Calcolo 2, Scritto, 9/2/2012

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(4)} - 16y = \cos 2x\,.$$

2. Sia data in $\mathbb{R}^2$ la curva Γ di equazioni
$$x(t) = 2\cos t - \cos 2t\,, y(t) = 2\sin t - \sin 2t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$
Si dica se Γ è una curva di Jordan regolare a tratti e, in caso affermativo, se ne calcoli l'area della porzione di piano in essa racchiusa.

3. Si calcoli
$$\int_1^e \frac{1}{x}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} (\ln x)^{k\ln k}\right] dx$$
ammettendo come valore $+\infty$ nel caso l'integrale risultasse divergente.

4. Si dica se la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\imath kx}}{k^2}$$
definisce una funzione in $L^2([0,2\pi], dx)$ e, in caso affermativo, se ne calcolino i coefficienti di Fourier e la norma (possibilmente scrivendo quest'ultima come una serie convergente).

5. Si dica, per $p \in \mathbb{R}$, se la funzione
$$F(p) := \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\frac{1}{x^2}}) \cos(px)\, dx\,.$$
risulti essere ben definita e, in caso affermativo, se: (a) F è continua, (b) $F \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ (sugg: per il punto (b) si integri, dopo averlo giustificato, 2 volte per parti).

Tutti i passaggi vanno adeguatamente giustificati.