NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Esame del 03.04.2013

1) a) Sia $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,, k \geq 1$, una successione di funzioni misurabili ed $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|\{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\}\big| < |E|\,.$$

Mostrare che esiste un $a \in E$ tale che

$$f_k(a) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\,.$$

Suggerimento: Si stimi la misura di

$$E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1\}\,.$$

2) Sia $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(sx)\,\mathrm{d}x\,.$$

(i) Si dimostri che F è derivabile e si esprimi $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro s .

(ii) Si verifichi che F soddisfa l'equazione differenziale $2F'(s) + sF(s) = 0$.

(iii) Tenendo conto che $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, si calcoli $F(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

3)

(a) Dimostrare che esiste una funzione olomorfa f definita in un intorno U di 0 in $\mathbb{C}$ che coincide con la funzione arcotangente in un intorno di 0 in $\mathbb{R}$.

(b) Trovare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze centrato in 0 di f.

(c) Dimostrare che esiste g definita ed olomorfa nel semipiano destro $S := \{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ che coincide con f su $U \cap S$.

(d) Determinare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di g intorno al punto $3 + 5i$.

4) Sia γ la circonferenza di centro 0 e raggio 20 percorsa in senso antiorario. Si calcolino i seguenti integrali:

$$A) \int_\gamma \frac{3z^2 + 4}{z^3 - 2iz^2 - z}\, dz\,;$$

$$B) \int_\gamma \frac{3z^4 + 4z^3 + \pi z + 5 + i}{z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i}\, dz\,;$$

Soluzioni:

1) **:** Poiché le funzioni f_k sono misurabili, l'insieme

$$\begin{aligned}\{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(E \setminus \{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\} \Big) \\ &= E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\}\end{aligned}$$

è misurabile ed abbiamo

$$E \setminus \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\}\,.$$

Per l'ipotesi sulle funzioni f_k risulta

$$\begin{aligned}\big| E \setminus \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\}\big| &= \Big| \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\} \Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \big| \{x \in E\,;\, f_k(x) < 1\} \big| \\ &< |E|\,.\end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned}& E \setminus \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\} \neq E \\ \Longleftrightarrow\ & \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\} \neq \emptyset\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che esiste un

$$a \in \{x \in E\,;\, f_k(x) \geq 1 \text{ per ogni } k \geq 1\}\,,$$

cioè un $a \in E$ con $f_k(a) \geq 1$ per ogni $k \geq 1$.

2) **:** (i) Poiché le funzioni

$$[\,0\,, +\infty) \ni x \longmapsto e^{-x^2} \cos(sx)\,, \qquad s \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

sono continue, quindi misurabili, e

$$\left| e^{-x^2} \cos(sx) \right| \leq e^{-x^2} , \qquad x \in [0, +\infty), s \in \mathbb{R}$$

dove

$$[0, +\infty) \ni x \longmapsto e^{-x^2}$$

è sommabile, le funzioni (*) sono sommabili. Cosicché $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.

Poi, siccome le funzioni

$$\mathbb{R} \ni s \longmapsto e^{-x^2} \cos(sx) , \qquad x \in [0, +\infty)$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s} \big(e^{-x^2} \cos(sx) \big) = - x \, e^{-x^2} \sin(sx)$$

ammettono la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \big(e^{-x^2} \cos(sx) \big) \right| \leq x \, e^{-x^2} , \qquad x \in [0, +\infty), s \in \mathbb{R}$$

dove la funzione

$$[0, +\infty) \ni x \longmapsto x \, e^{-x^2}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione F è derivabile e vale la formula

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} \big(e^{-x^2} \cos(sx) \big) \, \mathrm{d}x = - \int_0^{+\infty} x \, e^{-x^2} \sin(sx) \, \mathrm{d}x , \qquad s \in \mathbb{R} .$$

(ii) Tramite integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} F'(s) &= - \int_0^{+\infty} x \, e^{-x^2} \sin(sx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin(sx) \, \mathrm{d}e^{-x^2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(sx) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{s}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(sx) \, \mathrm{d}x \\ &= - \frac{s}{2} F(s) . \end{aligned}$$

Perciò F soddisfa l'equazione differenziale lineare omogenea

$$2F'(s) + sF(s) = 0 \,. \tag{**}$$

(iii) La soluzione generale dell'equazione differenziale (**) è

$$F(s) = c \exp\left(\int \left(-\frac{s}{2} \right) \mathrm{d}s \right) = c e^{-\,s^2/4}$$

con c una costante. Poiché

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \,,$$

dobbiamo avere

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e concludiamo che

$$F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\,s^2/4} \,, \qquad s \in \mathbb{R} \,.$$

3) : (a) **Primo metodo.**

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \,.$$

Siccome la serie geometrica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge uniformemente alla funzione $\dfrac{1}{1-x}$ su ogni compatto contenuto nell' intervallo aperto $(-1\,,1)$, la serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge uniformemente a $\dfrac{1}{1+x^2}$ su ogni compatto contenuto in $(-1\,,1)$.

Per ogni $x \in (-1\,,1)$, per convergenza uniforme, abbiamo dunque

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} \, dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \, .$$

In particolare la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge ad $\arctan(x)$ per $|x| < 1$.

Per la teoria delle serie di potenze complesse, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ ha raggio di convergenza maggiore o uguale ad 1 e quindi definisce una funzione olomorfa f sul disco aperto U di raggio 1 e centro 0. Per costruzione si ha $f(x) = \arctan(x)$ per ogni $x \in (-1\,,1)$.

(a) **Secondo metodo.**

La funzione di variabile reale $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ha una ovvia estensione olomorfa $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Siccome la derivata complessa di $\tan(z)$ in 0 vale 1 la funzione $\tan(z)$ è invertibile, con inversa olomorfa, in un intorno di 0. Poiché $\tan(0) = 0$, esistono W e U intorni aperti di 0 in $\mathbb{C}$ tali che $\tan(z)$ induce per restrizione una funzione biunivoca da W a U.

Detta $f : U \to W$ la funzione (olomorfa) inversa, si ha in conclusione $f(x) = \arctan(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \cap U$:

> In generale, se $l : W \to U$ è bigettiva, $W_1 \subset W$ e $l(W_1) = U_1 \subset U$, si ha che anche $l\,|_{W_1} : W_1 \to U_1$ è bigettiva e $\left(l\,|_{W_1}\right)^{-1}$ coincide con la restrizione $(l^{-1})\,|_{U_1} : U_1 \to W_1$.

(b) Detti a_k i coefficienti della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ si ha $|a_k| = 0$ se k è pari e $|a_k| = \frac{1}{k}$ se k è dispari. Ne segue che

$$\limsup_{k \to +\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{k}}} = 1 \, .$$

Quindi il raggio di convergenza cercato (l'inverso del limite superiore di cui sopra) è 1.

(c) Per ogni z tale che $|z| < 1$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz}(z) &= \frac{d\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d\left((-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)}{dz} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}\,.\end{aligned}$$

Sul semipiano S la funzione $\frac{1}{1+z^2}$ è olomorfa e, siccome S è semplicemente connesso, ammette infinite primitive olomorfe che differiscono tra loro per uno scalare.

Sia $g : S \to \mathbb{C}$ l'unica primitiva olomorfa di $\frac{1}{1+z^2}$ tale che $g(1/2) = \arctan(1/2)$. Siccome g ed f sono funzioni olomorfe sull'aperto connesso $U \cap S$ e su quell'aperto hanno la stessa derivata, le funzioni g ed f differiscono per una costante su $U \cap S$. Siccome $g(1/2) = f(1/2) = \arctan(1/2)$, si ha $f = g$ su $U \cap S$.

(d) Date le semirette orizzontali

$$\begin{aligned} l_1 &:= \left\{x + i \in \mathbb{C} :\ x \in \mathbb{R}\ e\ x \le 0\right\} \\ \text{e } l_2 &:= \left\{x - i \in \mathbb{C} :\ x \in \mathbb{R}\ e\ x \le 0\right\}, \end{aligned}$$

sia $V = \mathbb{C} \setminus (l_1 \cup l_2)$. L'aperto V è semplicemente connesso e $\frac{1}{1+z^2}$ è olomorfa su V (gli zeri del denominatore sono $i \in l_1$ e $-i \in l_2$).

Come nel punto (c) esiste $h : V \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $h(1/2) = g(1/2)$ e $\frac{dh}{dz} = \frac{dg}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$ su S. Come nel punto (c), tale h coincide con g su S. In particolare lo sviluppo in serie di potenze di h intorno al punto $3 + 5i$ coincide con lo sviluppo in serie di potenze di g intorno al punto $3 + 5i$ e le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.

Si noti che la distanza tra $3 + 5i$ e i è pari a 5 e il cerchio aperto di raggio 5 e centrato in $3 + 5i$ è contenuto nel dominio di h, quindi si ha $\rho \ge 5$.

Mostriamo ora che si ha proprio $\rho = 5$. Se fosse $\rho > 5$, la funzione h si estenderebbe ad una funzione $\tilde{h}$ olomorfa anche in un intorno di i. La derivata olomorfa $\dfrac{d\tilde{h}}{dz}$ sarebbe allora olomorfa e quindi limitata in un intorno di i. Questo è assurdo perché

$$\frac{d\tilde{h}}{dz} = \frac{dg}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$$

su S e $\dfrac{1}{1+z^2}$ è illimitata nell' intersezione di S con qualsiasi intorno di i.

4) : (A) Abbiamo $z^3 - 2iz^2 - z = z\,(z-i)^2$, dunque la funzione integranda è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\,,1\}$. In 0 la funzione itegranda ha un polo semplice e in i ha un polo doppio, entrambi i poli sono contenuti all'interno del cerchio delimitato da γ.

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_\gamma \frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,dz =$$

$$2\pi i\left(Res\Big(\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,,0\Big) + Res\Big(\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,,i\Big)\right) \quad .$$

Siccome 0 è un polo semplice,

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,,0\right) &= \lim_{z\to 0}\left(z\,\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{3z^2+4}{z^2-2iz-1} = -4\,. \end{aligned}$$

Siccome i è un polo doppio,

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,,i\right) &= \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\right)' \\ &= \lim_{z\to i}\left(\frac{3z^2+4}{z}\right)' = \lim_{z\to i}\left(3-\frac{4}{z^2}\right) = 7\,. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_\gamma \frac{3z^2+4}{z^3-2iz^2-z}\,dz = 2\pi i(-4+7) = 6\pi i\,.$$

(B) Si noti che se $|z| \geq 20$ si ha

$$
\begin{aligned}
&|z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i| \\
&\geq |z|^6 - 5|z|^5 - 4|z|^4 - 3|z|^3 - 2|z|^2 - 2|z| - 1 \\
&> 20|z|^5 - 17|z|^5 = 3|z|^5 > 0
\end{aligned}
$$

e dunque i poli della funzione integranda cadono tutti all'interno del cerchio delimitato da γ e la funzione integranda è olomorfa fuori di questo cerchio.

Se $\rho > 20$ e γ_ρ è la circonferenza di centro 0 e raggio ρ, per il teorema di Gauss-Green, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma \frac{3z^4 + 4z^3 + \pi z + 5 + i}{z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i}\, dz \\
&= \int_{\gamma_\rho} \frac{3z^4 + 4z^3 + \pi z + 5 + i}{z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i}\, dz\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma \frac{3z^4 + 4z^3 + \pi z + 5 + i}{z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i}\, dz \\
&= \lim_{\rho \to +\infty} \int_{\gamma_\rho} \frac{3z^4 + 4z^3 + \pi z + 5 + i}{z^6 + 5iz^5 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + i}\, dz = 0
\end{aligned}
$$

dove il limite è nullo per il lemma del grande cerchio.