Calcolo 3, appello straordinario 14/12/2011

1. Si determini la trasformata di Laplace della funzione $y(x)$ che soddisfa, per $x \geq 0$, il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1\,, y'(0) = -1 \end{cases}$$
2. Si determini la soluzione del problema di Cauchy dell'esercizio precedente.
3. Si calcoli il flusso del campo vettoriale
$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma, \qquad \vec{F}(x,y,z) = (xz^2, yz^2 - z^2, z)$$
dove Σ è la superficie
$$x^2 + y^2 - 2y = 3, \qquad x \geq 0 \qquad 0 \leq z \leq 2$$
ed $\vec{n}$ è orientata in modo che $n_x \geq 0$.
4. Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale dell'esercizio precedente, dalla sfera di centro $(1,1,0)$ e raggio 1.
5. Siano c_k i coefficienti di Fourier della funzione
$$f(x) = e^{-(\tan x)^2}\,.$$
Si provi che
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < +\infty\,.$$
(sugg: si provi che $f(x)$ è infinitamente differenziabile, e quindi, che i suoi coefficienti di Fourier decrescono abbastanza rapidamente)