Esercizi di Analisi Reale

Corso di Laurea in Matematica

Terminologia.

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile.

Una funzione positiva misurabile f su E, cioè una funzione

$$f : E \longrightarrow [0, +\infty] \text{ misurabile,}$$

ammette sempre integrale su E (nel senso di Lebesgue)

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \in [0, +\infty]\,.$$

Se invece f è una funzione reale misurabile su E, cioè una funzione

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile,}$$

allora anche la funzione $|f| : E \ni x \longmapsto |f(x)| \in [0, +\infty)$ è misurabile, perciò esiste

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x \in [0, +\infty]\,.$$

Diciamo che f è *integrabile* (o *sommabile*) (nel senso di Lebesgue) se l'integrale di $|f|$ su E è finito. In questo caso possiamo definire l'integrale di f su E (nel senso di Lebesgue)

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,.$$

Similmente, se $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ è una funzione misurabile tale che

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\,,$$

allora possiamo definire l'integrale di f su E (nel senso di Lebesgue)

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_E f_1(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

e diciamo che f è *integrabile* (o *sommabile*) (nel senso di Lebesgue).

In particolare, se $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ è misurabile e

$$\int_E |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty ,$$

allora possiamo definire

$$\int_E f(x) \, \mathrm{d}x = \int_E \mathrm{Re} \, f(x) \, \mathrm{d}x + i \int_E \mathrm{Im} \, f(x) \, \mathrm{d}x \in \mathbb{C}$$

e diciamo che f è *integrabile* (o *sommabile*).

Siano finalmente $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ reali, e $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione (necessariamente misurabile) che è integrabile su ogni $[a', b'] \subset (a,b)$. Se esiste il limite

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x := \lim_{\substack{a<a'<b'<b \\ a' \to a \\ b' \to b}} \int_{a'}^{b'} f(x) \, \mathrm{d}x \in \mathbb{C} ,$$

chiamato l'integrale improprio di f su (a,b), allora diciamo che f è *integrabile nel senso improprio.*

Ovviamente possiamo definire l'integrabilità nel senso improprio anche su sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Regole di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema della convergenza monotona per successioni:
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, e $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ una successione crescente di funzioni positive misurabili, definite su E. Allora la funzione

$$E \ni x \longmapsto f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x) \in [0, +\infty]$$

è misurabile e

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x) \, \mathrm{d}x = \int_E f(x) \, \mathrm{d}x .$$

Teorema della convergenza monotona per parametro reale:
Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e

$$-\infty < a < b \leq +\infty , \; f : E \times [a,b) \longrightarrow [0, +\infty) ,$$
$$\big(-\infty \leq a < b < +\infty , \; f : E \times (a,b] \longrightarrow [0, +\infty) \big) .$$

Se

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \text{ è misurabile per ogni } y \in [a,b) \ \big(y \in (a,b]\big)$$

e

$$[a,b) \ni y \longmapsto f(x,y) \in [0,+\infty] \text{ è crescente per quasi ogni } x \in E$$
$$\big((a,b] \ni y \longmapsto f(x,y) \in [0,+\infty] \text{ è decrescente per quasi ogni } x \in E\big)$$

allora la funzione

$$E \ni x \longmapsto f(x) := \lim_{y \to b} f(x,y) \in [0,+\infty]$$
$$\big(E \ni x \longmapsto f(x) := \lim_{y \to a} f(x,y) \in [0,+\infty]\big)$$

è misurabile e

$$\lim_{y \to b} \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Big(\lim_{y \to a} \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

Teorema della convergenza dominata per sucessioni:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme misurabile, e* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *una successione di funzioni complesse misurabili, definite su* E. *Se esiste una funzione integrabile* $g : E \longrightarrow [0,+\infty]$ *tale che*

$$|f_k(x)| \leq g(x) \text{ per quasi ogni } x \in E\,,\ k \geq 1\,,$$

ed

$$\text{il limite } f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x) \text{ esiste per quasi ogni } x \in E\,,$$

allora le funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots, f$ *sono integrabili e vale*

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Teorema della convergenza dominata per parametro reale:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme misurabile,* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo,* $b \in [-\infty,+\infty]$ *una delle estremità di* I, *e* $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se*

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \text{ è misurabile per ogni } y \in I\,,$$

esiste una funzione integrabile $g : E \longrightarrow [0,+\infty]$ *tale che*

$$|f(x,y)| \leq g(x) \text{ per quasi ogni } x \in E\,,\ y \in I\,,$$

e

$$\textit{il limite } f(x) := \lim_{y\to b} f(x,y) \in \mathbb{R} \textit{ esiste per quasi ogni } x \in E\,,$$

allora la funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *è integrabile e vale*

$$\lim_{y\to b} \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dipendenza continua da parametri reali:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme misurabile,* $y_o \in S \subset \mathbb{R}^k$, *e* $f : E \times S \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se*

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \textit{ è misurabile per ogni } y \in S\,,$$

esiste una funzione integrabile $g : E \longrightarrow [0,+\infty]$ *tale che*

$$|f(x,y)| \le g(x) \textit{ per quasi ogni } x \in E\,,\ y \in S\,,$$

$$S \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \textit{ è continua in } y_o \textit{ per quasi ogni } x \in E\,,$$

allora

$$\text{la funzione } S \ni y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ è continua in } y_o\,.$$

Integrali impropri:

Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$ *reali e* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una funzione misurabile. Se* $|f|$ *è integrabile nel senso improprio (cioè se l'integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

"converge assolutamente") allora f *è integrabile su* (a,b) *sia improprio che nel senso di Lebesgue ed i due integrali sono uguali.*

Infatti, possiamo applicare il teorema della convergenza monotona ad una successione

$$(a,b) \ni x \longmapsto \chi_{[a_k,b_k]}(x)\,|f(x)|\,, \qquad k \ge 1$$

con $a_1 < b_1\,, a_1 > a_2 > \dots\,, \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a\,, b_1 < b_2 < \dots\,, \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ per ottenere l'integrabilità di f, ed applicare successivamente il teorema della convergenza dominata alla successione

$$(a,b) \ni x \longmapsto \chi_{[a_k,b_k]}(x)\,f(x)\,, \qquad k \ge 1$$

(con i stessi a_k e b_k) per verificare l'ugualità dell'integrale improprio di f su (a,b) all'integrale nel senso di Lebesgue.

Come è noto, una funzione può essere integrabile nel senso improprio senza che il suo modulo sia pure integrabile nel senzo improprio, cioè senza che la funzione stessa sia integrabile nel senso di Lebesgue. Un esempio è

$$\int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Infatti, tramite integrazione per parti si ottiene

$$\int\limits_{\pi/4}^{b} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{\pi/4}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}(\cos x) = -\,\frac{\cos b}{b} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \int\limits_{\pi/4}^{b} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

perciò esiste

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\pi/4}^{b} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

la funzione

$$\big(\pi/4, +\infty\big) \ni x \longmapsto \frac{\cos x}{x^2}$$

essendo integrabile. Cosicché l'integrale improprio

$$\int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

converge.

Ma d'altro canto

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+\pi/2} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}\,(k\pi+\pi/2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = +\infty\,,
\end{aligned}$$

quindi l'integrale improprio

$$\int_{\pi/4}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x \,.$$

non converge.

Derivazione sotto il segno di integrale.

Dipendenza differenziabile da parametri reali:

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, $a < b$ numeri reali, e $f : E \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ Se

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \ \text{ è integrabile per ogni } y \in (a,b)\,,$$
$$(a,b) \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R} \ \text{ è derivabile per quasi ogni } x \in E$$

ed esiste una funzione integrabile $g : E \longrightarrow [0,+\infty]$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq g(x) \ \text{ per quasi ogni } x \in E\,,$$

allora

$$\text{la funzione } (a,b) \ni y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \ \text{ è derivabile,}$$

$$E \ni x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathbb{R} \ \text{ è integrabile per ogni } y \in (a,b)\,,$$

e vale la formula di derivazione sotto il segno di integrale :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrazione sotto il segno di integrale, cioè integrali iterati.

Il primo teorema riguarda funzioni positivi misurabili :

Teorema di Leonida Tonelli:

Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^k$ insiemi misurabili, e $f : E \times S \longrightarrow [0,+\infty]$ una funzione misurabile. Allora

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in [0,+\infty] \ \text{ è misurabile per quasi ogni } y \in S\,,$$

$$S \ni y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty]\,, \text{ definita quasi ovunque, è misurabile,}$$

e vale l'ugualità

$$\int_S \left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{E\times S} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \in [0,+\infty]\,.$$

Il secondo teorema riguarda funzioni reali o complesse integrabili :

Teorema di Guido Fubini:

Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^k$ insiemi misurabili, e $f : E \times S \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione integrabile. Allora

$$E \ni x \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{C} \ \textit{è integrabile per quasi ogni } y \in S\,,$$

$$S \ni y \longmapsto \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{C}\,, \textit{definita quasi ovunque, è integrabile,}$$

e vale l'ugualità

$$\int_S \left(\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{E\times S} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \in \mathbb{C}\,.$$

Esercizi.

1) Verificare o smentire i passagi al limite sotto il segno di integrale :

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}} \right) \mathrm{d}x\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} \right) \mathrm{d}x\,.$$

Soluzione.

La prima ugualità non è vera.

Infatti, tramite la sostituzione $t = \dfrac{x}{y}$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{y}} t\,e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right)$$

e risulta

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\bigl(1-e^{-\frac{1}{y^2}}\bigr) = \frac{1}{2}\,.$$

Dall'altra parte

$$\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}} \overset{s=\frac{1}{y^2}}{=} \lim_{s\to +\infty} x s e^{-x^2 s} = 0\,, \qquad x>0\,,$$

perciò

$$\int_0^1 \left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\, e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

La seconda ugualità risulta usando il teorema della convergenza dominata.

Definiamo le funzioni $f_n : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $n\geq 1$, tramite la formula $f_n(x) := \dfrac{1}{1+x^n}$. Allora la successione $\bigl(f_n\bigr)_{n\geq 1}$ converge puntualmente alla funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } x = 1 \\ 0 & \text{per } x\in(1,+\infty) \end{cases}\,,$$

in modo crescente in $[0,1]$ ed in modo decrescente in $[1,+\infty)$. Ne segue

$$f_n(x) \leq g(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x\in[0,1]\,, \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{per } x\in(1,+\infty) \end{cases}\,, \qquad n\geq 2$$

ove la funzione $g : [\,0,+\infty) \to [\,0,+\infty)$ è integrabile. Ora il teorema della convergenza dominata implica :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

□

2) Si verifichi che la formula

$$F(y) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione derivabile $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$F'(y) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2 .$$

Si deduca che

$$\Big(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2 = \frac{\pi}{4} - F(y)\,, \qquad y \in \mathbb{R}$$

e così

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-y^2}} < \int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,, \qquad y > 0\,.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Soluzione.

Possiamo applicare il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale nella situazione

$$E = (0,1)\,, \quad (a,b) = (-\infty,+\infty)\,, \quad f(x,y) = \frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2}\,.$$

Infatti, la funzione continua

$$(0,1) \ni x \longmapsto f(x,y) = \frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2} \in (0,1)$$

è integrabile per ogni $y \in \mathbb{R}$, la derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\,y\,e^{-(1+x^2)y^2}$$

esiste per ogni $(x,y) \in (0,1)\times\mathbb{R}$, ed abbiamo la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = 2\,|y|\,e^{-(1+x^2)|y|^2} \le 1 =: g(x)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,, x \in (0,1)\,.$$

Risulta che F è derivabile e

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\int_0^1 2\,ye^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=xy}{=} -\int_0^y 2\,e^{-y^2-t^2}\,\mathrm{d}t = -2\,e^{-y^2}\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2, \qquad y \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Cosicché esiste una costante C tale che

$$\left(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = C - F(y)\,, \qquad y \in \mathbb{R}$$

e, poiché

$$C = F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,,$$

abbiamo

$$\left(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4} - F(y)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,. \qquad (*)$$

Ora, tenendo conto che

$$0 \le F(y) \le e^{-y^2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,e^{-y^2}\,,$$

(*) implica

$$\frac{\pi}{4} \ge \left(\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \ge \frac{\pi}{4}\big(1 - e^{-y^2}\big)\,, \qquad y \in \mathbb{R}$$

$\square$

3) Sia $a > 0$ arbitrario. Si verifichi che la formula

$$F(y) := \int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione derivabile $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e si calcoli la derivata di F.

Si deduca che

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\frac{y}{a}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,, a > 0\,.$$

Soluzione.

Possiamo applicare il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale nella situazione

$$E=(0,+\infty)\,,\quad (a,b)=(-\infty,+\infty)\,,\quad f(x,y)=e^{-a\,x}\,\frac{\sin{(xy)}}{x}\,.$$

Infatti, tenendo conto che

$$|\sin\alpha|\leq|\alpha|\,,\qquad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

il modulo della funzione continua

$$(0,+\infty)\ni x\longmapsto f(x,y)=e^{-a\,x}\,\frac{\sin{(xy)}}{x}$$

si maggiora per ogni $y\in\mathbb{R}$ con la funzione integrabile

$$(0,+\infty)\ni x\longmapsto |y|\,e^{-a\,x}$$

e quidi è integrabile. Di conseguenza la funzione F è ben definita.

Poi esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-a\,x}\cos{(xy)}\,,\qquad (x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$$

e vale la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=e^{-a\,x}\,\big|\cos{(xy)}\big|\leq e^{-a\,x}=:g(x)\,,\qquad y\in\mathbb{R}\,,x\in(0,+\infty)\,,$$

ove $g:(0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ è integrabile.

Risulta che F è derivabile e, usando integrazione per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}
F'(y)&=\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\,x}\cos{(xy)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty}\cos{(xy)}\,\mathrm{d}e^{-a\,x}\\
&=-\frac{1}{a}\,e^{-a\,x}\cos{(xy)}\Big|_0^{+\infty}-\frac{y}{a}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\,x}\sin{(xy)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a}-\frac{y}{a}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\,x}\sin{(xy)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+\frac{y}{a^2}\int\limits_0^{+\infty}\sin{(xy)}\,\mathrm{d}e^{-a\,x}\\
&=\frac{1}{a}+\frac{y}{a^2}\,e^{-a\,x}\sin{(xy)}\Big|_0^{+\infty}-\frac{y^2}{a^2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\,x}\cos{(xy)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{a}-\frac{y^2}{a^2}\,F'(y)
\end{aligned}$$

onde

$$F'(y) = \frac{\dfrac{1}{a}}{1 + \dfrac{y^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2 + y^2}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Concludiamo che

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x = F(y) - F(0) = \int\limits_0^{y} F'(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int\limits_0^{y} \frac{a}{a^2+\eta^2}\,\mathrm{d}\eta$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{y}{a}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,, a > 0\,.$$

$\square$

4) Si verifichi che la funzione

$$[0\,,+\infty) \ni a \longmapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

è ben definita e continua. Si usi la continuità della funzione di cui sopra per calcolare

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione.
Basta verificare che sia la funzione

$$[0\,,+\infty) \ni a \longmapsto F_1(a) := \int\limits_0^{\pi/2} e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

che la funzione

$$[0\,,+\infty) \ni a \longmapsto F_2(a) := \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

è ben definita e continua.

Riguardante F_1 possiamo applicare il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali nella situazione

$$E_1 = \big(0, \pi/2\big)\,, \quad S = [0, +\infty)\,, \quad f(x,a) = e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\;.$$

Infatti,

$$\big(0, \pi/2\big) \ni x \longmapsto e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x} \text{ è continua, quindi misurabile}$$
$$\text{per ogni } a \in [0, +\infty)\,,$$

poi

$$\left| e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x} \right| \le \left| \frac{\sin x}{x} \right| \le 1 =: g_1(x)\,, \qquad x \in \big(0, \pi/2\big)\,, a \in [0, +\infty)\,,$$

ove $g_1 : \big(0, \pi/2\big) \longrightarrow [0, +\infty)$ è integrabile, e finalmente

$$[0, +\infty) \ni a \longmapsto e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x} \text{ è continua per ogni } x \in \big(0, \pi/2\big)\,,$$

Con F_2 abbiamo più da lavorare, perché l'integrale improprio che definisce $F_2(0)$ non converge assolutamente. Ma, usando integrazione per parti, possiamo esprimere $F_2(a)$ tramite un integrale improprio che converge assolutamente. Per questo fine calcoliamo prima una primitiva di $e^{-a\,x}\sin x$:

$$\begin{aligned}\int e^{-a\,x}\sin x\,\mathrm{d}x &= -\int e^{-a\,x}\,\mathrm{d}(\cos x)\\ &= -\,e^{-a\,x}\cos x - a\int e^{-a\,x}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -\,e^{-a\,x}\cos x - a\int e^{-a\,x}\,\mathrm{d}(\sin x)\\ &= -\,e^{-a\,x}\cos x - a\,e^{-a\,x}\sin x - a^2\int e^{-a\,x}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

implica

$$\int e^{-a\,x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\frac{e^{-ax}}{1+a^2}\big(\cos x + a\,\sin x\big) + C\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Ora abbiamo per ogni $a \in [0, +\infty)$ e $b > \pi/2$

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/2}^{b} e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\pi/2}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\bigg(-\,\frac{e^{-ax}}{1+a^2}\big(\cos x + a\,\sin x\big)\bigg)\end{aligned}$$

$$= -\frac{e^{-ax}}{1+a^2} \cdot \frac{\cos x + a\,\sin x}{x}\Bigg|_{x=\pi/2}^{x=b} - \int\limits_{\pi/2}^{b} \frac{e^{-ax}}{1+a^2} \cdot \frac{\cos x + a\,\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

perciò

$$\begin{aligned} F_2(a) &= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\pi/2}^{b} e^{-a\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\,a}{\pi(1+a^2)}\,e^{-\frac{a\pi}{2}} - \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+a^2} \cdot \frac{\cos x + a\,\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

dove l'integrale improprio converge assolutamente.

Risulta che la continuità di F_2 è equivalente alla continuità di

$$[0\,,+\infty) \ni a \longmapsto \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+a^2} \cdot \frac{\cos x + a\,\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

che si verifica similmente come abbiamo fatto per F_1.

Concludiamo che $F = F_1+F_2$ è continua. Poiché nell'esercizio 3) abbiamo visto che

$$F(a) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a}\,, \qquad a \in (0,+\infty)\,,$$

risulta che

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = F(0) = \lim_{0<a\to 0} F(a) = \lim_{0<a\to 0} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\square$

5) Sia $a \in (-1,1)$ arbitrario. Si verifichi che la formula

$$F(a) := \int\limits_0^{\pi/2} \left(\ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione derivabile $F : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ e si calcoli la derivata di F.

Si deduca che

$$\int_0^{\pi/2} \left(\ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \pi \arcsin a\,, \qquad a \in (-1,1)\,.$$

<u>Soluzione</u>.

Poiché

$$0 < \ln(1+t) < t\,, \qquad t > 0\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \left|\left(\ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{1}{\cos x}\right| &= \left(\ln \frac{1+|a|\cos x}{1-|a|\cos x}\right) \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \ln\left(1 + \frac{2|a|\cos x}{1-|a|\cos x}\right) \\ &\leq \frac{2|a|}{1-|a|\cos x} \\ &\leq \frac{2|a|}{1-|a|}\,, \qquad x \in \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right),\, a \in (-1,1)\,. \end{aligned}$$

Applicando il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali, risulta che la formula

$$F(a) := \int_0^{\pi/2} \left(\ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}x$$

definisce una funzione continua $F : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$

Poi, siccome

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

e

$$\left|\frac{2}{1-a^2\cos 2x}\right| \leq \frac{2}{1-a^2}\,, \qquad x \in \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right),\, a \in (-1,1)$$

per il il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale F è derivabile in $(-1,1)$ e

$$F'(a) := \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\, \mathrm{d}x\,, \qquad a \in (-1,1)\,.$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra usiamo la sostituzione

$$t = \mathrm{tg} x\,, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\,,$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (1+\mathrm{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ottenendo

$$\begin{aligned} F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-\dfrac{a^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-a^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,, \qquad a \in (-1,1)\,. \end{aligned}$$

Risulta che $F(a) = \pi\,\arcsin a + C$ e, poiché $F(0) = 0$, la costante C dev'essere uguale a zero. Cosicché

$$\int_0^{\pi/2} \left(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = F(a) = \pi\arcsin a\,, \qquad a \in (-1,1)\,.$$

$\square$

6) Derivando sotto il segno di integrale, calcolare gli integrali :

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(x\,y)}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad y > 0\,,$$

(b) $$\int_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\cos(b\,x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a > 0\,, b \in \mathbb{R}\,.$$

Soluzione.

Di (a) :

Poiché

$$0 \leq \operatorname{arctg}\lambda \leq \lambda\,, \qquad \lambda \geq 0\,,$$

abbiamo

$$0 \leq \frac{\operatorname{arctg}(x\,y)}{x\,(1+x^2)} \leq \frac{y}{1+x^2}\,, \qquad x, y \geq 0\,.$$

Applicando il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali, risulta che la formula

$$F(y) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x\,y)}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione continua $F : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$.

Per di più, poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\operatorname{arctg}(x\,y)}{x\,(1+x^2)}\right) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}\,,$$

per il il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale F è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$F'(y) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad y > 0\,.$$

Ora calcoliamo l'integrale alla parte destra di questa ugualità :

Se $y \neq 1$ allora abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{1}{1-y^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{1}{1+x^2y^2}$$

e risulta

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{1}{1-y^2}\operatorname{arctg} x\,\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{y}{1-y^2}\operatorname{arctg}(xy)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= \frac{1}{1-y^2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{y}{1-y^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1-y}{1-y^2}\,\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+y} \quad : \end{aligned}$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{a\,x+b}{1+x^2} + \frac{c\,x+d}{1+x^2y^2}$$

e queste costanti si calcolano come segue :

$$\begin{aligned} 1 &= \big(a\,x+b\big)\big(1+x^2y^2\big) + \big(c\,x+d\big)\big(1+x^2\big) \\ &= (a\,y^2+c)\,x^3 + (b\,y^2+d)\,x^2 + (a+c)\,x + b + d \end{aligned}$$

implica

$$\begin{cases} a\,y^2+c=0 \\ b\,y^2+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

e dalla prima e la terza equazione risulta $a=c=0$, mentre la seconda e la quarta equazione hanno come soluzione

$$b = \frac{1}{1-y^2}\,, \qquad d = -\frac{y^2}{1-y^2}\,.$$

Se invece $y=1$, allora $\Bigg($usando il solito metodo di integrazione della funzione $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\Bigg)$ si ottiene

$$F'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{4}\,,$$

quindi anche in questo caso vale

$$F'(y) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+y}\ :$$

Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{1+x^2} - \int x\left(-\,\frac{2\,x}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2\,x^2+2-2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e da questa relazione si esprime

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che F è una primitiva della funzione

$$(0\,,+\infty) \ni y \longmapsto \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+y}$$

e così della forma $F(y) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+y)+C$. Ma, poiché $\lim\limits_{0<y\to 0} F(y) = F(0) = 0$, la costante C dev'essere uguale a zero e risulta

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x\,y)}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)\,, \qquad y>0\,.$$

<u>Di</u> (b) :

Sia $a>0$ e definiamo la funzione $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tramite la formula

$$F(b) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-a x^2}\cos(b x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial b}\Big(e^{-a x^2}\cos(b x)\Big) = -\,e^{-a x^2}x\,\sin(b x)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\Big|-\,e^{-a x^2}x\,\sin(b x)\Big| \le e^{-a x^2}x = e^{-\frac{3a}{4}x^2}\,\frac{2}{\sqrt{a}}\,\underbrace{e^{-\frac{a}{4}x^2}\Big(\frac{\sqrt{a}}{2}\,x\Big)}_{\le\,1/2} \\ \le \frac{2}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{3a}{4}x^2}\,,\end{aligned}$$

per il il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale F è derivabile e

$$F'(b) := -\int\limits_0^{+\infty} e^{-a x^2}x\,\sin(b x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad b\in\mathbb{R}\,.$$

Successivamente, tramite integrazione per parti risulta

$$\begin{aligned}
F'(b) &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \sin(bx)\,\mathrm{d}e^{-ax^2} \\
&= \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin(bx) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{b}{2a} F(b)\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ora, risolvendo l'equazione differenziale lineare

$$F'(b) = -\frac{b}{2a} F(b)$$

con la condizione iniziale

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \overset{s=\sqrt{a}\,x}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \overset{\text{Esecizio 2)}}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx)\,\mathrm{d}x = F(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,.$$

□

7) Applicando il teorema di Tonelli alla funzione

$$x\,e^{-x^2(1+y^2)}$$

si calcoli

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzione.

La funzione $f : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ definita dalla formula

$$f(x,y) := x\,e^{-x^2(1+y^2)}$$

è continua, quindi misurabile, perciò possiamo applicare il teorema di Tonelli ottenendo

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$$

e, similmente,

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Di conseguenza

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,.$$

Calcoliamo le due parti dell'ugualità di cui sopra :
Poiché

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)})\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2\,(1+y^2)}\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)})\,\mathrm{d}\big(-x^2(1+y^2)\big)\\ &= \frac{1}{2\,(1+y^2)}\ ,\end{aligned}$$

risulta

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2\,(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\ .$$

D'altro canto, per ogni $x>0$ vale

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}(xy) \overset{t\,=\,xy}{=} e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

e così

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 .$$

Concludiamo che

$$\frac{\pi}{4} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2, \text{ cioè } \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

□