Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2010/2011
Calcolo 2, 2^0 esonero, 02/02/2011

(1) Sia data su $(0,1)$ la funzione a valori reali estesi
$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n(\ln n)^2}\,.$$
Si calcoli $\int f$.

(2) Sia dato $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\,, 0 \leq x \leq 1\}$. Si provi che $G \subset \mathbb{R}^2$ ha misura esterna nulla.

(3) Si calcoli, se esiste
$$\lim_n \int_0^1 \left(1 + \tan\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x\,.$$

(4) Si dica se
$$f(x) = e^{-|x|}$$
è in $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$ e, in caso affermativo, se ne determini la trasformata di Fourier.

(5) Sia
$$f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}\,.$$
(i) Si dica se $f' \in L^1((-\pi,\pi), \mathrm{d}x)$ e, in caso affermativo si calcoli $\lim_{|k|\to+\infty} c_k(f')$.
(ii) Si determini l'ordine di infinitesimo di $c_k(f)$ (sugg: si utillizzi (i) dopo una integrazione per parti nella formula che definisce $c_k(f)$).

Ogni asserzione o computazione deve essere sufficientemente giustificata, pena la nullità della parte dell'esercizio coinvolta.