Esercizi di Analisi Complessa

Corso di Laurea in Matematica

Terminologia, notazioni.

In uno spazio metrico (X, d) indicheremo

- con $U_r(x_o)$ la palla aperta con centro $x_o \in X$ e raggio $r > 0$:
$$U_r(x_o) := \big\{ x \in X \,;\, d(x\,, x_o) < r \big\} \;;$$
- con $\overline{S}$ la chiusura di $S \subset X$;
- con $\overset{\circ}{S}$ l'interno di $S \subset X$;
- con $\partial S = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$ la frontiera di $S \subset X$.

Se la frontiera di un aperto $D \subset \mathbb{C}$ è una unione finita di curve e non specificheremo diversamente, useremo per queste curve parametrizzazioni con D a sinistra della direzione del percorso.

Esercizi sul principio del massimo.

Il principio del massimo:

Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio (= aperto connesso) e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora la funzione
$$D \ni z \longmapsto |f(z)| \in [0, +\infty)$$
può avere un massimo locale solo se f è costante.

In particolare,

Se $D \subset \mathbb{C}$ è un dominio limitato e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua non costante che è olomorfa in D , allora
$$|f(z)| < \sup_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)| \,, \qquad z \in D\,.$$

Esercizi.

1) Siano $f_1\,, f_2\,, \ldots, f_n$ funzioni olomorfe definite su un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Si verifichi che la funzione
$$D \ni z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} |f_k(z)| \in [0, +\infty)$$

può avere un massimo locale solo se ogniuna delle funzioni $f_1, f_2, \dots, f_n$ è costante.

Soluzione.

Sia $z_0 \in D$ un punto di massimo locale di

$$D \ni z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} |f_k(z)| \in [0, +\infty)$$

e scegliamo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f_k(z_o)| = e^{i\theta_k} f_k(z_o), \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Allora, ponendo

$$g : D \ni z \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} f_k(z),$$

z_o è un punto di massimo locale per il modulo della funzione olomorfa g ed il principio del massimo implica che g è costante:

$$g(z) = g(z_o) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} f_k(z_o) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(z_o)|, \qquad z \in D.$$

Risulta che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{|f_k(z_o)| - \Re\big(e^{i\theta_k} f_k(z)\big)}_{\geq 0} \Big) &= \sum_{k=1}^{n} |f_k(z_o)| - \Re\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} f_k(z) \Big) \\
&= \Re\Big(\sum_{k=1}^{n} |f_k(z_o)| - g(z) \Big) \\
&= 0, \qquad z \in D
\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\Re\big(e^{i\theta_k} f_k(z)\big) = |f_k(z_o)|, \qquad z \in D.$$

Ma le parti reali delle funzioni olomorfe

$$D \ni z \longmapsto e^{i\theta_k} f_k(z), \qquad 1 \leq k \leq n$$

possono essere costanti solo se queste funzioni stesse sono costanti (per le equazioni di Cauchy-Riemann o per il teorema dell'applicazione aperta). Concludiamo così che tutte le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_n$ sono costanti.

$\square$

2) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua che è olomorfa in D. Si dimostri che

$$\mathrm{Re} f(z) \geq 0\,, \qquad z \in \partial D$$

implica

$$\mathrm{Re} f(z) \geq 0\,, \qquad z \in \overline{D}\,.$$

Inoltre, se $\mathrm{Re} f(z_o) = 0$ per un $z_o \in D$, allora f è costante.

<u>Soluzione</u>.

Cominciamo con un rimarco. Per ogni $w = u + vi \in \mathbb{C}$ con parte reale u e parte immaginaria v abbiamo

$$\left|e^w\right| = \left|e^{u+vi}\right| = \left|e^u e^{vi}\right| = \left|e^u\right| \cdot \left|e^{vi}\right| = e^u\,.$$

Poiché

$$u \geq 0 \iff e^u \geq 1\,,$$

risulta

$$\mathrm{Re} w \geq 0 \iff \left|e^w\right| \geq 1 \iff \left|e^{-w}\right| \leq 1\,. \tag{*}$$

Definiamo ora la funzione $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tramite la formula

$$g(z) := e^{-f(z)}\,.$$

Per (*) di cui sopra abbiamo

$$\left|g(z)\right| \leq 1 \iff \mathrm{Re} f(z) \geq 0\,,$$

in particolare

$$\left|g(z)\right| \leq 1\,, \qquad z \in \partial D\,.$$

D'altro canto, poiché l'insieme chiuso limitato $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ è compatto, la funzione continua $\overline{D} \ni z \longmapsto \left|g(z)\right|$ ha (almeno) un punto di massimo $z_o \in \overline{D}$.

Se $z_o \in \partial D$, allora abbiamo per ogni $z \in \overline{D}$

$$\left|e^{-f(z)}\right| = \left|g(z)\right| \leq \left|g(z_o)\right| \leq 1\,,$$

cioè $\mathrm{Re} f(z) \geq 0$.

Se invece $z_o \in D$, allora per il teorema del massimo modulo g è costante e risulta per ogni $z \in \overline{D}$

$$e^{-f(z)} = g(z) = g(z_o) = e^{-f(z_o)} \iff e^{f(z)-f(z_o)} = 1\,,$$

cioè $f(z) = f(z_o) + 2\,k\,\pi\,i$ per un $k \in \mathbb{Z}$. Ma l'insieme $\{f(z)\,;\, z \in \overline{D}\}$ è un'immagine continua dell'insieme connesso $\overline{D}$ e quindi è connesso. Risulta che dobbiamo avere

$$f(z_o) \in \{f(z)\,;\, z \in \overline{D}\} \subset \{f(z_o) + 2\,k\,\pi\,i\}$$

per un $k \in \mathbb{Z}$ che non può essere che $k = 0$. In altre parole f è costante.

$\square$

Esercizi sul calcolo di integrali usando il teorema integrale di Cauchy o il teorema dei residui.

Il terorema integrale di Cauchy:

Sia γ una curva di Jordan regolare a tratti nel piano complesso $\mathbb{C}$ e D l'interno di γ (= il componente connesso limitato del complementare del sostegno di γ in $\mathbb{C}$). Se

$$f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione continua che è olomorfa in D, allora

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Il teorema dei residui estende il teorema integrale di Cauchy al caso di funzioni con singolarità:

Il terorema dei residui:

Sia γ una curva di Jordan regolare a tratti nel piano complesso $\mathbb{C}$, D l'interno di γ, e $z_1, \ldots, z_n \in D$. Se

$$f : \overline{D} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione continua che è olomorfa in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, allora l'integrale

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

è uguale al prodotto di $2\pi i$ con la somma dei residui di f nei punti $z_1, \ldots, z_n$, cioè vale l'uguaglianza

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_j}(f)\,.$$

Esercizi.

1) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema integrale di Cauchy per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

<u>Soluzione</u>.

Per $r > 0$ indichiamo con $\partial^+ U_r^+(0)$ e $\partial^- U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r\,, \mathrm{Im} z \geq 0 \big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette, cioè

$$\partial^+ U_r^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto r\,e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_r^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto r\,e^{i(\pi-t)} = -\,r\,e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,, -\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,, r]$,
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Per il teorema integrale di Cauchy abbiamo

$$0 = \int_{\gamma_{\varepsilon,r}} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\,,$$

quindi

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora per il lemma di Jordan abbiamo

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

e risulta

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right) &= \int\limits_{\partial^+U_\varepsilon^+(0)}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\\ &= \int\limits_{\partial^+U_\varepsilon^+(0)}\frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z+\int\limits_{\partial^+U_\varepsilon^+(0)}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\\ &= \int\limits_{\partial^+U_\varepsilon^+(0)}\frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z+\pi\, i\ .\end{aligned}$$

Successivamente, poiché esiste il limite

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{z}=i\ ,$$

la funzione $z\longmapsto\dfrac{e^{iz}-1}{z}$ ha singolarità eliminabile in 0 e quindi è limitata in un intorno di 0. Risulta che

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+U_\varepsilon^+(0)}\frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z=0$$

e concludiamo :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}}\left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\pi\, i\ .$$

□

Rimarco: Poiché $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ e

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=0\ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ .$$

2) Dato $b > 0$, si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \Bigg(\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x \Bigg)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzione.

Indichiamo

$$f(z) := \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\,, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\big\{0\,,bi\,,-bi\big\}\ .$$

Allora f è una funzione mermorfa sul piano complesso con poli semplici in 0 , bi e $-bi$. Il residuo di f in 0 è

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz} = -1\ ,$$

mentre il residuo di f in $\pm bi$ è

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\pm bi) &= \lim_{z\to\pm bi} z\,f(z) = \lim_{z\to\pm bi} \big(z\mp bi\big)\,\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\\ &= \lim_{z\to\pm bi} \frac{z^2-b^2}{z\pm bi}\,\frac{e^{iz}}{z} = \frac{-\,2b^2}{\pm 2bi}\,\frac{e^{\mp b}}{\pm bi}\\ &= e^{\mp b}\ .\end{aligned}$$

Indichiamo pure, per $r>0$, con $\partial^+U_r^+(0)$ e $\partial^-U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z| = r\,,\mathrm{Im}z\geq 0\big\}$$

orientato in senso antiorario (positivo) rispettivamente in senso orario (negativo) :

$$\partial^+U_r^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto r\,e^{it}\in\mathbb{C}\,,$$
$$\partial^-U_r^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto r\,e^{i(\pi-t)} = -\,r\,e^{-it}\in\mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0<\varepsilon<b<r$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-\varepsilon]\,,$
il semicerchio $\partial^- U^+_\varepsilon(0)\,,$
il segmento $[\varepsilon\,,r]\,,$
il semicerchio $\partial^+ U^+_r(0)\,.$

Poiché $\gamma_{\varepsilon,r}$ aggira il solo polo $b\,i$, per il teorema dei residui abbiamo

$$
\begin{aligned}
2\pi\,i\,e^{-b} &= 2\pi\,i\,\mathrm{Res}(f,bi)\\
&= \int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= \int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^- U^+_\varepsilon(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U^+_r(0)} f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\,i\,e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U^+_r(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.
$$

Ora per il lemma di Jordan vale

$$
\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U^+_r(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U^+_r(0)} \frac{z^2-b^2}{(z^2+b^2)\,z}\,e^{iz}\,\mathrm{d}z = 0
$$

e risulta

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 2\pi\,i\,e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\,i\,e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\,i\,e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right)\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\,i\,e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U^+_\varepsilon(0)} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right)\mathrm{d}z - \pi\,i\,.
\end{aligned}
$$

Successivamente, poiché esiste il limite

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{2\,z^2-z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2\,z}{z^2+b^2}\,e^{iz}+\frac{1-e^{iz}}{z}\right)\\ &= -\,i\ ,\end{aligned}$$

la funzione $z \longmapsto \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right)$ ha singolarità eliminabile in 0 e quindi è limitata in un intorno di 0. Risulta che

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)}\frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,e^{iz}+1\right)\mathrm{d}z = 0$$

e concludiamo :

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}}\left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= 2\pi\,i\,e^{-b}-\pi\,i\\ &= \pi\left(2\,e^{-b}-1\right)i\ .\end{aligned}$$

$\square$

Rimarco: Poiché $e^{ix}=\cos x+i\,\sin x$ e

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = 0\ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

abbiamo

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}}\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\left(e^{-b}-\frac{1}{2}\right)\ .$$

3) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \Bigg(\int\limits_{-r}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{r} \frac{e^{i\pi x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \Bigg)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzione.

La funzione

$$f(z) := \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici nelle radici cubiche di -1, cioè in $z_o = -1$, $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{z_1}$. Il residuo di f in z_o è

$$\operatorname*{Res}_{z_o}(f) = \lim_{z\to -1}(z+1)\,f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2} = \frac{e^{-i\pi}}{3} = -\frac{1}{3}\ ,$$

mentre il residuo di f in $z_1\,i$ è

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z_1}(f) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\,f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{i\pi z}}{(z-z_o)(z-z_2)} \\ &= \frac{e^{i\pi z_1}}{(z_1-z_o)(z_1-z_2)} = \frac{e^{i\pi\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\cdot i\sqrt{3}} = \frac{i\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3(\sqrt{3}+i)}{2}\,i} \\ &= \frac{1}{6}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\big(\sqrt{3}-i\big)\ .\end{aligned}$$

Indichiamo, per $w\in\mathbb{C}$ e $r>0$, con $\partial^+U_r^+(w)$ e $\partial^-U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-w| = r\,, \mathrm{Im}z\geq 0\big\}\ ,$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\partial^+U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto w + r\,e^{it}\in\mathbb{C}\,,$$
$$\partial^-U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto w + r\,e^{i(\pi-t)} = w - r\,e^{-it}\in\mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0<\varepsilon<1<r$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-1-\varepsilon]\,,$
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(-1)\,,$
il segmento $[-1+\varepsilon\,,r]\,,$
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)\,.$

Poiché $\gamma_{\varepsilon,r}$ aggira il solo polo z_1, per il teorema dei residui abbiamo

$$\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)=2\pi i\,\operatorname*{Res}_{z_1}(f)$$
$$=\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\int\limits_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^+(-1)} f(z)\,\mathrm{d}z+\int\limits_{-1+\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1+\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)+\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} f(z)\,\mathrm{d}z-\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora per il lemma di Jordan vale

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}\,\mathrm{d}z=0$$

e risulta

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)+\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)+\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)+\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z}\left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}z$$

$$-\frac{1}{3}\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\big(1+i\sqrt{3}\big) + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z}\left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}z - \frac{\pi}{3}\,i\,.$$

Successivamente, poiché la funzione

$$g(z) = \frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2}+\frac{1}{3}$$

è olomorfa sul disco $U_1(-1) = \big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z+1|<1\big\}$ e si annulla nel centro $z=-1$, esiste una funzione olomorfa h su $U_1(-1)$ tale che

$$g(z) = \big(z+1\big)\,h(z)\,,\qquad z\in U_1(-1)\,.$$

Risulta che la funzione

$$\frac{1}{1+z}\left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{g(z)}{1+z} = h(z)$$

è limitata in un intorno di -1 e di conseguenza

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{1}{1+z}\left(\frac{e^{i\pi z}}{1-z+z^2}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}z = 0\,.$$

Concludiamo :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\pi x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}}\left(\int\limits_{-r}^{-1-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\big(1+i\sqrt{3}\big) - \frac{\pi}{3}\,i$$

$$= \frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + i\,\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}-1\right).$$

$\square$

Commento:

La dimostrazione dell'ugualità

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(-1)} \frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{3}\,i \qquad (*)$$

può essere fatta in un ambito più generale, dimostrando :

Lemma del piccolo cerchio: *Siano*

- $w \in \mathbb{C}\,, r > 0\,, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$,
- $U_r(w) = \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z-w| < r \big\}$
- f *una funzione olomorfa su* $U_r(w) \backslash \{0\}$ *avendo polo semplice in* w *.*
- Γ_ε *l'arco* $[t_1\,, t_2] \ni t \longmapsto w + \varepsilon e^{it}$ *ove* $0 < \varepsilon < r$ *.*

Allora

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = (t_2 - t_1)\, i \operatorname*{Res}_w(f) \ .$$

Dimostrazione. Lo sviluppo di f in serie di Laurent è dalla forma

$$f(z) = c_{-1}\,\frac{1}{z-w} + c_o + c_1\,(z-w) + c_2\,(z-w)^2 + \ ...$$

con $c_{-1} = \operatorname*{Res}_w(f)$, quindi

$$g(z) = f(z) - \operatorname*{Res}_w(f)\,\frac{1}{z-w} = c_o + c_1\,(z-w) + c_2\,(z-w)^2 + \ ...$$

è una funzione olomorfa su tutto $U_r(w)$. In particolare g è limitata sul disco chiuso $\overline{U_{r'}(w)}$ dove $0 < r' < r$ è un numero alla nostra scelta (per esempio, possiamo prendere $r' = r/2$).

Ora

$$\begin{aligned} \Bigg| \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z \Bigg| &\leq \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \big|g(z)\big|\,\mathrm{d}|z| \\ &\leq \sup_{z\in\overline{U_{r'}(w)}} \big|g(z)\big| \cdot \text{lunghezza}\big(\Gamma_\varepsilon\big) \\ &= \varepsilon\,(t_2 - t_1) \sup_{z\in\overline{U_{r'}(w)}} \big|g(z)\big|\,, \qquad 0 < \varepsilon < r' \end{aligned}$$

implica

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

e, poiché

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\varepsilon\, e^{it}}\,\varepsilon\, e^{it}\, i\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\, i \ ,$$

concludiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{0<\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z + \operatorname*{Res}_w(f)\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z\Bigg)\\ &= (t_2-t_1)\,i\operatorname*{Res}_w(f)\ .\end{aligned}$$

■

In particolare, con $t_1=0$ e $t_2=\pi$ risulta

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+U_r^+(w)} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi\,i\operatorname*{Res}_w(f)$$

e così riotteniamo (*) :

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial^+U_r^+(-1)}\frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}\,\mathrm{d}z = \pi\,i\operatorname*{Res}_{-1}\left(\frac{e^{i\pi z}}{1+z^3}\right) = -\,\frac{\pi}{3}\,i\ .$$