Calcolo 2, Calcolo 3 vecchio ordinamento, prova scritta 2/9/2011
(gli studenti di Calcolo 2 svolgeranno i primi 6 esercizi, quelli di Calcolo 3 svolgeranno l'esercizio 7 invece del 6)

1. Si risolva il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} Y' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \cos x \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. Si calcoli, giustificando tutti i passaggi,

$$\lim_n \int_0^1 x \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n dx\,.$$

3. Si calcoli l'area della superficie della porzione di cilindro di equazione $x^2 + z^2 = R^2$ ($y \geq 0$), compresa tra i piani di equazione $y = mx$ e $y = nx$ ($m > n > 0$).

4. Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale di componenti $\mathbf{v}(x, y, z) = (x - \sin y, -2y + z^2, 3z + \cos x)$, dalla superficie chiusa di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2y = 5$.

5. Sia $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, e si indichi con $c_k(f)$ il coefficiente di Fourier di ordine $k$ in di $f \in L^1((-1, 1), dx)$. Si determini l'ordine di infinitesimo di $c_k(f)$ (sugg: si verifichi prima che $f' \in L^1((-1, 1), dx)$).

6. Sia
$$f(x) := \frac{\chi_{[1,+\infty)}(x)}{x^{2/3}}\,.$$
Si dica se $\hat{f}$ è ben definita come funzione in $L^2(\mathbb{R}, dx)$ e, in caso affermativo, se ne calcoli la norma $\|\hat{f}\|_2$.

7. Si dica se $f(x) = e^{-|x|}$ è in $L^1(\mathbb{R}, dx)$ e, in caso affermativo se ne calcoli la trasformata di Fourier.