

Corso di Laurea in Fisica, a.a. 2010/2011

Calcolo 2, 2^o esonero, 02/02/2011

- (1) Si determini la curva integrale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y/x - \operatorname{ctan}(y/x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(sugg: si effettui la sostituzione $y/x = u$ e si risolva la corrispondente equazione differenziale soddisfatta da $u(x)$).

Si dica se esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$.

- (2) Si determini il flusso uscente dalla superficie chiusa che delimita il cubo centrato nell'origine e di lato L , del campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x - y, 3yz^2, -z^3).$$

- (3) Sia dato $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$. Si provi che $G \subset \mathbb{R}^2$ ha misura esterna nulla.

- (4) Si calcoli $\nabla f(1, 1)$ se

$$f(x, y) = \int_x^y \cos(xt^2) dt.$$

- (5) Si consideri sul quadrato $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ \frac{1}{2y^2}, & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{negli altri punti del quadrato} \end{cases}$$

Si calcolino i due integrali iterati $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dx] dy$, $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) dy] dx$, e $\int \int_Q |f(x, y)| dx dy$ (**6 punti**).

Si dica se si puo dare un senso all'integrale $\int \int_Q f(x, y) dx dy$ come integrale improprio di Riemann o come integrale di Lebesgue

- (6) Sia data

$$f_n(x) := \sum_{k=2}^n \frac{\cos kx}{\sqrt{k} \ln k}.$$

Si dica se la successione f_n converge ad una funzione $f \in L^2([0, 2\pi], dx)$ e, in caso affermativo, se ne calcoli la norma $\|f\|_2$.

- (7) Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x) \sin x.$$

Ogni asserzione o computazione deve essere sufficientemente giustificata, pena la nullità della parte dell'esercizio coinvolta.