Calcolo 2, prova scritta 22/6/2011

1. Si risolva la seguente equazione differenziale
$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = \cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

2. Sia $f_n := nx^2 e^{-nx^2}$. Si provi che $\lim_n f_n = 0$ in $L^p([0,1], dx)$ con $p \in [1, +\infty)$.

3. Sia f_n come nell'esercizio precedente. Si verifichi che
$$\lim_n \left| f_n(1/\sqrt{n}) - f_{n^2}(1/\sqrt{n}) \right| = 1/e$$
e si usi questo risultato per provare che la successione f_n non può essere una successione di Cauchy in $L^\infty([0,1], dx)$. Suggerimento: si tenga conto che, in questo caso,
$$\operatorname*{esssup}_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \,.$$

4. Sia data nel proprio dominio di definizione la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \right) dy \,.$$
Si calcoli
$$\oint_{C_r} \omega$$
dove C_r è la circonferenza di raggio r con $r \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ percorsa in senso antiorario.

5. Sia $f(x) = e^{\cos x}$, con $c_k(f)$ i suoi coefficienti di Fourier. Si provi che
$$\lim_{|k| \to +\infty} k^n c_k(f) = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

6. Sia
$$f(x) := \frac{\chi_{[1,+\infty)}(x)}{x} \,.$$
Si dica se $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ e, in caso affermativo, si calcoli $\|\hat{f}\|_2$.