

1. Si determini la soluzione $y(x)$ del problema differenziale di Eulero

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = 1 \\ y(1) = 1, y'(1) = -1 \end{cases}$$

2. Si determini l'area della superficie di rivoluzione

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, 1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

3. Si determini per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x, y) := \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

risulti sommabile nel quadrato $Q := (0, 1) \times (0, 1)$.

4. Si calcolino i coefficienti di Fourier c_k della funzione periodica, che nell'intervallo $[0, 2\pi)$ vale

$$f(x) = x.$$

Si calcoli inoltre

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

(ammettendo come valore $+\infty$ nel caso la suddetta serie risultasse divergente).

5. Nel caso dell'esercizio precedente si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie trigonometrica

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

È data agli studenti la possibilità di recuperare solo una parte dello scritto (in base ai risultati dei precedenti test intermedi). La prima parte consisterà negli esercizi 1,2,3, mentre la seconda parte negli esercizi 3,4,5 (cioè l'esercizio 3 è comune alle due parti). Gli studenti dovranno decidere quale parte intendono recuperare all'inizio della prova dopo aver ricevuto l'elaborato, e comunicare la decisione al docente dopo aver scritto sul foglio dell'elaborato tale decisione. Essi avranno a disposizione 180 minuti per l'intero compito e 110 per metà elaborato. Alla fine del conseguimento del voto finale dello scritto varrà il risultato dell'ultimo elaborato consegnato.