Calcolo 2, 2^0 esonero, 13/1/2012

1. Si calcoli, giustificando tutti i passaggi, $F'(0)$, dove F è definita come
$$F(t) := \int_0^1 e^{x(x+t)}\, dx\,.$$

2. Si provi che la successione di funzioni $f_n(x) := x^n$ converge a zero in $L^p([0,1], dx)$, $1 \leq p < +\infty$, ma non converge in $L^\infty([0,1], dx)$.

3. Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)$ della funzione periodica, che nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ vale
$$f(x) = x\,.$$
Si determini inoltre, il limite puntuale della serie trigonometrica
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{\imath kx}\,.$$

4. Siano c_k i coefficienti di Fourier della funzione
$$f(x) = e^{-(\tan x)^2}\,.$$
Si provi che
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty\,.$$
(sugg: si provi che $f(x)$ definisce, a meno di discontinuità eliminabili nei punti $\{\pi/2 + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, una funzione infinitamente differenziabile, e quindi i suoi coefficienti di Fourier decrescono abbastanza rapidamente)