttamente le coperture possibili:

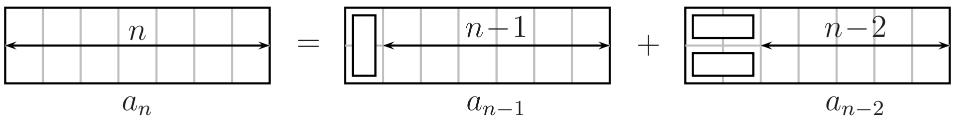




Ora proviamo ad individuare una legge generale per il calcolo. Notiamo che le coperture del rettangolo 2×4 si possono "convenientemente" scomporre evidenziando una dipendenza di a_4 dai due termini precedenti a_3 e a_2:



Estendendo questa osservazione al caso del rettangolo $2 \times n$ possiamo dire che le prime due caselle a sinistra del rettagolo possono essere coperte in due modi distinti:

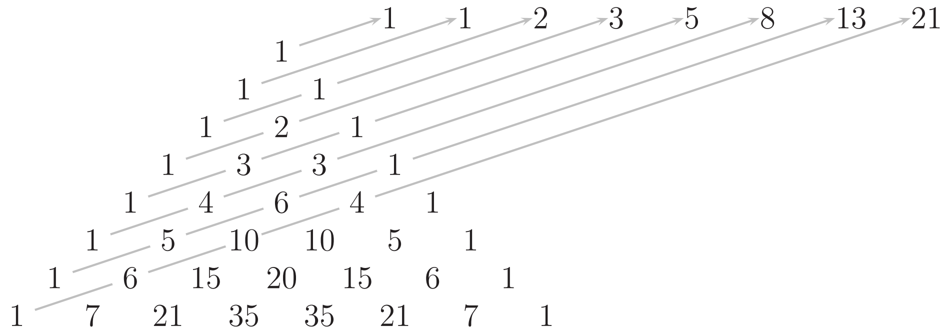


Ne segue che gli elementi della successione possono essere generati ricorsivamente partendo dai primi due elementi e seguendo l'equazione $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. La soluzione di questa ricorsione è la famosa successione di Fibonacci

$$f_1 = 1\,,\quad f_2 = 1\,,\quad f_3 = 2\,,\quad f_4 = 3\,,\quad f_5 = 5\,,\quad f_6 = 8\,,\quad f_7 = 13\,,\quad f_8 = 21\,\ldots$$

e precisamente $a_n = f_{n+1}$ per ogni n intero positivo.

Anche in questo caso il problema è stato risolto, ma come scopriremo tra un attimo, il pregio maggiore di questo risultato consiste nel fatto che è uno strumento particolarmente versatile per verificare alcune tra le numerose identità che rendono la successione di Fibonacci così interessante. Faremo due esempi per chiarire cosa intendiamo. La prima identità che discutiamo lega la successione di Fibonacci ai coefficienti binomiali: sommando gli elementi del triangolo di Tartaglia lungo le diagonali evidenziate nel seguente schema si ottengono proprio i numeri di Fibonacci.



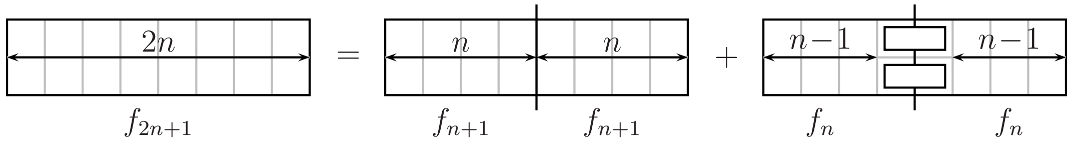
Tale relazione si può esprimere attraverso una formula "compatta"

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$$

dove $\lfloor n/2 \rfloor$ è la parte intera del rapporto $n/2$. Come abbiamo visto l'$(n+1)$-simo numero di Fibonacci rappresenta il numero totale di coperture del rettangolo $2 \times n$ e ora cercheremo di interpretare la somma a sinistra come un'enumerazione di queste coperture. Dalle considerazioni precedenti ormai dovrebbe essere chiaro che ogni copertura della striscia $2 \times n$ è realizzabile come una combinazione di tessere verticali e di coppie sovrapposte di tessere orizzontali. Se infatti ci fossero due tessere orizzontali sfasate le parti a destra e a sinistra non sarebbero ricopribili (sapreste dire per quale motivo?). Ora possiamo raggruppare le coperture della striscia a seconda del numero di coppie di tessere orizzontali sovrapposte presenti. Questo numero è un intero k che varia da 0 a $\lfloor n/2 \rfloor$ proprio come l'indice della somma nella formula precedente. Inoltre se sono presenti k coppie di tessere orizzontali il resto della copertura deve essere formato da $n - 2k$ tessere verticali. Riassumendo in totale ci sono $k + (n-2k) = n-k$ oggetti di due tipi, ciascuno presente rispettivamente in quantità k e $n-k$, da disporre in un certo ordine per realizzare la copertura. Quindi il numero totale di queste combinazioni è dato proprio dal coefficiente binomiale $n-k$ su k che è presente nella formula all'interno della somma.
Il secondo esempio è il seguente: la somma dei quadrati di due numeri di Fibonacci consecutivi è ancora un numero di Fibonacci:

$$f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2.$$

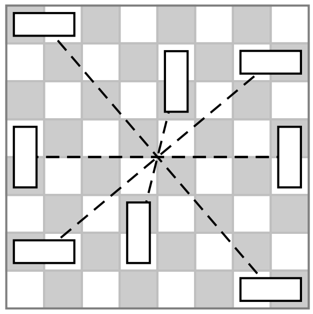
Tale identità si può dimostrare attraverso la seguente interpretazione. Il numero totale di coperture di un rettangolo $2 \times 2n$ è uguale a f_{2n+1}. Queste coperture si possono dividere in due categorie: quelle che hanno una "frattura" lungo la linea mediana verticale e quelle che non ce l'hanno. Ora calcoliamo il numero di coperture per ciascuna delle categorie. Se c'è la linea di frattura il rettangolo è diviso in due rettangoli $2 \times n$ che possono essere coperti separatamente ciascuno in f_{n+1} modi e dunque il totale è il prodotto di $f_{n+1} \cdot f_{n+1} = f_{n+1}^2$. Analogamente, se la linea non c'è, la parte centrale è coperta con due tessere orizzontali sovrapposte (ricordate che le tessere orizzontali non possono essere sfasate) e coprendo le due parti che rimangono si ottiene f_n^2.



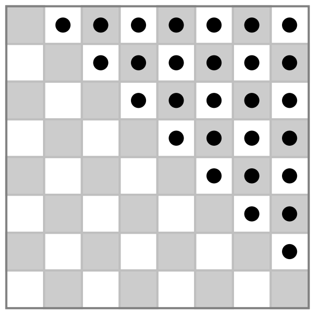
Per altri esempi di interpretazione di formule combinatorie con le coperture si consiglia di vedere il libro di Graham, Knuth e Patashnik [5] e l'articolo [1].

⋆ ⋆ ⋆

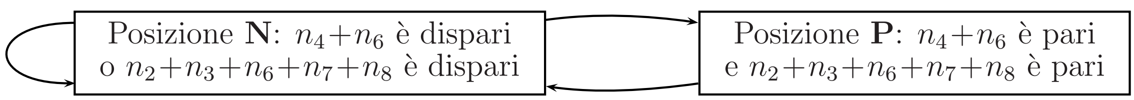
Concludiamo questa panoramica di esempi sull'impiego delle coperture con un gioco. Su una scacchiera di una certa forma due giocatori dispongono a turno una tessera in modo da non avere sovrapposizioni. Perde il giocatore che non riesce più ad effettuare nessuna mossa. Questo gioco denominato *Cram* (in inglese *to cram* significa riempire, stipare) è stato introdotto da Martin Gardner e successivamente analizzato nella suggestiva opera dedicata ai giochi matematici di Berlekamp, Conway e Guy [2]. Il *Cram* rientra nella categoria dei giochi combinatori imparziali finiti di cui il *Nim* è senz'altro l'esempio più noto (si veda [3]). Il termine imparziale si riferisce al fatto che le mosse disponibili in una certa fase del gioco sono un numero finito e le regole per determinarle sono le stesse per entrambi i giocatori (per esempio gli scacchi non sono imparziali perché le mosse per un giocatore dipendono dal colore delle sue pedine). Inoltre ogni partita, comunque venga giocata, si esaurisce in un numero finito di mosse con la vittoria di uno dei giocatori (non ci sono situazioni di pareggio). L'interesse per questi giochi è dovuto al fatto che esiste un algoritmo finito per determinare se una certa posizione di gioco sia favorevole al giocatore che sta per muovere oppure no. L'algoritmo è basato sulla costruzione di una funzione ricorsiva e anche se la teoria che giustifica questo metodo è piuttosto semplice spesso l'implementazione pratica dell'algoritmo è proibitiva a causa del suo alto costo computazionale. Ci sono però situazioni particolari in cui l'analisi del gioco è piuttosto semplice. Se la scacchiera dove si svolge il gioco è quadrata $n \times n$ con n pari, per esempio con $n = 8$, basta qualche partita per capire che il secondo giocatore è favorito e può sempre vincere semplicemente adottando la strategia di giocare in modo simmetrico rispetto alle mosse dell'avversario. Quando il primo giocatore mette una tessera in una certa posizione il secondo ribatte ponendo un'altra tessera simmetrica rispetto al centro.



Per rendere la partita più interessante si può scegliere un campo di gioco asimmetrico. Per esempio se rendiamo la scacchiera “triangolare inferiore” eliminando alcune caselle diventa più difficile capire quale possa essere una strategia vincente.



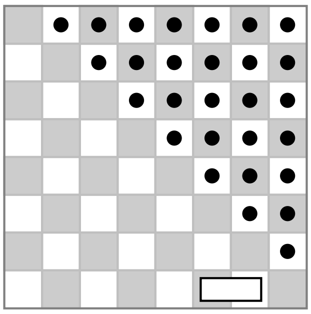
Ora ci piacerebbe vedere come il metodo citato in precedenza possa aiutarci a determinare una condotta di gioco abbastanza generale da essere applicabile a diversi campi di gioco. Per riuscire a farlo in questa sede però dobbiamo semplificare un po' le regole del gioco (l'analisi completa del *Cram* è ancora sconosciuta): supponiamo che i giocatori possano disporre le tessere solo in orizzontale. Denotiamo con n_k il numero di strisce orizzontali di k caselle consecutive con k intero positivo e classifichiamo ogni posizione di gioco in due categorie: le posizioni **P** sono quelle per cui le somme n_4+n_6 e $n_2+n_3+n_6+n_7+n_8$ sono entrambe pari e le posizioni **N** sono quelle per cui almeno una di queste somme è dispari. Per esempio la posizione iniziale nella scacchiera 8×8 è del tipo **P** in quanto $n_4+n_6 = 0$ e $n_2+n_3+n_6+n_7+n_8 = 8$ ($n_8 = 8$ e $n_k = 0$ per $k = 1, \ldots, 7$). Questa distinzione è utile in quanto vale la seguente proprietà fondamentale: da ogni posizione **P** qualunque mossa conduce ad una posizione **N** mentre da ogni posizione **N** esiste sempre almeno una mossa che porta ad una posizione **P**.



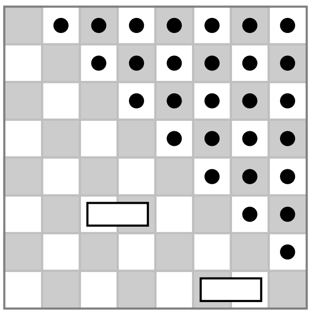
Il gioco è dunque favorevole a chi ha l'occasione di muovere da una posizione **N** e per vincere basta che costui giochi in modo da lasciare sempre all'avversario una posizione **P**. Dato che il gioco finisce dopo un numero finito di mosse prima o poi lo stato del gioco raggiungerà una delle posizioni finali. In una tale posizione non è possibile effettuare nessuna mossa, ossia $n_k = 0$ per ogni $k > 1$, dunque ogni posizione finale è una posizione **P** e per quanto detto sarà necessariamente l'avversario ad incontrarla e dunque a perdere.

n_4+n_6	$n_2+n_3+n_6+n_7+n_8$	Strategia
pari	dispari	$2 \mapsto 0 \quad 3 \mapsto 1 \quad 5 \mapsto 3 \quad 5 \mapsto 2\,,1 \quad 6 \mapsto 4$ $7 \mapsto 5 \quad 7 \mapsto 3\,,2 \quad 8 \mapsto 5\,,1 \quad 8 \mapsto 3\,,3$
dispari	pari	$4 \mapsto 1\,,1 \quad 6 \mapsto 3\,,1 \quad 8 \mapsto 6 \quad 8 \mapsto 4\,,2$
dispari	dispari	$4 \mapsto 2 \quad 6 \mapsto 2\,,2 \quad 7 \mapsto 4\,,1$

Torniamo alla scacchiera triangolare. Seguendo le indicazioni precedenti è facile constatare che in questo caso la posizione iniziale è del tipo **N** e dunque il primo giocatore può sempre vincere. Infatti secondo la tabella, dato che $n_4+n_6 = 2$ è pari e $n_2+n_3+n_6+n_7+n_8 = 5$ è dispari, una delle mosse vincenti è (in questo caso ce ne sono ben 9): $8 \mapsto 5\,,1$ ossia una tessera nella riga con 8 caselle in modo da lasciare 5 caselle a sinistra e 1 a destra.



Infine supponiamo che il secondo giocatore metta una tessera nella riga con 6 caselle in modo da lasciare 2 caselle a sinistra e 2 a destra. Come rispondereste a questa mossa?



Riferimenti bibliografici

[1] A. T. Benjamin e J. J. Quinn, Recounting Fibonacci and Lucas Identities, *College Mathematics Journal*, **30** (1999), 359–366.

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway e R. K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, Academic Press, New York, 1982.

[3] M. Gardner, *Mathematical puzzles and diversions*, Simon and Shuster Inc., 1959 [traduzione italiana: *Enigmi e giochi matematici*, Sansoni, 1972].

[4] S. W. Golomb, *Checker boards and polyominoes*, American Mathematical Monthly, **61** (1954), 675–682.

[5] R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, 1989 [traduzione italiana: *Matematica Discreta*, Hoepli, 1996].

[6] A. Gyàrfàs, J. Lehel e A. Tuza, *Clumsy packing of dominoes*, Discrete Mathematics, **71** (1988), 33–46.

[7] W. Jockusch, *Perfect matchings and perfect squares*, J. Comb. Theory Ser. A., **67** (1994), 100–115.

[8] P. W. Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice*, Physica, **27** (1961), 1209–1225.

[9] B. Sands, *The gunport problem*, Mathematics Magazine, **44** (1971), 193–196.

Roberto Tauraso
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"
via della Ricerca Scientifica
00133 Roma, Italia
email:tauraso@mat.uniroma2.it