Calcolo 3 (vecchio ordinamento, prova scritta 20/7/2011

1. Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = \cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

2. Si calcoli l'area della superficie della porzione di cilindro di equazione $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \geq 0)$, compresa tra i piani di equazione $z = mx$ e $z = nx$ $(m > n > 0)$.

3. Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale di componenti $\mathbf{v}(x, y, z) = (x-y, 2y+z^2, z)$, dalla superficie chiusa di equazione $x^2+y^2+z^2+2x = 1$.

4. Sia data nel proprio dominio di definizione la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x - 1)^2 + y^2}\right) dy\,.$$

Si calcoli

$$\oint_{C_r} \omega$$

dove C_r è la circonferenza di raggio r con $r \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ percorsa in senso antiorario.

5. Sia $f(x) = e^{\cos x}$, con $c_k(f)$ i suoi coefficienti di Fourier. Si provi che

$$\lim_{|k| \to +\infty} k^n c_k(f) = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

6. Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.