Analisi reale e complessa

C.Rea

Università di Roma Tor Vergata.

Contents

Part 1

Misura e integrale di Lebesgue

CHAPTER 1

Misura di Lebesgue

1. Generalità

Notazioni:

- χ_E indica la *funzione caratteristica dell'insieme* E; è uguale a 1 in E e a zero fuori di E.
- B_r indica la palla aperta di raggio r e centro 0.
- $E_j \uparrow E$ significa $E_j \subset E_{j+1}, \forall j$ e $E = \cup_j E_j$ (E_j sono insiemi),
- $E_j \downarrow E$ significa $E_{j+1} \subset E_j, \forall j$ e $E = \cap_j E_j$.

Integrale di Riemann e misura di Peano Jordan. Per integrare col metodo di Riemann una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che, per fissare le idee, supponiamo non negativa, limitata, e nulla fuori di un compatto, ci si serve di funzioni scaletta $s \geq 0$ consistenti in un numero finito di gradini a forma di parallelepipedo.

$\int s$ è dunque definito senza ambiguità in modo elementare come somma di misure di parallelepipedi. Si prendono allora due scalette s_- e s_+, con $s_- \leq f \leq s_+$. Il volume dell'intercapedine tra le due scalette è $\int s_+ - \int s_-$. Se $s_\pm$ si possono scegliere cosí prossime tra loro in modo da rendere arbitrariamente piccolo questo volume, certamente $\sup_{s_- \leq f} \int s_-$ e $\inf_{s_+ \geq f} \int s_+$ sono uguali. Il loro comune valore definisce allora $\int f$ e f è detta *integrabile secondo Riemann*. Vedremo che l'integrale di Lebesgue usa altre scalette.

Misura di Peano Jordan All'integrale di Riemann corrisponde la misura di Peano Jordan. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato. E si dice *PJ-misurabile* se la sua funzione caratteristica χ_E è integrabile secondo Riemann e la misura di Peano Jordan di E è definita da $m(E) = \int \chi_E$.

È presto visto che la misurabilità di E equivale all'esistenza di plurintervalli $P^{\pm}$, con $P^- \subset E \subset P^-$, in modo che la differenza $m(P^+) - m(P^-)$ sia arbitrariamente piccola.
Se E non è limitato si impone la misurabilità di $E \cap B_r$ per ogni $r > 0$ e si pone $m(E) = \lim_{r\uparrow\infty} m(E \cap B_r)$.

Questo metodo di integrazione e di misura è abbastanza efficiente per una sola funzione continua o con discontinuità isolate. Ma è carente per lo studio di funzioni con discontinuità non isolate e soprattutto per le successioni. Per esempio la sola condizione maneggevole che esso fornisce per avere $\lim \int f_k = \int \lim f_k$ è la convergenza uniforme delle f_k. Perció non si applica alle f_k qui accanto pur avendosi $\lim \int f_k = \int \lim f_k = 0$, perché le f_k tendono a $\chi_{\{0\}}$ che è integrabilissima e ha integrale 0. Tuttavia la nostra goffa condizione non se ne accorge.

Osserviamo che persino $\mathbb{Q}$ è scandalosamente non PJ-misurabile. Difatti una scaletta $s_- \geq 0$ al disotto di $\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ è nulla mentre una s_+ al disopra di $\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ è ≥ 1 in $(0,1)$ e quindi $\int(s_+ - s_-) \geq 1$. Noi vogliamo invece che siano soddisfatte le due condizioni seguenti
1 *Gli insiemi misurabili costituiscono una σ-algebra.*
Questo significa che un'unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile e che il complementare di un insieme misurabile è anch'esso misurabile.

La misura d Peano-Jordan non soddisfa questa proprietà perchè i singoli punti sono misurabili ma $\mathbb{Q}$ non lo è.

Inoltre si vuole che la misura di un insieme misurabile sia un numero non negativo oppure ∞ in modo che
2 *La misura sia una funzione σ-additiva.*
Questo significa che la misura dell'unione *disgiunta* di una famiglia numerabile d'insiemi misurabili sia pari alla somma delle loro misure.

Nostro scopo è ora quello di definire una misura $|\cdot|$ che soddisfi 1 e 2 e riproduca la misura di Peano Jordan per insiemi PJ-misurabili. Insomma oltre a 1 e 2 richiediamo la proprietá

3 *Se E è PJ-misurabile allora è misurabile secondo Lebesgue e le due misure coincidono.*

Questa sará la misura di Lebesgue.

Esercizio. Dimostrare che un sottoinsieme numerabile, denso di $\mathbb{R}$ non è mai misurabile secondo Riemann.

2. Misura esterna

Introduciamo una funzione $|\cdot|_e$ definita per *tutti i sotto-insiemi d* $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. $|\cdot|_e$ non sarà σ-additiva come vedremo a pag 16. Non si tratta dunque di una vera misura come sopra prescritto.

Useremo intervalli *chiusi e limitati* I di $\mathbb{R}^n$. $v(I)$ indica il prodotto dei lati di I.

Esercizio 2.1. Dimostrare questi due fatti:

a) Dati I e $\delta > 0$ esistono intervalli I' e I'' con $I'' \subset \overset{\circ}{I}$ e $I \subset \overset{\circ}{I'}$ tali che

(1) $$v(I') - \delta \leq v(I) \leq v(I'') + \delta.$$

b) Se $I \subset I_1 \cup \ldots I_N$, allora si ha

(2) $$v(I) \leq v(I_1) + \ldots v(I_N).$$

Una famiglia *numerabile* $\mathcal{P} = \{I_j\}$ di intervalli si chiama *pluri-ntervallo* (numerabile). La sua unione $\cup I_j$ si indica anche con $\cup\mathcal{P}$. Il peso di $\mathcal{P}$ è per definizione.

$$p(\mathcal{P}) = \sum v(I_j).$$

Definizione. La misura esterna $|E|_e$ di $E \subset \mathbb{R}^n$ è l'estremo inferiore dei pesi dei plurintervalli che coprono E. Cioè

$$|E|_e = \inf_{\cup\mathcal{P} \supset E} p(\mathcal{P}).$$

Riassumiamo alcune proprietá della misura esterna in una proposizione:

PROPOSIZIONE 2.1. (i) *Se* $E \subset F$, *allora* $|E|_e \leq |F|_e$.
(ii) *Sia* $\{E_j\}$ *una famiglia numerabile di insiemi. Si ha*

(3) $$|\cup E_j|_e \leq \sum |E_j|_e$$

(iii) *Si ha* $|E|_e = \inf_{A \supset E} |A|_e$, *cioè* $\forall \varepsilon > 0$, *esiste un aperto* $A \supset E$ *tale che* $|A|_e \leq |E|_e + \varepsilon$,
(iv) *Per ogni intervallo* I *si ha* $|I|_e = v(I)$ *e* $|\partial I|_e = 0$,
(v) *Se* $d(E, F) > 0$, *allora* $|E \cup F|_e = |E|_e + |F|_e$.

Dimostrazione.
(i) è evidente.
(ii) Per ogni j si prende $\mathcal{P}_j$ che copre E_j tale che $p(\mathcal{P}_j) \leq |E_j|_e + \varepsilon\, 2^{-j}$. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \ldots$ copre $\cup E_j$ e si ha $p(\mathcal{P}) = \sum p(\mathcal{P}_j) \leq \sum |E_j|_e + \varepsilon$ perchè $\sum_1^\infty 2^{-j} = 1$.
(iii) Si prende $\mathcal{P} = \{E_j\}$ che copre E, tale che $p(\mathcal{P}) \leq |E|_e + \varepsilon$ e poi, usando la (1), si prende $\mathcal{P}' = \{I'_j\}$ con $I_j \subset \overset{\circ}{I'_j}$, $v(I'_j) \leq v(I_j) + \varepsilon\, 2^{-j}$. Dunque $p(\mathcal{P}') \leq p(\mathcal{P}) + \varepsilon \leq |E|_e + 2\varepsilon$. $A = \cup \overset{\circ}{I'_j}$ è un aperto contenente E e si ha $|A|_e \leq p(\mathcal{P}') \leq |E|_e + 2\varepsilon$.

(iv) La seconda deriva dal fatto che ogni faccia di I è contenuta in un intervallo arbitrariamente sottile. Per la prima osserviamo che $|I|_e \leq v(I)$ perché I copre se stesso. Supponiamo ora che $\mathcal{P} = \{I_j\}$ copra I. Usando la (1) prendiamo $\mathcal{P}' = \{I'_j\}$ con $I_j \subset \overset{\circ}{I'_j}$, $v(I'_j) \leq (1+\varepsilon)\, v(I_j)$. $\{\overset{\circ}{I'_j}\}$ è un ricoprimento aperto del compatto I e quindi $I \subset \cup_1^N \overset{\circ}{I'_j}$ per $N \gg 1$. Applicando la (2), abbiamo $v(I) \leq \sum_1^N v(I'_j) \leq \sum_1^\infty v(I'_j) \leq (1+\varepsilon)\, p(\mathcal{P})$. Quindi $v(I) \leq |I|_e$ per l'arbitrarietá di ε.

(v) Prendiamo una famiglia $\mathcal{P} = \{I_j\}$ che ricopre $E \cup F$, con $p(\mathcal{P}) \leq |E \cup F|_e + \varepsilon$. Suddividendo ciascun I_j, senza cambiare per questo $p(\mathcal{P})$, possiamo supporre che tutti gli I_j abbiano diametro minore di $d(E, F)$ cosicché nessuno di essi incontra sia E che F. Se $\mathcal{P}'$ consiste in quegli I_j che incontrano E e $\mathcal{P}''$ nei rimanenti, allora $\mathcal{P}'$ copre E e $\mathcal{P}''$ copre F, e $p(\mathcal{P}) = p(\mathcal{P}') + p(\mathcal{P}'')$. Dunque $|E|_e + |F|_e \leq p(\mathcal{P}') + p(\mathcal{P}'') = p(\mathcal{P}) \leq |E \cup F|_e + \varepsilon$. La disuguaglianza $\geq$ segue da (3). $\square$

Esercizio. Provare la (v) per un numero finito d'insiemi. Procedere per ricorrenza.

3. Misura di Lebesgue

Definizione $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* o semplicemente *misurabile*, se $\forall \varepsilon > 0$, esiste un aperto $A \supset E$ tale che sia

$$|A \backslash E|_e < \varepsilon.$$

In tal caso la *misura di Lebesgue* $|E|$ di E è definita essere la sua misura esterna. Si pone cioè

$$|E| = |E|_e.$$

ATTENZIONE Questa condizione non va confusa con $|A|_e \leq |E|_e + \varepsilon$, che appare in (iii) a pag 7 e che invece è soddisfatta da qualunque insieme E, perchè $A \supset E$ *non implica* $|A|_e = |E|_e + |A \backslash E|_e$ ma solo $|A|_e \leq |E|_e + |A \backslash E|_e$.

Gli aperti sono ovviamente misurabili.

Riassumiamo alcune proprietá della misura di Lebesgue in una proposizione:

PROPOSIZIONE 3.1.
- (a) *Se* $|E|_e = 0$, *allora* E *è misurabile.*
- (b) *Sia* $\{E_j\}$ *una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Allora* $\cup E_j$ *è misurabile e si ha*

$$|\cup E_j| \leq \sum |E_j|. \tag{4}$$

- (c) *Gli intervalli sono misurabili, e se* $I_1, \ldots, I_N$ *sono non sovrapposti si ha*

$$|I_1 \cup \cdots \cup I_N| = |I_1| + \cdots + |I_N|. \tag{5}$$

Dimostrazione. Per provare (a) si ricopre E con un plurintervallo $\mathcal{P} = \{I_j\}$ con $p(\mathcal{P}) < \varepsilon$. Si applica poi la (1) costruendo $\mathcal{P}' = \{I'_j\}$ con $I_j \subset \overset{\circ}{I'_j}$ e $v(I'_j) \leq v(I_j) + \varepsilon\, 2^{-j}$, cosicché $p(\mathcal{P}') < 2\varepsilon$. L'aperto $A = \cup \overset{\circ}{I'_j}$ contiene E e si ha $|A\backslash E|_e \leq |A| \leq p(\mathcal{P}) < 2\varepsilon$.
(b) Si scelgono $A_j \supset E_j$ con $|A_j\backslash E_j|_e \leq \varepsilon 2^{-j}$ e si usa l'identitá $\cup A_j \setminus \cup E_j \subset \cup(A_j\backslash E_j)$. Posto $A = \cup A_j$ otteniamo $|A\backslash \cup E_j|_e \leq \sum |A_j\backslash E_j|_e \leq \varepsilon$. $\cup E_j$ è dunque misurabile. La disuguaglianza (4) riproduce adesso la (3).
(c) Per provare che I è misurabile si applica (b) a $I = \partial I \cup \overset{\circ}{I}$: ∂I è misurabile perché ha misura esterna nulla (vedi (iv) a pag 7) e $\overset{\circ}{I}$ è aperto quindi misurabile.

Proviamo la (5). Per $N = 1$ è ovvia; la ammettiamo dunque fino ad $N - 1$. Usando la (1) prendiamo I'' con $I'' \subset \overset{\circ}{I_N}$ e $|I_N| \leq |I''| + \varepsilon$. La distanza tra i compatti disgiunti $\cup_1^{N-1} I_j$ e I'' è positiva. Usando allora la (v) di pag 7 e l'ipotesi di induzione, abbiamo $| \cup_1^N I_j| \geq |(\cup_1^{N-1} I_j) \cup I''| = \sum_1^{N-1} |I_j| + |I''| \geq \sum_1^N |I_j| - \varepsilon$. La disuguaglianza opposta segue da (4). $\square$

Vogliamo ora provare che la precauzione "attenzione" di pagina 8 è superflua se E è compatto. Se il compatto K è contenuto nell'aperto A si ha infatti

$$|A| = |K|_e + |A\backslash K|. \tag{6}$$

Questo richiede una digressione.

Digressione sui cubi diadici.

Sia $\mathcal{K}_0$ la famiglia dei cubi chiusi di $\mathbb{R}^n$ che hanno lato 1 e vertici in punti di coordinate intere, cioè in $\mathbb{Z}^n$. Se dividiamo a metá i lati, da ciascuno di questi cubi otteniamo 2^n cubi di lato $1/2$. Prendiamo tutti questi nuovi cubi: $\mathcal{K}_1$ è la famiglia dei cubi chiusi di $\mathbb{R}^n$ che hanno lato $1/2$ e vertici in punti di coordinate semi-intere, cioè in $(\mathbb{Z}/2)^n$. Cosí procedendo otteniamo una famiglia numerabile $\mathcal{K}$ di cubi detti *cubi diadici.*

Definizione Due insiemi E ed F si dicono *non sovrapposti* se non hanno punti interni in comune; cioè se si ha $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$.

Si provi che due cubi diadici sono non sovrapposti oppure stanno l'uno nell'altro.
Si provi che *ogni insieme aperto coincide con l'unione dei cubi diadici che esso contiene.*

I cubi diadici sono utili per provare la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. *Ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di cubi non sovrapposti.*

Dimostrazione. Sia S_0 l'unione dei cubi di $\mathcal{K}_0$ contenuti in A, S_1 quella dei cubi di $\mathcal{K}_1$ contenuti in $A\backslash S_0$, S_2 quella dei cubi di $\mathcal{K}_2$ contenuti in $A\backslash(S_0 \cup S_1)$ eccetera. I cubi considerati sono non sovrapposti. Pertanto $\cup S_j$ è unione numerabile di cubi non sovrapposti. Inoltre ogni cubo diadico contenuto in A è tra quelli considerati oppure è contenuto in uno di essi, quindi è

contenuto in $\cup S_j$. Per quanto osservato subito prima di enunciare la proposizione, abbiamo dunque $A \subset \cup S_j$. Poiché $\cup S_j \subset A$ per costruzione, si ha $A = \cup S_j$. $\square$
Fine della digressione

Dimostrazione della (6) È sufficiente provare $\geq$. Per la Proposizione 3.2 l'aperto $A \backslash K$ è unione numerabile di cubi Q_j non sovrapposti, in particolare $|A \backslash K| \leq \sum |Q_j|$. Fissiamo N. La distanza tra i due compatti disgiunti K e $\cup_1^N Q_j$ è positiva. Usando allora (v) a pag 7 e (c) a pag 8 abbiamo $|K \cup (\cup_1^N Q_j)|_e = |K|_e + \sum_1^N |Q_j|$ e poichè $K \cup (\cup_1^N Q_j) \subset A$ abbiamo $|A| \geq |K \cup (\cup_1^N Q_j)|_e = |K|_e + \sum_1^N |Q_j|$. Mandando N all'infinito concludiamo $|A| \geq |K|_e + \sum |Q_j| \geq |K|_e + |A \backslash K|$. $\square$

Dall'uguaglianza (6) derivano alcuni fatti che raggruppiamo in una proposizione:

PROPOSIZIONE 3.3.
- (I) *I chiusi sono misurabili.*
- (II) *Il complementare di un insieme misurabile è misurabile.*
- (III) *L'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi misurabili è misurabile.*
- (IV) *La differenza di due insiemi misurabili è misurabile.*

Dimostrazione. (I) Proviamo dapprima la misurabilità di un compatto K. Prendiamo un aperto $A \supset K$ con $|A| \leq |K|_e + \varepsilon$. Dalla (6) abbiamo $|A \backslash K| = |A| - |K|_e \leq \varepsilon$ come volevamo. La misurabilità di un chiuso C deriva dal fatto che $C = \cup(C \cap \overline{B}_k)$ è unione numerabile di compatti e dalla (b) a pag 8.
(II) Sia E misurabile. Si ha $\complement E = \complement \overline{E} \cup (\overline{E} \backslash E)$. Poiché $\complement \overline{E}$ è aperto, è sufficiente provare che $\overline{E} \backslash E$ ha misura esterna nulla ed è quindi misurabile. Prendiamo aperti $A_k \supset E$ con $|A_k \backslash E|_e < 1/k$. Non è restrittivo supporre che A_k è contenuto nell'$1/k$-involucro di E, si ha dunque $d(\complement A_k, E) < 1/k$. Ne segue $\overline{E} = \cap A_k$. Pertanto $\forall k$ si ha $|\overline{E} \backslash E|_e \leq |A_k \backslash E|_e < 1/k$. Passando al limite rispetto a k otteniamo $|\overline{E} \backslash E|_e = 0$ come volevamo.
(III) Si puó fare per esercizio usando (II), la relazione $\cap E_j = \complement[\cup(\complement E_j)]$ e (b) a pag 8.
(IV) Segue banalmente da (II) e (III) perché $E \backslash F = E \cap \complement F$. $\square$

Si noti che dalle Proposizioni 3.1 (b) e 3.3 II segue che *Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ-algebra* come annunciato a pag 6.

La (II) permette di utilizzare chiusi $C \subset E$ per verificare misurabilità di E:

COROLLARIO 3.1. *E è misurabile se e solo se, $\forall \varepsilon > 0$, esiste $C \subset E$ tale che si abbia $|E \backslash C|_e \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione Per la (II) la misurabilità di E equivale quella di $\complement E$ e cioè all'esistenza di $A \supset \complement E$ tale che $|A \backslash \complement E|_e \leq \varepsilon$. Adesso basta porre $C = \complement A$ e osservare che si ha $C \subset E$ e $E \backslash C = A \cap E = A \backslash \complement E$. $\square$

Di frequente uso è il seguente fatto

COROLLARIO 3.2. (Partizione misurabile dell'unitá) *Sia $\mathcal{V}$ una famiglia di aperti, non necessariamente numerabile, sia A la loro unione. Esiste una famiglia numerabile U_j di insiemi misurabili e disgiunti, contenuti ciascuno in uno degli aperti della famiglia $\mathcal{V}$ e tali che si abbia $\cup_1^\infty U_j = A$.*

Dimostrazione A è unione dei compatti $\{x \in A \,|\, \mathrm{dist}(x, \complement A) \le 1/j, |x| \le j\}$. Ricopriamo ciascuno di questi con un numero finito di aperti appartenenti a $\mathcal{V}$. La collezione V_j degli aperti di $\mathcal{V}$ cosí scelti è numerabile, e ricopre A. La famiglia numerabile di insiemi misurabili e disgiunti

$$U_j = V_j \setminus \cup_1^{j-1} V_h$$

ricopre A e si ha $U_j \subset V_j \in \mathcal{V}$. □

4. σ-Additività, continuità monotòna

La proposizione che segue mostra che la misura di Lebesgue è σ-additiva come richiesto a pag 6.

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti in $\mathbb{R}^n$. Si ha*

$$|\cup E_j| = \sum |E_j|. \tag{7}$$

Dimostrazione. Basta provare $\ge$. Supponiamo prima che gli E_j siano limitati. Usando Corollario 3.1 a pag 10, scegliamo dei chiusi $K_j \subset E_j$ tali che $|E_j| \le |K_j| + \varepsilon\, 2^{-j}$. I K_j sono compatti perché limitati. Fissiamo N. Poiché $d(K_j, K_h) > 0$ se $j \ne h$, dall'esercizio a pag 8 segue $\sum^N |K_j| = |\cup^N K_j| \le |\cup E_j|$. Pertanto $\forall N$ abbiamo $|\cup E_j| \ge \sum^N |K_j| \ge \sum^N |E_j| - \varepsilon \sum^N 2^{-j}$. Passando al limite per $N \uparrow \infty$ otteniamo $|\cup E_j| \ge \sum^\infty |E_j| - \varepsilon$ come volevamo.
Rimuoviamo ora l'ipotesi di limitatezza. Poniamo

$$E_{jh} = E_j \cap (B_{h+1} \setminus B_h).$$

Questi sono disgiunti, numerabili e limitati. Applicando due volte la parte precedente abbiamo $|E_j| = \sum_h |E_{jh}|$ e $|\cup_j E_j| = |\cup_{jh} E_{jh}| = \sum_{jh} |E_{jh}| = \sum_j (\sum_h |E_{jh}|) = \sum_j |E_j|$. □

Esercizio 4.1. (a) Usando la proprietà di additività ora dimostrata e le identità $E \cup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (E \cap F)$ e $E = (E \cap F) \cup (E \setminus F)$, unioni disgiunte, si dimostri che se E ed F sono misurabili si ha

$$|E \cup F| = |F| + |E \setminus F|, \tag{8}$$

$$|E| + |F| = |E \cup F| + |E \cap F|. \tag{9}$$

Si badi bene al fatto che tutte le misure coinvolte appartengono a $[0, +\infty]$, dunque *è vietato l'uso dell'operazione di sottrazione!* [1]

[1] Usare le unioni disgiunte $E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$ e $E \cup F = (E \setminus F) \cup F$.

Si noti che la (8) dà

$$F \subset E,\ |F| < \infty\ \Rightarrow |E \backslash F| = |E| - |F|. \tag{10}$$

(b) Si dimostri che se $E \cup Z$ è misurabile e $|Z| = 0$, allora E è misurabile e si ha $|E| = |E \cup Z|$. (Si ha $|Z \backslash E|_e \leq |Z| = 0$, quindi $Z \backslash E$ è misurabile e $|Z \backslash E| = 0$. Perció $E = (E \cup Z) \backslash (Z \backslash E)$ è misurabile e si ha $|E| = |E \cup Z| - 0 = |E \cup Z|$.)

Si noti che la (8) migliora di parecchio la (6) di pag 9 che corrisponde alla situazione $E = K$, $F = A \backslash K$, con $A \supset K$.

Possiamo ora provare la continuità della misura esterna per successioni crescento di insiemi.

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia $E_j \uparrow E$ una famiglia numerabile crescente di insiemi anche non misurabili. Si ha*

$$|E_j|_e \uparrow |E|_e. \tag{11}$$

Dimostrazione Basta provare

$$\sup |E_j|_e \geq |E|_e.$$

Se per qualche j è $|E_j|_e = \infty$ allora $|E| = \infty = \sup |E_j|_e$. Possiamo allora supporre $|E_j|_e < \infty$, $\forall j$.
Occupiamoci prima del caso di una successione crescente $A_j \uparrow A$ di *aperti*. Possiamo quindi usare $|\cdot|$ anziché $|\cdot|_e$. A si decompone in una unione numerabile di insiemi disgiunti e misurabili:

$$A = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \cdots \cup (A_n \backslash A_{n-1}) \cup \ldots.$$

Dunque per la (10) abbiamo

$$|A| = |A_1| + (|A_2| - |A_1|) + \cdots + (|A_n| - |A_{n-1}|) + \cdots = \lim |A_j| = \sup |A_j|$$

come volevamo.

Veniamo al caso generale. È sufficiente trovare $A \supset E$ con $|A| \leq \sup |E_j|_e + \varepsilon$. Scegliamo $A_j \supset E_j$ con $|A_j| \leq |E_j|_e + \varepsilon\, 2^{-j}$ e consideriamo la successione crescente $\tilde{A}_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_j$. Proviamo per induzione che si ha

$$|\tilde{A}_j| \leq |E_j|_e + \varepsilon \sum_{h=1}^{j} 2^{-h}. \tag{12}$$

Per $j = 1$ questa è ovvia perchè $\tilde{A}_1 = A_1$. Da $\tilde{A}_{j+1} = \tilde{A}_j \cup A_{j+1}$ e dalla (9) si ha $|\tilde{A}_{j+1}| = |A_{j+1}| + |\tilde{A}_j| - |\tilde{A}_{j+1} \cap A_j|$ [2]. Ma $|A_{j+1} \cap \tilde{A}_j| \geq |E_j|_e$ perché $E_j \subset E_{j+1} \subset A_{j+1}$ e $E_j \subset A_j \subset \tilde{A}_j$. Per l'induzione ammessa abbiamo allora $|\tilde{A}_{j+1}| \leq |E_{j+1}|_e + \varepsilon\, 2^{-(j+1)} + |E_j|_e + \varepsilon \sum_{h=1}^{j} 2^{-h} - |E_j|_e = |E_{j+1}|_e + \varepsilon \sum_{h=1}^{j+1} 2^{-h}$. Questo prova (12). Posto allora $A = \cup \tilde{A}_j$ andiamo al limite (crescente) nella (12). Per quanto appena visto per le successioni crescenti di aperti abbiamo $|A| = \sup |\tilde{A}_j| \leq \sup |E_j|_e + \varepsilon$ come volevamo. $\square$

[2] La sottrazione è lecita perchè tutte le misure coinvolte nell'uguaglianza sono finite.

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Se $E_j \uparrow E$ allora si ha*

$$|E_j| \uparrow |E|, \tag{13}$$

mentre se $E_j \downarrow E$ e $|E_1| < \infty$, si ha

$$|E_j| \downarrow |E|. \tag{14}$$

Dimostrazione. La (13) è un caso particolare della (11).

Quanto alla (14), se la E_j decrescono abbiamo

$$E_1 = E \cup (E_1 \backslash E_2) \cup \cdots \cup (E_j \backslash E_{j+1}) \cup \ldots$$

unioni disgiunte. Poichè è $|E_j| \leq |E_1| < \infty,\ \forall j$, si può di nuovo applicare la (10) che dà

$$|E_1| = |E| + (|E_1| - |E_2|) + \cdots + (|E_j| - |E_{j+1}|) + \cdots = |E| + |E_1| - \lim |E_j|.$$

$\square$

Osserviamo che la condizione $|E_j| < \infty$ per la (14) è essenziale. Si guardi quest'esempio. E_j sia la striscia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $0 \leq y \leq 1/j\}$. Ovviamente $|E_j| = \infty$ ma $\cap E_j$ è l'asse x che in $\mathbb{R}^2$ ha misura zero.

Naturalmente, invece, ci si puó limitare a supporre $|E_{j_0}| < \infty$ per un qualche j_0; si scartano allora gli E_j che precedono, mentre i successivi hanno necessariamente misura finita.

Sia ora $\{I_j\}$ una famiglia *numerabile* di intervalli non sovrapposti, si ha

$$|\cup I_j| = \sum |I_j|. \tag{15}$$

Difatti dalla (5) a pag 8 segue $|\cup^N I_j| = \sum^N |I_j|$. Poiché la successione è crescente si puó applicare la (13) e andare al limite. $\square$

Ci eravamo proposti di assicurare che la misura di Lebesgue soddisfacesse anche la condizione 3 di pag 6. Dobbiamo mostrare che se E è PJ-misurabile, allora è anche misurabile secondo Lebesgue e che si ha $m(E) = |E|$. Osserviamo intanto che ciò vale banalmente per gli intervalli e quindi anche per i plurintervalli *finiti*. Ricordiamo poi che essendo E PJ-misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono plurintervalli *finiti* Π e Π' tali da aversi $\Pi \subset E \subset \Pi'$ e $m(\Pi') - m(\Pi) < \varepsilon$. Si ha dunque

$$|\Pi| = m(\Pi) \leq m(E) \leq m(\Pi') = |\Pi'|. \tag{16}$$

Ora, il compatto Π', essendo misurabile, è contenuto in un aperto A tale che sia $|A| - |\Pi'| < \varepsilon$. In conclusione esistono un compatto $\Pi \subset E$ e un aperto $A \supset E$ tali che $|A| - |\Pi| < 2\varepsilon$. E è quindi misurabile secondo Lebesgue, inoltre da $|\Pi| \leq |E| \leq |\Pi'|$, dalla (16) ricaviamo che i due numeri $|E|$ e $m(E)$ appartengono all'intervallo $(|\Pi|, |\Pi'|)$ la cui ampiezza è $< \varepsilon$. Essi pertanto coincidono. $\square$

Avremmo potuto introdurre il concetto di misurabilità usando il *Criterio di Caratheodori:* $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se si ha

$$|F|_e = |F \cap E|_e + |F \backslash E|_e, \quad \forall F \subset \mathbb{R}^n.$$

Tralasciamo la dimostrazione di questo criterio che non useremo.

5. Misura interna

A volte fa comodo approssimare gli insiemi dall'interno con chiusi oppure compatti. Introduciamo perció la *misura interna* $|E|_i$ di un qualunque $E \subset \mathbb{R}^n$. Vedremo a pag 16 che, come quella esterna, *la misura interna non è σ-additiva*. Non si tratta dunque di una misura come prescritto a pag 6. La misura interna è definita da

$$|E|_i \stackrel{def}{=} \sup_{C \subset E} |C| = \sup_{K \subset E} |K|.$$

La prima uguaglianza è una definizione ma la seconda va dimostrata:
Basta provare $\leq$ perché i compatti sono chiusi. Sia $C \subset E$. $C \cap \overline{B}_j$ è una successione crescente di compatti che tende a C. L'uso della (13) dà dunque $|C| = \sup_j |C \cap \overline{B}_j| \leq \sup_{K \subset E} |K|$ perchè i $C \cap \overline{B}_j$ sono particolari compatti contenuti in E. $\square$

Ovviamente si ha

$$|E|_i \leq |E|_e, \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n$$

verificare.

$|\cdot|_i$, $|\cdot|_e$ e $|\cdot|$ sono messe in relazione dalla seguente

PROPOSIZIONE 5.1. *Sono equivalenti questi fatti:*

- (a) E *è misurabile,*
- (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C \subset E$ *tale che* $|E \backslash C|_e < \varepsilon$,
- (c) $\forall \varepsilon > 0$, *esistono* A *e* C, *con* $C \subset E \subset A$, *tali che* $|A \backslash C| < \varepsilon$,
- (d) *Si ha* $|E|_i = |E|_e$.

Dimostrazione. (a)$\Leftrightarrow$(b) è il corollario 3.1 a pag 10.
(a)$\Rightarrow$(c). Scelto $A \supset E$ con $|A \backslash E| < \varepsilon/2$ e C come in (b) ma con $\varepsilon/2$ al posto di ε, abbiamo $A \backslash C = (A \backslash E) \cup (E \backslash C)$, donde $|A \backslash C| < \varepsilon$.
(c)$\Rightarrow$(a). Si ha $|A \backslash E| \leq |A \backslash C| < \varepsilon$. (c)$\Leftrightarrow$(d). Segue immediatamente dalla definizone di $|\cdot|_i$ e da $|E|_e = \inf_{A \supset E} |A|$, vedi (iii) pag 7. $\square$

La doppia definizione di $|\cdot|_i$ e la (d) permettono facilmente di dimostrare quanto segue

Esercizio: *L'insieme misurabile* E *ha misura finita se e solo se* $\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset E$ *tale che* $|E| \leq |K| + \varepsilon$ *(oppure* $|E \backslash K| \leq \varepsilon$*).*

6. Patologia

6.1. *L'insieme di Cantor.* I fessi credono che un sotto-insieme di $\mathbb{R}$ che abbia misura di Lebesgue zero sia necessariamente numerabile. L'insieme di Cantor C serve per sbugiardarli. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in tre parti uguali e sopprimiamo l'intervallo *aperto* centrale. Resta il chiuso $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Sottoponiamo i due intervalli che compongono C_1 alla stessa chirurgia ottenendo un chiuso C_2 fatto di quattro intervalli di lunghezza $1/9$. Così procedendo otteniamo C_k composto di 2^k intervalli lunghi 3^{-k} ciascuno. *L'insieme di Cantor* è $C = \cap C_k$. C è chiuso perchè è intersezione di chiusi, e quindi è compatto perchè è limitato. Poichè la famiglia $\{C_k\}$ è decrescente, si ha $|C| = \lim |C_k| = \lim (2/3)^k = 0$.
Proviamo ora che C è in corrispondenza biunivoca con $[0,1]$ e quindi ha la potenza del continuo; perciò non è numerabile. Usiamo la numerazione ternaria fatta con le sole cifre $0,1$ e 2. Osserviamo che C_1 è l'insieme delle $x \in [0,1]$ che si possono scrivere in numerazione ternaria senza che la prima cifra dopo la virgola sia 1. Per esempio $1/3 \in C_1$ lo scriviamo nella forma $0,0\overline{2}$ anzichè $0,1$. Analogamente gli $x \in C_2$ sono quei numeri in $[0,1]$ che si possono scrivere evitando l'1 sia come prima sia come seconda cifra dopo la virgola. Per farla breve C è l'insieme dei numeri in $[0,1]$ scrivibili in numerazione ternaria senza usare mai la cifra 1. Adesso definiamo $C \to [0,1]$ in questo modo: prendiamo un $x \in C$, lo scriviamo in forma ternaria senza gli 1, poi mettiamo un 1 in tutti i posti dove dove si trova un 2. Nel numero così ottenuto appaiono solo le cifre 0 e 1 perciò è leggibile come se fosse un numero x' scritto in forma binaria. L'applicazione $x \mapsto x'$ è biunivoca. Difatti ogni numero $x' \in [0,1]$ può essere scritto in forma binaria del tipo $0,\ldots$ (per esempio "uno" si scrive $0,\overline{1}$) Successivamente sostituiamo la cifra "1" con la cifra "2". Otteniamo un'espressione che, come numero ternario, rappresenta un $x \in C$.

6.2. *L'insieme di Vitali.* Non è facile costruire un insieme che non sia misurabile secondo Lebesgue; dopo ne spiegheremo il perchè.
Prima cosa identifichiamo l'intervallo $[0,1)$ con la circonferenza Γ di lunghezza 1 (cioè di raggio $1/(2\pi)$) mediante l'ascissa curvilinea s di Γ. Una rotazione r_t di Γ è del tipo $s \mapsto s + t, \mod 1$. r_t è biunivoca, come trasformazione $\Gamma \to \Gamma$ e conserva la lunghezza degli archi; vista come $[0,1) \to [0,1)$ manda un intervallo in un intervallo della stessa lunghezza, oppure in due intevalli con la stessa lunghezza complessiva. Se ne può concludere che un insieme misurabile (secondo Lebesgue) $E \subset [0,1)$ va in un insieme $r_t E \subset [0,1)$ ancora misurabile e della stessa misura. Adesso introduciamo in $[0,1)$ la relazione di equivalenza $\{s \sim s' \Leftrightarrow s - s' \in \mathbb{Q}\}$. Ciascuna classe è numerabile e il quoziente $[0,1)/\sim$ non è numerabile perchè altrimenti $[0,1)$ sarebbe unione numerabile di numerabili e quindi esso stesso numerabile cosa che non è.

L'*insieme di Vitali* $V \subset [0,1)$ è costruito scegliendo un elemento in ogni classe di equivalenza.

Vogliamo dimostrare che V non è misurabile secondo Lebesgue. Se $s, s' \in V$ sono distinti, necessariamente $s - s' \notin \mathbb{Q}$. Consideriamo le rotazioni r_t con t razionale in $[0,1)$ e proviamo che la famiglia numerabile d'insiemi $r_t V$ costistuisce una partizione di $[0,1)$. Fissato $s \in [0,1)$

consideriamo quell'esemplare s' della sua classe che abbiamo incluso in V. Si ha $s - s' \in \mathbb{Q}$ perchè s ed s' sono nella stessa classe. Se $s-s'$ non è già in $[0,1)$ possiamo prendere comunque $t \in [0,1)$ con $t = s - s', \mathrm{mod} 1$, cosicchè abbiamo $s = r_t s' \in r_t V$. Dunque gli $r_t V$ coprono $[0,1)$. Proviamo che sono disgiunti: se $s_0 \in r_t V \cap r_{t'} V$ con $t, t' \in \mathbb{Q}$, avremmo $s_0 = s + t = s' + t'$ per due elementi $s, s' \in V$ e dunque $s - s' = t' - t \in \mathbb{Q}$, pertanto $s = s'$ e quindi $t = t'$. Assumiamo per assurdo che V sia misurabile. Gli insiemi $r_t V$ per $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ sarebbero tutti misurabili, della stessa misura di V e costituirebbero una partizione di $[0,1)$. Questo è impossibile perchè se fosse $|V| = 0$ avremmo $1 = |[0,1)| = \sum_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} |r_t V| = 0$, se invece fosse $|V| > 0$ avremmo $1 = |[0,1)| = \sum_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} |r_t V| = \sum_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} |V| = \infty$. V non è dunque misurabile $\square$

Si noti che quest'ultimo argomento, se applicato alle misure esterne $|V|_e$ e $|r_t V|_e$, tutte tra loro uguali, oppure alle misure interne $|V|_i$ e $|r_t V|_i$, mostra che *la misura esterna e la misura interna non sono σ-additive* come abbiamo annunciato al momento della loro definizione.

La costruzione di V comporta la scelta di un elemento in ciascun insieme di una famiglia *non numerabile* di insiemi (le classi d'equivalenza). Ci si avvale dunque dell'*assioma della scelta per famiglie non numerabili d'insiemi.* Si può dimostrare che questo passaggio non è eludibile per la costruzione di un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Insomma: Se dal sistema assiomatico fondante della matematica togliamo l'usuale assioma della scelta e mettiamo al suo posto questi due assiomi:
primo: ”Data una famiglia *numerabile* di insiemi non vuoti, esiste un insieme che ha un elemento in ogni insieme della famiglia” (assioma della scelta numerabile),
secondo: ”Ogni insieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue”,
otteniamo un sistema logico deduttivo perfettamente coerente: un'altra matematica.

All'inzio del secolo scorso, insigni matematici di probabile temperamento ansioso furono turbati assai dalla questione se si possa compiere o no un'infinità non numerabile di atti del pensiero. Al punto da far loro cambiare di mestiere. Ma noi che compiamo ogni dì un'infinità non numerabile di atti ancor peggiori ce ne freghiamo proprio.

6.3. *Non additivitá della misura esterna.* La misura esterna non difetta solo di σ-additivitá ma anche di additivitá pura e semplice: mostriamo l'esistenza in $\mathbb{R}$ di due insiemi con queste proprietá

$$E' \cap E'' = \emptyset, \quad |E' \cup E''|_e < |E'|_e + |E''|_e.$$

Richiamiamo che la condizione che E sia misurabile è $\inf_{A \supset E} |A \backslash E|_e = 0$. Perció nel caso dell'insieme di Vitali V questo $\inf$ deve essere un numero $c > 0$, cioè si ha $|A \backslash V|_e > c$ per ogni aperto A che contiene V. Del resto, per ogni insieme, e in particolare per V, si ha $|V|_e = \inf_{A \supset V} |A|$. Esiste dunque $A \supset V$ con $|A| < |V|_e + c$. Ora scegliamo $E' = V$ e $E'' = A \backslash V$ che sono certamente disgiunti ed abbiamo $|E' \cup E'' = A|_e < |V|_e + c < |V|_e + |A \backslash V|_e = |E'|_e + |E''|_e$ come volevamo.

Lasciamo al lettore di trovare un esempio che mostri la non additivitá della misura interna.

6.4. *La funzione di Cantor-Lebesgue.* Un sotto-insieme di E si dice *denso in misura in* E se il suo complementare in E ha misura 0. Indichiamo con $\mathbb{D}$ l'insieme dei numeri (detti *diadici*) del tipo $m/2^N$, con $m, N \in \mathbb{N}$ contenuti in $[0, 1]$.

Costruiamo una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$, detta *funzione di Cantor-Lebesgue*, continua, crescente e suriettiva con queste proprietà:

(a) f manda un insieme denso in misura (e precisamente il complementare $[0, 1] \backslash C$ dell'insieme di Cantor) sull'insieme $\mathbb{D}$ che ha misura 0.

(b) Viceversa, f manda l'insieme di Cantor C, che ha misura zero, sull'insieme $[0, 1] \backslash \mathbb{D}$ che è denso in misura.

(c) f è localmente costante nell'aperto $[0, 1] \backslash C$, quindi è derivabile con derivata nulla al difuori di un insieme di misura nulla.

(d) f manda un insieme misurabile E su un insieme non misurabile V.

Costruiamo la successione di funzioni $f_k : [0, 1] \to [0, 1]$ come segue. $f_1(x) = x$, f$_2$ e f_3 sono rappresentate nella figura di destra. f_{k+1} si ottiene spezzando i tratti obliqui di f_k (che sono in numero di 2^k) con la procedura raffigurata a sinistra nella quale si vede anche che si ha $\sup |f_{k+1} - f_k| < 2^{-k}$. Pertanto la successione di funzioni crescenti $f_k = f_1 + \sum_2^k (f_k - f_{k-1})$ converge uniformemente a una funzione continua, crescente f. Il lettore può verificare da sè che f soddisfa (a), (b) e (c). Quanto a (d) consideriamo l'insieme di Vitali $V \subset [0, 1]$. V contiene un solo numero razionale $q \in [0, 1]$ che peraltro è scelto arbitrariamente. Scegliamo q che sia *non diadico*, per esempio $q = 1/3$. Abbiamo allora $V \cap \mathbb{D} = \emptyset$. Posto $E = f^{-1}(V)$ otteniamo $E \subset C$ e quindi $|E|_e \leq |C| = 0$. E è pertanto misurabile (di misura nulla) e, per costruzione si ha $f(E) = V$.

7. Prodotti cartesiani

Per studiare l'integrale di Lebesgue occorre qualche informazione sulla misura dei prodotti cartesiani di insiemi. Nel seguito E', K' e A' saranno un insieme, un compatto e un aperto in $\mathbb{R}^n$ e lo stesso per E'', K'' e A'' in $\mathbb{R}^m$. La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{R}^m$ sarà indicata con $|\cdot|$, mentre quella in $\mathbb{R}^{n+m}$ sarà indicata con $\|\cdot\|$. Valgono le relazioni

$$\|E' \times E''\|_i = |E'|_i \, |E''|_i, \tag{17}$$

$$\|E' \times E''\|_e = |E'|_e \, |E''|_e.$$

Non dimostreremo nè useremo la seconda perchè la sua dimostrazione è troppo laboriosa e non ci serve. In sua vece ne proveremo questo caso particolare:

$$|E'|_i \, |E''|_e \le \|E' \times E''\|_e \le |E'|_e \, |E''|_e. \tag{18}$$

Se ammettiamo provvisoriamente le (17) e (18) abbiamo immediatamente il seguente

TEOREMA 7.1. *Se E' e E'' sono misurabili allora $E' \times E''$ è misurabile e si ha*

$$\|E' \times E''\| = |E'| \, |E''|. \tag{19}$$

Difatti usando la (18) e poi la (17) abbiamo $\|E' \times E''\|_e \le |E'||E''| = |E'|_i \, |E''|_i = \|E' \times E''\|_i$. □

Disgraziatamente però le (17) e (18) abbisognano, per essere dimostrate, che si provi il teorema nei casi di due aperti o due compatti.

Cominciamo con gli aperti A' e A'' scrivendoli come unioni numerabili di cubi non sovrapposti: $A' = \cup Q'_j$, $A'' = \cup Q''_h$, cosicchè gli intervalli non sovrapposti $R_{jh} = Q'_j \times Q''_h \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ricoprono $A' \times A''$. Per la (15) a pag 13 abbiamo allora $\|A' \times A''\| = \sum_{jh} \|R_{jh}\| = \sum_{jh}(|Q'_j| \, |Q''_h|) = (\sum_j |Q'_j|) \, (\sum_h |Q''_h|) = |A'| \, |A''|$. □

Passiamo a due compatti $K' \subset \mathbb{R}^n$ e $K'' \subset \mathbb{R}^m$. Prendiamone gli $1/j$-involucri aperti $A'_j = \{x \in \mathbb{R}^n, \, d(x.K') < 1/j\}$ e A''_j analogo. Da quanto appena provato e dalle relazioni $A'_j \downarrow K'$, $A''_j \downarrow K''$ e $(A'_j \times A'') \downarrow (K' \times K'')$ otteniamo $\|K' \times K''\| = \lim \|A' \times A''\| = \lim(|A'| \, |A''|) = |K'| \, |K''|$. □

Proviamo ora la (17). Se $K' \subset E'$ e $K'' \subset E''$, allora $K' \times K''$ è un particolare compatto contenuto in $K' \times K''$; dunque nella (17) vale il $\ge$.
Viceversa, se $K \subset E' \times E''$, allora le sue proiezioni $\pi' K$ e $\pi'' K$ su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, sono compatti contenuti in E' ed E''. Poichè si ha $K \subset \pi' K \times \pi'' K$, l'uso della (19), già provata per i compatti, dà $\|K\| \le |\pi' K| \, |\pi'' K| \le |E'|_i \, |E''|_i$. □

Tocca ora alla prima delle due diseguaglianze (18). Consigliamo di farsi un disegno per seguire questa parte. Sia $K' \subset E'$, e sia $A \supset E' \times E''$ tale che si abbia $\|A\| \le \|E' \times E''\|_e + \varepsilon$. L'insieme $L = \{y \in \mathbb{R}^m$ t.c. $K' \times \{y\} \subset A\}$ è un aperto contenente E''. Si ha inoltre $K' \times L \subset A$. Dunque $|K'| \, |E''|_e \le |K'| \, |L| \le |A| \le \|E' \times E''\|_e + \varepsilon$. Passando al $\sup$ per $K' \subset E'$ otteniamo $|E'|_i \, |E''|_e \le \|E' \times E''\|_e + \varepsilon$ come volevamo. □

Per finire proviamo la seconda delle (18). Se $A' \supset E'$ e $A'' \supset E''$, allora $A' \times A''$ è un paricolare aperto contenente $E' \times E''$. Poichè la (18) è già dimostrata per gli aperti possiamo dedurne la relazione $|A'|\,|A''| = \|A' \times A''\| \geq \|E' \times E''\|_e$. Passando all'$\inf$ per $A' \supset E'$ e $A'' \supset E''$ abbiamo la conclusione. $\square$

Con questo termina la dimostrazione di (17), (18) e (19).

Lasciamo al lettore di ricavare da (17) e (18) questa immediata conseguenza:

Se $E' \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile, allora per qualunque $E'' \subset \mathbb{R}^m$ si ha

(20) $$\|E' \times E''\|_i = |E'|\,|E''|_i, \quad \|E' \times E''\|_e = |E'|\,|E''|_e.$$

Pertanto, se E' è misurabile, la misurabilità di $E' \times E''$ equivale a quella di E''.

CHAPTER 2

Integrale di Lebesgue

Notazioni:

- $|\cdot|$ indica la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n_x$,
- $\|\cdot\|$ indica la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y$,
- $(a \le f < b)$ indica l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } a \le f(x) < b\}$ e analoghi,
- $(0 \le y < f)$ indica l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \text{ t.c. } 0 \le y \le f(x)\}$ e analoghi.
- $f^+ = \sup(0,f)$ è la *parte positiva* di f e $f^- = -\inf(0,f)$ ne è la *parte negativa* cosicchè si ha $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

1. Integrale di funzioni non negative

In questo paragrafo è data una funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

L'insieme $(0 \le y < f)$ si chiama *sotto-grafico* di f.

Definizione. Se il sotto-grafico $(0 \le y < f)$ di f è misurabile allora f si dice *integrabile* e il suo integrale è la misura in $\mathbb{R}^{n+1}$ del suo sotto-grafico:

$$\int f = \|(0 \le y < f)\|. \tag{21}$$

Dalle proprietà di monotonia (13) a pag 13 e la successiva (14) deriva senza bisogno di dimostrazione il seguente fondamentalissimo

TEOREMA di B.Levi. *Siano $f_N \ge 0$ integrabili.*

- (i) *Se $f_N \uparrow f$, allora f è integrabile e $\int f_N \uparrow \int f$,*
- (ii) *Se $f_N \downarrow g$, allora g è integrabile e se $\int f_N < \infty$, allora $\int f_N \downarrow \int g$* [1].

Non è agevole studiare le proprietà dell'integrale (per esempio $\int(f+g) = \int f + \int g$) a partire da queste definizioni. Occorre approssimare f con opportune funzioni scaletta.
Definiamo le funzioni scaletta di f cosí:

$$s_N(x) = \infty, \quad \text{se } f(x) = \infty.$$

Suddividiamo poi la semiretta $[0,\infty)$ negli intervalli $[m2^{-N},(m+1)2^{-N})$, $m \in \mathbb{N}$, di ampiezza 2^{-N} e poniamo

$$s_N(x) = \sup\{s \in 2^{-N}\mathbb{Z},\ s \le f(x)\}, \quad \text{se } f(x) < \infty.$$

[1] Naturalmente, precisazione idiota, basta $\int f_N < \infty$ per un qualche N.

In altre parole, se $f(x) < \infty$, $s_N(x)$ si ottiene scrivendo $f(x)$ in forma binaria e troncando all'N-sima cifra dopo la virgola. Abbiamo dunque

$$s_N \uparrow f \tag{22}$$

(del resto è $0 \leq f(x) - s_N(x) \leq 2^{-N}$).

La definizione di s_N significa dunque

$$s_N(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m2^{-N}\chi_m(x) + \infty \cdot \chi_\infty(x), \tag{23}$$

dove χ_m è la funzione caratteristica dell'insieme $(m2^{-N} \leq f < (m+1)2^{-N})$, mentre χ_∞ è la funzione caratteristica dell'insieme $(f = \infty)$.
Il Teorema di B. Levi ci permette dunque di affermare quanto segue:

Se le s_N sono integrabili allora anche f è integrabile.

Abbiamo cosí ricondotto lo studio dell'integrabilità di f a quello della misurabilità del sottografico $(0 \leq y < s_N)$ di ciascuna s_N.
Noi lo suddividiamo in strati disgiunti di spessore 2^{-N}:

$$(0 \leq y < s_N) \cap (m2^{-N} \leq y < (m+1)2^{-N}), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

f sará dunque integrabile se ciascuno di questi strati è un insieme misurabile.

Ma allora, guardando la (24) e osservando che il numero $2^N s_N(x) \in \mathbb{N}$ è strettamente maggiore di $2^N y \in [m, m+1)$ se e solo se $s_N(x) \geq (m+1)2^{-N}$, cioè $f(x) \geq (m+1)2^{-N}$, concludiamo che gli strati (24) coincidono con gli insiemi

$$(f \geq (m+1)2^{-N}) \times [m2^{-N}, (m+1)2^{-N}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Poiché l'intervallo a destra è comunque misurabile, per quanto detto subito dopo la (20) a pag 19, la misurabilità di questo prodotto equivale a quella del fattore di sinistra che è un insieme del tipo $(f \geq a)$.
Abbiamo cosí provato il seguente

LEMMA 1.1. *Sia $f \geq 0$. Se per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di dislivello $(f \geq a) \subset \mathbb{R}^n$ di f è misurabile, allora f è integrabile.*

Il Lemma 1.1 si può rovesciare:

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia $f \geq 0$. f è integrabile se e solo se per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di dislivello $(f \geq a) \subset \mathbb{R}^n$ di f è misurabile.*

Dimostrazione. La parte "se" non è altro che il Lemma 1.1.

Supponiamo dunque che f sia integrabile. Fissiamo un numero a. Se $a < 0$ allora $(f \geq a) = \mathbb{R}^n$ è certamente misurabile. Supponiamo $a \geq 0$. Sia $b > a$ arbitrario. L'insieme $(0 \leq y < f)$ è misurabile per ipotesi. Allora lo è anche l'insieme

$$S = (0 \leq y < f) \cap (\mathbb{R}^n \times [a, b))$$

perchè intersezione di misurabili e si ha

$$(f \geq b) \times [a, b) \subset S \subset (f > a) \times [a, b)^2.$$

Nella figura, S è la zona a righe e gli altri due insiemi sono rappresentati da rettangoli.
Per la proprietà (20) a pag 19 delle misure prodotto poc'anzi richiamata, otteniamo $(b-a)|(f \geq b)|_e \leq \|S\|_e = \|S\|_i \leq (b-a)|(f > a)|_i$. In conclusione

$$|(f \geq b)|_e \leq |(f > a)|_i, \quad \forall\, 0 \leq a < b.$$

Ora conviene richiamare la continuità della misura esterna per successioni crescenti provata a pag 12, cioè la (11) che qui riportiamo: $\{E_j \uparrow E\} \Rightarrow \{|E_j|_e \uparrow |E|_e\}$. Prendiamo una successione $b_j \downarrow a$, cosicchè $(f \geq b_j) \uparrow (f > a)$. Passando al limite nella $|(f \geq b_j)|_e \leq |(f > a)|_i$ otteniamo $|(f > a)|_e \leq |(f > a)|_i$ e dunque $(f > a)$ è misurabile $\forall a \in \mathbb{R}^+$. Ma allora lo è anche $(f \geq a) = \cap_j (f > a - \frac{1}{j})$. □

Esercizio Se $f \geq 0$ è continua, allora è integrabile. (Applicare la proposizione precedente considerando che gli insiemi $(f \geq a)$ sono chiusi e quindi misurabili.)

Abbiamo visto a pag 5 che le scalette di Riemann sono comunque integrabili ma che approssimano $f \geq 0$ solo se questa è integrabile secondo Riemann.

[2] Difatti $f(x) \geq b,\ y < b \Rightarrow y < f(x)$ e $y < f(x),\ y \geq a \Rightarrow f(x) > a$

Viceversa, come abbiamo appena mostrato, *le scalette di Lebesgue approssimano qualunque f ma sono integrabili se e solo se lo è f.* Dimostrare.

Confrontando la scaletta di Lebesgue qui rappresentata con quella di Riemann a pag 5, si capisce come il metodo di Lebesgue permetta di integrare una classe molto più vasta di funzioni. I gradini di Lebesgue ben si adattano alla forma di f accompagnandone il grafico mentre quelli di Riemann possono rimanerne molto distanti. Si pensi alla funzione caratteristica di $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ già considerata all'inizio, non integrabile secondo Riemann. Le scalette di Lebesgue in questo caso *coincidono tutte con la funzione stessa!*

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e f una funzione definita in un insieme che contiene E. Sia χ_E la sua funzione caratteristica.

Se $\chi_E f$ è integrabile allora si dice che *f è integrabile in E* e $\int \chi_E f$ si chiama *integrale di f esteso ad E* e lo si indica anche con le notazioni

$$\int_E f, \quad \int_E f(x)\, dx, \quad \int_E f(x)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Se f è integrabile (e quindi misurabile) gli insiemi $(a \leq f < b) = (f \geq a) \cap (f < b)$ sono misurabili e quindi le funzioni χ_m che appaiono nella (23) a pag 22 sono funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e disgiunti. Pertanto

le funzioni scaletta di una funzione integrabile sono funzioni semplici a norma della definizione che segue:

Definizione. Si chiama *funzione semplice in E* una funzione del tipo

$$s(x) = \sum_1^\infty c_j\, \chi_j(x),$$

dove le χ_j sono le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili disgiunti E_j che ricoprono E e $c_j \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. L'insieme di queste funzioni si indica con $\mathcal{S}(E)$. Dimostri il lettore che la somma di due funzioni semplici è semplice, che esse sono integrabili e che si ha

$$\int s = \sum_1^\infty c_j\, |E_j|.$$

Se $f \geq 0$ è integrabile si ha

$$\int_E f = \sup\{\int_E s, \ s \in \mathcal{S}(E), s \leq f\} \tag{25}$$

Difatti per le s contemplate nel sup si ha ovviamente $\int_E s \leq \int_E f$ e del resto esiste una successione $s_N \in \mathcal{S}(E)$ (le scalette di Lebesgue) tale che $\int_E s_N \to \int_E f$.

Mediante le funzioni semplici si può provare l'additività dell'integrale di funzioni non negative:

LEMMA 1.2. *Se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ sono integrabili in E allora anche $f + g$ è integrabile e si ha*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g. \tag{26}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $f = \sum c_j \chi_j$ e $g = \sum d_h \chi_h$ siano funzioni semplici. Anche $f + g$ è allora semplice e quindi integrabile. Le χ_j siano le funzioni caratteristiche degli insiemi del ricoprimento (F_j) e le χ_h di quelle del ricoprimento (G_h), sicchè, posto $E_{jh} = F_j \cap G_h$ e χ_{jh} per la sua funzione caratteristica, si ha $\sum_j |E_{jh}| = |G_h|$, $\sum_h |E_{jh}| = |F_j|$, $\sum_j \chi_{jh} = \chi_h$, $\sum_h \chi_{jh} = \chi_j$. Pertanto si ha $f + g = \sum_{jh}(c_j + d_h)\chi_{jh}$. Da cui $\int(f + g) = \sum_{jh}(c_j + d_h)\,|E_{jh}| = \sum_j c_j \sum_h |E_{jh}| + \sum_h d_h \sum_j |E_{jh}| = \sum_j c_j|F_j| + \sum_h d_h|G_h| = \int_E f + \int_E g$. Nel caso generale si approssimano f e g con le loro scalette f_N e g_N. Si applica infine B.Levi a $f_N + g_N \uparrow f + g \dots$ $\square$

Esercizi.

1. Sia E_j una famiglia numerabile di insiemi misurabili, disgiunti e sia $E = \cup E_j$. Sia $f \geq 0$ integrabile in E. Dimostrare che si ha

$$\int_E f = \sum \int_{E_j} f. \tag{27}$$

2. Sia $f \geq 0$ integrabile. Dimostrare la *Disuguaglianza di Tshebyshev*

$$|(f > a)| \leq \frac{1}{a} \int f, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

(usare $(f > a) \times [0, a) \subset (0 \leq y < f)$).

"Quasi ovunque (in…)*", "per quasi ogni… ".*

Si dice che una proprietà è verificata "*Quasi ovunque* (in E), e si scrive "q. o. in E" oppure "*per quasi ogni x in E*", e si scrive $q\forall x \in E$, se essa vale per ogni $x \in E \backslash Z$, dove Z è un insieme di misura nulla.

Osservazione 1.1. *Sia E un insieme misurabile.*

- (i) *Se $f \geq 0$ è integrabile in E e $|E| = 0$, allora $\int_E f = 0$.*
  (Anche se $f \equiv +\infty$ in E!)
- (ii) *Sia $f \geq 0$. Si ha $\int_E f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.o. in E.*

- (iii) *Se* $f \geq 0$ *è in* $L^1(E)$ *allora* $f < \infty$ *q.o. in* E.

Dimostrazione (i) Sia $s = \sum c_j \chi_{E_j} \leq f$ una funzione semplice. Poiché $E_j \subset E$ si ha $|E_j| = 0$ e quindi $\int_E s = \sum c_j |E_j| = 0$. Dalla (25) a pag 25 segue allora $\int_E f = 0$.
(ii) $\Leftarrow$ $\forall N \in \mathbb{N}$ per Tshebyshev si ha $|(f > 1/N)| \leq N \int f = 0$ e quindi $(f > 0) = \cup_N (f > 1/N)$ ha misura nulla.
$\Rightarrow$ Posto $Z = (f > 0)$, si ha $|Z| = 0$. Usando (i) abbiamo allora $\int_E f = \int_Z f + \int_{E \setminus Z} 0 = 0 + 0$.
(iii) Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha $(f = \infty) \subset (f > N)$. Da Tshebyshev segue allora $|(f = \infty)| \leq |(f > N)| \leq \frac{1}{N} \int_E f$. Passando al limite si ha $|(f = \infty)| = 0$ $\square$

2. Integrale di funzioni di segno qualunque

In questo paragrafo è data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definizione. Se f^+ e f^- sono integrabili allora f si dice *misurabile*.

Definizione. Se inoltre $\int f^+$ e $\int f^-$ non sono entrambi uguali a $+\infty$ allora f si dice *integrabile* e il suo integrale è

$$\int f = \int f^+ - \int f^-. \tag{29}$$

Notiamo che questa definizione concorda con quella già data nel caso $f \geq 0$ perchè in tal caso $f^- = 0$.

Definizione. Se infine si ha anche che entrambi gli integrali $\int f^+$ e $\int f^-$ sono finiti, allora $\int f \in \mathbb{R}$ e si dice che f è *sommabile* o che appartiene a L^1.

Si verifichi che la funzione caratteristica dell'insieme di Vitali non è misurabile, che ogni funzione continua è misurabile [3], che $f(x) = x$ è misurabile ma non integrabile, che $f(x) = 1$ è integrabile, ma non L^1, e che $|x|^{-a}(1 + |x|)^{-b}$ è integrabile ma è L^1 se e solo se $a < 1$ e $a + b > 1$.

Mi hanno chiesto a lezione che interesse abbiano le funzioni misurabili quando non siano anche integrabili, visto che non hanno integrale.
La domanda non è stupida e la risposta è che infatti le funzioni misurabili non hanno nessun interesse in quanto tali, ma lavorare nel loro ambito è molto più agevole perché, a differenza delle integrabili, le funzioni misurabili costituiscono un gruppo (anzi, uno spazio vettoriale come vedremo tra poco) e le integrabili no. Per esempio le funzioni $1/|x|$ e $1/|x-1|$ sono integrabili ma la loro differenza è solo misurabile perchè si ha

$$\int \left(\frac{1}{|x-1|} - \frac{1}{|x|} \right)^+ = \int \left(\frac{1}{|x-1|} - \frac{1}{|x|} \right)^- = \infty.$$

Verificare.

[3] Si applichi l'esercizio a pag 23 alle funzioni continue f^+, f^-.

In corrispondenza dei quattro segni di disuguaglianza ci sono altrettanti tipi di insiemi di dislivello. Questo non creerà confusione grazie al seguente

LEMMA 2.1. • (i) *Per* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *sono equivalenti queste proprietà:*

(30) $(f > a)$ *è misurabile,* $\forall a \in \mathbb{R}$,

(31) $(f \leq a)$ *è misurabile,* $\forall a \in \mathbb{R}$,

(32) $(f < a)$ *è misurabile,* $\forall a \in \mathbb{R}$,

(33) $(f \geq a)$ *è misurabile,* $\forall a \in \mathbb{R}$.

- (ii) f *soddisfa le proprietá sopra elencate se e solo se ciò accade separatamente per* f^+ *e* f^-.

Dimostrazione. (i): (30)⇔(31), perchè $(f \leq a) = \complement(f > a)$, e lo stesso per (32)⇔(33). Inoltre (30)⇒(33) perchè $(f \geq a) = \cap_k (f > -a - 1/k)$ e (33)⇒(30) perchè $(f > a) = \cup_k (f \geq a + 1/k)$.
(ii) può essere dimostrato dal lettore tenendo conto delle seguenti identità:
se $a \geq 0$, si ha $(f > a) = (f^+ > a)$ e $(f^- > a) = (f < -a)$,
se $a < 0$, si ha $(f > a) = (f^- < -a)$ e $(f^+ > a) = (f^- > a) = \mathbb{R}^n$. □

Possiamo ora finalmente dare una caratterizzazione delle funzioni misurabili che ci permetterà di conoscerne le proprietà che servono.

TEOREMA 2.1. *La funzione* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *è misurabile se e solo se i suoi insiemi di dislivello sono misurabili, cioè se vale una delle* (30)-(33).

Dimostrazione. Se f è misurabile allora, per definizione, f^+ e f^- sono integrabili e quindi, per la Proposizione 1.1 a pag 23, soddisfano la (33) qui sopra, e perció, per il lemma precedente, parte (ii), anche f la soddisfa. Ma allora, sempre per il lemma precedente, questa volta parte (i), f soddisfa le (30)-(33).

Viceversa, se ció accade allora, per il lemma qui sopra, parte (ii), f^+ e f^- soddisfano le (30)-(33), in particolare la (33) che, per la Proposizione 1.1 a pag 23 assicura la loro integrabilità. f è pertanto misurabile. □

Esercizi.
1. Dimostrare che se una funzione f è misurabile, allora le sue curve di livello $(f = a)$ sono misurabili. (Usare il Teorema qui sopra).

2. Dimostrare che se f è misurabile allora il suo grafico $\Gamma_f = \{(x, y) | \quad y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ha misura 0.

Soluzione. Si ha $\Gamma_f \cup \{\text{asse}\, x\} = \Gamma_{f^+} \cup \Gamma_{f^-}$. Poichè si ha $\|\{\text{asse}\, x\}\| = 0$, usando l'esercizio 4.1 a pag 11, parte (b), abbiamo $\|\Gamma_f\|_e \leq \|\Gamma_{f^+}\|_e + \|\Gamma_{f^-}\|_e$. Basta dunque provare $\|\Gamma_{f^+}\|_e = \|\Gamma_{f^-}\|_e = 0$. Si è così ricondotti al caso $f \geq 0$.

Sia dunque $f \geq 0$. Posto $\Gamma_f^N = \Gamma_f \cap (B_N \times \mathbb{R}_y)$, con $B_N = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < N\}$, si ha $\Gamma_f = \cup_N \Gamma_f^N$. Quindi basta provare $\|\Gamma_f^N\|_e = 0$ con N fissato. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poniamo $E_k = \{(x,y)||x| < N, k\varepsilon \leq f(x) = y < (k+1)\varepsilon\}$, cosicchè $\Gamma_f^N = \cup_k E_k$, unione disgiunta.

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema, da

$$E_k \subset (B_N \cap (k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon) \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$$

si deduce

$$\|E_k\|_e \leq \varepsilon\, |B_N \cap (k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon)|.$$

L'insieme $(f < \infty)$ è unione disgiunta dei $(k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon)$ per $k = 0, 1, \ldots$. Quindi $|B_N \cap (f < \infty)| = \sum_k |B_N \cap (k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon)|$. Abbiamo così $\|\Gamma_f^N\|_e \leq \sum_k \|E_k\|_e \leq \varepsilon \sum_k |B_N \cap (k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon)| = \varepsilon\, |B_N \cap (f < \infty)| \leq \varepsilon |B_N|$. Donde $\|\Gamma_f^N\|_e = 0$ per l'arbitrarietà di ε.

3. Applicando separatamente l'osservazione 1.1 a pag 25 a f^+ e f^- dimostrare che questa è valida anche senza l'ipotesi $f \geq 0$, tranne l'enunciato (ii) $\Leftarrow$ che è falso.

3. Proprietà delle funzioni misurabili

Esempio Se f è misurabile e $g = f$ q.o., allora anche g è misurabile.
Difatti $(g > a) \cup (f \neq g) = (f > a) \cup (f \neq g)$. Dunque $(g > a)$ differisce dall'insieme misurabile $(f > a)$ per un insieme di misura nulla ed è perciò misurabile; vedi Esercizio 4.1 pag 11, parte (b).

Con la seguente proposizione dimostriamo le proprietà più utili delle funzioni misurabili.

PROPOSIZIONE 3.1.

- (i) *Se f è misurabile e finita e $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\Phi \circ f$ è misurabile. In particolare sono misurabili cf, $f + c$, f^m, e^f.*
- (ii) *Se anche g è misurabile allora sono misurabili $f + g$, fg e, se $g \neq 0$ q.o., anche f/g.*
- (iii) *Se f_j è una successione di funzioni misurabili, allora sono misurabili le funzioni $\sup g_j$, $\inf g_j$, $\overline{\lim} g_j$ e $\underline{\lim} f_j$. Infine, se $f_j \to f$ q.o., allora f è misurabile.*

Dimostrazione. (i) Come ogni aperto di $\mathbb{R}$, $(\Phi > a)$ è unione numerabile di intervalli (α_j, β_j) (per esempio prendendo α_j e β_j razionali). Dunque l'insieme $(\Phi \circ f > a) = \cup_j (\alpha_j < f < \beta_j)$ è misurabile.
(ii) $f + g$: Sia $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $f(x) \neq \pm\infty$, $\tilde{f}(x) = 0$ se $f(x) = +\infty$ oppure $f(x) = -\infty$. $\tilde{g}$ sia definita nello stesso modo. Si ha $\{\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x) > a\} \Leftrightarrow \{\exists r \in \mathbb{Q}, \tilde{f}(x) > r > a - \tilde{g}(x)\}$, dunque l'insieme $(\tilde{f} + \tilde{g} > a) = \cup_{r \in \mathbb{Q}} [(\tilde{f} > r) \cap (\tilde{g} > a - r)]$ è misurabile. $\tilde{f} + \tilde{g}$ è dunque misurabile. Ne segue che $f + g$ è misurabile perchè $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$ q.o. (vedi esempio 2 a pag 28).
fg: Possiamo supporre che f e g non assumano i valori $\pm\infty$. Altrimenti possiamo ricorrere a $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ come nel punto precedente. La funzione $fg = [(f + g) - f^2 - g^2]/2$ è misurabile.

$1/g$: Sia $\tilde{g}(x) = g(x)$ se $g(x) \neq 0$, $\tilde{g}(x) = 1$ se $g(x) = 0$. $\tilde{g}$ è misurabile per l'esempio 2 a pag 28, inoltre $\tilde{g} \neq 0$. Per $a > 0$, si ha $(1/\tilde{g} > a) = [(\tilde{g} < 1/a) \cap (g > 0)] \cup (\tilde{g} > 1/a) \cap (g < 0)]$, e similmente per $a < 0$, infine $(1/\tilde{g} > 0) = (\tilde{g} > 0)$; in ogni caso l'insieme $(\tilde{g} > a)$ è misurabile. $1/g$ è dunque misurabile perchè è uguale quasi ovunque alla funzione misurabile $1/\tilde{g}$.
(iii) L'insieme $(\sup f_j > a) = \cup(f_j > a)$ è misurabile perchè lo sono gli $(f_j > a)$ e quindi la funzione $\sup f_j$ è misurabile. Per l'inf si usa l'identità $\inf f_j = -\sup(-f_j)$. In particolare è misurabile $g_k = \sup_{j>k} f_j$ e quindi anche $\overline{\lim} f_j = \inf g_k$. Lo stesso per il $\underline{\lim}$. Infine, se $f_j \to f$ q.o. si ha $f = \overline{\lim} f_j$ q.o.. $\square$

Esercizio 3.1. Dimostrare le seguenti cose: Siano f e g integrabili in E, non necessariamente ≥ 0.

- 1) Se $f \leq g$ allora $\int_E f \leq \int_E g$.
- 2) Se E_j è una successione di insiemi misurabili disgiunti e $E = \cup E_j$, continua a valere la (27) di pag 25 che qui riportiamo
$$\int_E f = \sum \int_{E_j} f.$$
- 3) Si ha $\int cf = c \int f$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Il Lemma 1.2 di pag 25 vale anche per funzioni di segno qualunque:

PROPOSIZIONE 3.2. *Se f e g sono integrabili in E allora $f + g$ è integrabile in E e si ha*
$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

Dimostrazione. E può essere suddiviso in 6 insiemi misurabili $E_1 \dots E_6$ in ciascuno dei quali ciascuna delle tre funzioni f, g e $f + g$ ha un segno determinato. Si lavora separatamente per ciascuno degli integrali $\int_{E_1} \dots \int_{E_6}$. Per quelli in cui le tre funzioni hanno segno concorde vale il Lemma 1.2 a pag 25. Negli altri si ha, per esempio, $f \geq 0$, $g \leq 0$, $f + g \geq 0$. In questo caso si applica il lemma alle due funzioni non negative $f + g$ e $-g$. Completare i dettagli. $\square$

La proposizione precedente permette di eseguire il seguente

Esercizio 3.2.
- 1) Sia $f \in L^1(E)$, $|E| < \infty$. Dimostrare che si ha $|\int_E f| \leq \sup_E |f|\,|E|$. (usare $\{(x, y)|x \in E, 0 \leq y < |f(x)|\} \subset E \times [0, \sup |f|)$).
- 2) Sia f integrabile in E. Dimostrare che anche $|f|$ è integrabile e che si ha $|\int_E f| \leq \int |f|$.
- 3) Sia f misurabile in E. Dimostrare che è $f \in L^1(E)$ se e solo se $|f| \in L^1(E)$.
- 4) Se f è misurabile in E, $\Phi \in L^1(E)$ e $f \geq \Phi$ q.o., allora f e $f - \Phi$ sono integrabili in E e si ha $\int_E (f - \Phi) = \int_E f - \int_E \Phi$.
(Difatti si ha $f^- \leq \Phi^-$, quindi $\int f^- < \infty$ e f è perció integrabile. $f - \Phi$ è integrabile perché è misurabile e ≥ 0. Si distinguono due casi. Se $f \in L^1(E)$ allora anche $f - \Phi \in L^1(E)$ e, per la proposizione precedente $\int_E (f - \Phi) + \int_E \Phi = \int_E f$. Se poi

$f \notin L^1(E)$ allora $\int_E f = \infty$ perché si è visto che $\int_E f^- < \infty$. Inoltre $f - \Phi \notin L^1(E)$ perché altrimenti $f = \Phi + (f - \Phi) \in L^1(E)$, ma allora, giacché $f - \Phi \geq 0$ q.o., $\int_E (f - \Phi) = \infty = \infty - \int_E \Phi = \int_E f - \int_E \Phi$.)

- 5) Se $f \in L^1(E)$, g è misurabile e limitata q.o. in E, allora $fg \in L^1(E)$.
- 6) Se $f \in L^1(E)$ è q.o. non negativa, g è misurabile in E dove soddisfa q.o. $\alpha \leq g \leq \beta$, allora si ha $\alpha \int_E f \leq \int_E fg \leq \beta \int_E f$.

4. Scambio di limite con integrale

In questo paragrafo studiamo la possibilità di scambiare l'operazione di integrazione con quella di limite, e quindi anche di derivata. La proposizione che segue vale anche per l'integrale di Riemann.

PROPOSIZIONE 4.1. *Se la successione di funzioni $f_j \in L^1(E)$ converge uniformemente ad f in E ed è $|E| < \infty$, allora $f \in L^1(E)$ e $\int_E f_j \to \int_E f$.*

Dimostrazione. f è misurabile perchè limite puntuale di funzioni misurabili (Proposizione 3.1, (iii) a pag 28). Poichè $\sup_E |f_j - f| \to 0$, si ha $|f| \leq |f_j| + 1$ per $j \gg 1$, e quindi $f \in L^1(E)$. Inoltre $|\int_E f_j - \int_E f| \leq \int_E |f_j - f| \leq \sup_E |f_j - f| \, |E| \to 0$. □

Il concetto di "convergenza dominata" appare nel lemma che segue. Φ sarà la *funzione dominante* della successione f_j.

LEMMA 4.1. (Fatou) *Sia f_j una successione di funzioni misurabili in E e si abbia $f_j \geq \Phi$ q.o. in E, con $\Phi \in L^1(E)$. Allora le f_j sono integrabili, $\underline{\lim} f_j$ è integrabile in E e si ha*

$$\int_E \underline{\lim} f_j \leq \underline{\lim} \int_E f_j. \tag{34}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\Phi = 0$. Poniamo $g_k = \inf_{j \geq k} f_j$ dimodochè $g_k \uparrow \underline{\lim} f_j$. Le g_k sono misurabili perchè inf di misurabili, dunque integrabili perchè non negative. Perciò si può applicare loro il Teorema di B.Levi. Valgono dunque le due relazioni

$$\lim \int_E g_k = \int_E \underline{\lim} f_j, \quad g_k \leq f_k.$$

Da esse abbiamo:

$$\int_E \underline{\lim} f_j = \lim \int_E g_k = \underline{\lim} \int_E g_k \leq \underline{\lim} \int_E f_k$$

come volevamo. L'ipotesi $\Phi = 0$ si rimuove applicando il risultato precedente alla successione $\tilde{f}_j = f_j - \Phi$ e poi l'esercizio 4) qui sopra. Completi il lettore i dettagli. □

Veniamo ai *Teoremi di convergenza dominata di Lebesgue.*

TEOREMA 4.1. (Lebesgue) *Se la successione di funzioni $f_j \in L^1(E)$ converge ad f* q.o. *in E e si ha $|f_j| \leq \Phi$* q.o. *in E, con $\Phi \in L^1(E)$, allora $f \in L^1(E)$ e $\int_E f_j \to \int_E f$.*

Dimostrazione. Le ipotesi del Lemma di Fatou sono verificate sia da f_j che da $-f_j$. Poichè $\underline{\lim}(-\cdot) = -\overline{\lim}\ (\cdot)$, abbiamo $\overline{\lim}\int_E f_j \leq \int_E \overline{\lim} f_j$. Ma si ha $\underline{\lim} f_j = \overline{\lim} f_j = f$ q.o. in E. Otteniamo così
$$\overline{\lim}\int_E f_j \leq \int_E \overline{\lim} f_j = \int_E \underline{\lim} f_j \leq \underline{\lim}\int_E f_j.$$
Ne segue la convergenza della successione $\int_E f_j$ e, per i carubba, $\int_E f_j \to \int_E f$. □

Esercizio 1 Verificare che la Proposizione 4.1 non si applica alle f_k di pag 6 benchè sia le f_k che il loro limite siano integrabili secondo Riemann. Dimostrare che invece a tali f_k è applicabile il Teorema della convergenza dominata che dà $\lim\int f_k = \int \lim f_k = 0$, come del resto si vede subito direttamente.

Esercizio 2 Sia f_j una successione di funzioni in $L^1(E)$ tali che $\sum |f_j| \in L^1(E)$. Si provi che $\sum f_j$ converge assolutamente q.o. in E ad una $f \in L^1(E)$ e che converge ad f anche "in $L^1(E)$" cioè che si ha $\lim_{k\to\infty}\int_E |f - \sum_1^k f_j| = 0$. Inoltre si ha $\lim_{k\to\infty}\int_E \sum_1^k f_j = \int_E f$.
Soluzione. Poichè $\sum |f_j| \in L^1(E)$ si ha $\sum |f_j| < \infty$ q.o. in E (vedi (iii) dell' osservazione 1.1 a pag 25) e quindi $\sum f_j(x)$ converge assolutamente per q.o. $x \in E$. Sia f il limite. Le funzioni $g_k = \sum_1^k f_j$ sono dominate q.o. in E da $\sum |f_j| \in L^1(E)$, allora, per la convergenza dominata, si ha $f = \lim g_k \in L^1(E)$ e $\lim_{k\to\infty}\int_E \sum_1^k f_j = \int_E f$. Infine, le funzioni $|g_k - f| \in L^1(E)$ sono dominate da $\sum |f_j| + |f| \in L^1(E)$. Dunque $\lim\int_E |g_k - f| = \int_E \lim |g_k - f| = \int_E 0 = 0$.

Esercizio 3 Il Teorema della convergenza dominata non è valido per l'integrale di Riemann. Un'esempio che lo dimostra si ottiene prendendo come f_j la funzione caratteristica dell'insieme dei primi j razionali in $[-1, 1]$.

Assoluta continuità dell'integrale di una funzione L^1.
Sia $f \in L^1(E)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che se $F \subset E$ ha misura $< \delta$ allora $\int_F |f| < \varepsilon$.
Dimostrazione Per assurdo. Se l'enunciato fosse falso esisterebbero degli $F_j \subset E$ con $|F_j| \leq 2^{-j}$ e tali che si abbia $\int_{F_j} |f| \geq C > 0$. Gli insiemi misurabili $E_j = \cup_{j+1}^{\infty}$ hanno misura $\leq 2^{-j}$ e quindi, per la (14) a pag 13, $G = \cap E_j$ ha misura nulla. Dall'osservazione 1.1-(i) a pag 25 segue allora che si ha $\int_G |f| = 0$. Si puó adesso applicare il Teorema di Lebesgue alla successione $\chi_{E_j}|f|$ dominata da $|f|$ e si ottiene $\int_{E_j} |f| \to 0$. Ma allora da $C \leq \int_{F_{j+1}} |f| \leq \int_{E_j} |f|$ passando al limite per $j \to \infty$ avremmo $C \leq 0$ contro l'potesi. □

La condizione che f sia L^1 è essenziale. Lo si vede prendendo ad esempio $f(x) = 1/x$ in $E = (0, 2)$. Per ogni a in $(0, 1)$, l'insieme $F = [a, a + 1] \subset E$ ha misura 1. Tuttavia $\int_F |f| = \log(1 + \frac{1}{a})$ è arbitrariamente grande se si sceglie a vicino a 0.

I teoremi che seguono (detti anche loro "di convergenza dominata") costituiscono uno strumento efficientissimo per il passaggio al limite e la derivazione sotto il segno di integrale nella teoria di Lebesgue.

È data una funzione $f(x,t)$ in $E \times A$. $E \subset \mathbb{R}^n_x$ è un insieme misurabile e $A \subset \mathbb{R}^m_t$ un aperto. Daremo una condizione affinchè le proprietà di continuità e derivabilità di f rispetto a t inducano analoghe proprietà per il suo integrale

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx.$$

TEOREMA 4.2. *Assumiamo che*

- (i) $f(t,\cdot) \in L^1(E)$, $\forall t \in A$, [4]
- (ii) $f(\cdot,x)$ *è continua in* A *per q.o.* $x \in E$,
- (iii) *Si ha*

$$|f(t,x)| \leq \Phi(x), \quad \forall t \in A, \text{ q}\forall x \in E,$$

con $\Phi \in L^1(E)$,

allora $F(t)$ *è continua in A.*

In altre parole, $\forall t_* \in A$ *si ha*

$$\lim_{t\to t_*} \int_E f(t,x)\,dx = \int_E \lim_{t\to t_*} f(t,x)\,dx. \tag{35}$$

Dimostrazione. Sia t_k una successione in A che tende a t_*. Poniamo $f_k(x) = f(t_k,x)$ e $f_*(x) = f(t_*,x)$. Per il Teorema "ponte" è sufficiente provare che $\int_E f_k \to \int_E f_*$. Per l'ipotesi di continuità (ii) abbiamo $f_k \to f_*$ q.o. in E, mentre la (iii) dà $|f_k| \leq \Phi$ q.o. in E, con $\Phi \in L^1(E)$. Resta solo da applicare il Teorema 4.1. □

Per la derivazione di $F(t)$ vale un Teorema perfettamente analogo al precedente:

TEOREMA 4.3. *Assumiamo che*

- (i) $f(t,\cdot) \in L^1(E)$, $\forall t \in A$,
- (ii) $f(\cdot,x) \in C^1(A)$ *per q.o.* $x \in E$,
- (iii) *Si ha*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\right| \leq \Phi(x), \quad \forall t \in A, \text{ q}\forall x \in E, \; j = 1,\dots m,$$

con $\Phi \in L^1(E)$,

allora $F \in C^1(A)$ *e si ha*

$$\frac{\partial}{\partial t_j} F(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\,dx. \tag{36}$$

In altre parole gli operatori $\frac{\partial}{\partial t_j}$ *e* $\int_E$ *commutano.*

---

[4] $f(t,\cdot)$ indica la funzione $x \mapsto f(t,x)$ della sola variabile x.

Dimostrazione. Per studiare $\frac{\partial F}{\partial t_j}$ in t^0 dobbiamo riferirci alle funzioni $F(t_1^0, \dots, t_{j-1}^0, t, t_{j+1}^0, \dots, t_m^0)$ e $f(t_1^0, \dots, t_{j-1}^0, t, t_{j+1}^0, \dots, t_m^0)$ della sola t, variabile in un intorno di t_j^0. Tanto vate allora studiare il solo caso $m = 1$ e supporre che A sia un intervallo della retta $\mathbb{R}_t$.

Applicheremo di nuovo il teorema precedente al rapporto incrementale

$$r(t,x) = \frac{f(t,x) - f(t^0,x)}{t - t^0}, \quad t \neq t^0.$$

Osserviamo che, per l'ipotesi (ii), per q$\forall x \in E$, si ha $\lim_{t \to t^0} r(t,x) = D_t f(t^0, x)$.

Usando il Teorema di Lagrange e l'ipotesi (iii), abbiamo per q.o. $x \in E$

$$|r(t,x)| = |D_t f(\tilde{t}, x)| \leq \Phi(x)$$

con $\tilde{t} \in A$. Dal teorema precedente segue allora l'esistenza del limite

$$D_t F(t^0) = \lim_{t \to t^0} \int_E r(t,x)\,dx = \int_E \lim_{t \to t^0} r(t,x)\,dx = \int_E D_t f(t^0, x)\,dx,$$

e cioè la derivabilità di $F(t)$ sotto il segno di integrale.

Infine, per dimostrare la continuità di $D_t F$ si applica ancora il teorema precedente a $D_t f(t,x)$ che è dominata da Φ. $\square$

Osservazione 4.1. Procedendo per induzione si può estendere il teorema precedente alle derivate d'ordine superiore. L'enunciato diventa:

Supponiamo

- (i) $f(t, \cdot) \in L^1(E)$, $\forall t \in A$,
- (ii) $f(\cdot, x) \in C^k(A)$ *per q.o.* $x \in E$,
- (iii)

$$\sup_{j_1 + \dots + j_m = k} \left|\frac{\partial^{(k)} f}{\partial^{j_1} t_1 \cdots \partial^{j_m} t_m}(t,x)\right| \leq \Phi(x), \quad \forall t \in A, \text{ q}\forall x \in E,$$

con $\Phi \in L^1(E)$,

allora $F \in C^k(A)$ *e per* $j_1 + \dots + j_m \leq k$ *si ha*

$$\frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_m)}}{\partial^{j_1} t_1 \cdots \partial^{j_m} t_m} F(t) = \int_E \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_m)}}{\partial^{j_1} t_1 \cdots \partial^{j_m} t_m} f(t,x)\,dx. \tag{37}$$

In altre parole gli operatori $\frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_m)}}{\partial^{j_1} t_1 \cdots \partial^{j_m} t_m}$ *e* $\int_E$ *commutano per* $j_1 + \dots + j_m \leq k$.

5. Integrali multipli

Ora f sarà funzione di due variabili $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Vogliamo confrontare $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dx\,dy$ con l'integrale in $\mathbb{R}^m$ della funzione di y $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx$. Trattiamo prima il caso $f = 1$. Non sarà poi difficile ridursi a questa situazione. La questione è allora regolata dal seguente

TEOREMA 5.1. (Fubini) *Sia* $E \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ *misurabile.*
Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ *poniamo* $E^x = \{y \in \mathbb{R}^m | (x, y) \in E\}$.
Allora

- (i) E^x *è misurabile per q.o.*$x \in \mathbb{R}^n$*,*
- (ii) *La funzione* $x \mapsto |E^x|$ *è integrabile in* $\mathbb{R}^m$ *e il suo integrale è uguale a* $\|E\|$*:*

$$\|E\| = \int_{\mathbb{R}^n} |E^x| \, dx.^5 \tag{38}$$

Dimostrazione. Il teorema è evidente se E è un intervallo.
Consideriamo 4 casi.
1) $E = \cup_1^\infty I_j$ *è unione numerabile di intervalli non sovrapposti di* $\mathbb{R}^{n+m}$.

Si ha $E^x = \cup I_j^x$ e gli intervalli $I_j^x \subset \mathbb{R}^m$ sono non sovrapposti. Dunque E^x è misurabile in $\mathbb{R}^m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo in $\mathbb{R}^n$ la successione crescente di funzioni integrabili non negative $u_k(x) = \sum_1^k |I_j^x|$. Per la (15) a pag 13 si ha $u_k(x) \uparrow |E^x|$. Per il Teorema di B.Levi la funzione $x \mapsto |E^x|$ è dunque integrabile e si ha $\lim \int_{\mathbb{R}^n} u_k = \int_{\mathbb{R}^n} |E^x|$.

Si ha inoltre $\int_{\mathbb{R}^n} u_k = \sum_1^k \|I_j\|$. Applicando allora nuovamente la (15) otteniamo $\lim \int_{\mathbb{R}^n} u_k = \|E\|$. Confrontando con la precedente abbiamo la (38) come volevamo.

Il teorema è dunque provato in questo caso, in particolare se E è aperto.

2) $E = K$ *è compatto.*

Certamente K è contenuto in un cubo aperto $Q = Q_x \times Q_y$. $A = Q \backslash K$ è aperto e si ha $A^x = Q_y \backslash K^x$. K^x è misurabile perchè è compatto e la funzione $x \mapsto |K^x| = |Q_y| - |A^x|$ è misurabile perchè in 1) si è visto che $x \mapsto |A^x|$ è misurabile. Infine si ha

$$\|Q\| - \|K\| = \|A\| = \int_{Q_x} |A^x| = \int_{Q_x} (|Q_y| - |K^x|) = \|Q\| - \int_{Q_x} |K^x|$$

cioè $\|K\| = \int_{Q_x} |K^x|$ come volevamo.

3) E *è limitato.*

[5]Come nel capitolo precedente $\|\cdot\|$ indica la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{n+m}$, mentre $|\cdot|$ indica quella in $\mathbb{R}^m$ oppure in $\mathbb{R}^m$.

Prendiamo una successione decrescente di aperti limitati A_j e una crescente di compatti K_j tali che sia $K_j \subset E \subset A_j$ e $\|A_j \backslash K_j\| < 1/j$. Si applica 1) all'aperto $A_j \backslash K_j$ e si ha

$$\|A_j \backslash K_j\| = \int (|A_j^x| - |K_j^x|)\, dx.$$

Il primo membro di questa uguaglianza tende a 0. L'integrando a destra è non negativo e dominato da $x \mapsto |A_1^x|$ che è L^1 perchè A_1 è limitato. Quindi, per la convergenza dominata, il limite dell'integrando è non negativo ed ha integrale nullo. Ne concludiamo che si ha $\lim_j |A_j^x| - \lim_j |K_j^x| = 0$ per q.o. x. Poichè $|K_j^x| \le |E^x|_i \le |E^x|_e \le |A_j^x|$. Passando al limite abbiamo $|E^x|_i = |E^x|_e$, per q.o.$x \in \mathbb{R}^n$ e possiamo affermare che, per q.o. x, E^x è misurabile e che si ha $|E^x| = \lim_j |A_j^x|$. Infine, se indichiamo con S il sotto-grafico della funzione $x \mapsto |E^x|$, abbiamo

$$\|K_j\| = \int |K_j^x| \le |S|_i \le |S|_e \le \int |A^x| = \|A_j\|.$$

Poichè $\|A_j\| - \|K_j\| \to 0$, al limite otteniamo che S è misurabile (e quindi $x \mapsto |E^x|$ è integrabile) e $\int |E^x| = |S| = \lim \|A_j\| = \|E\|$ come volevamo.

4) *Caso generale.*

Applichiamo il teorema agli insiemi limitati $E_j = E \cap \{|x| < j, |y| < j\}$. Poichè $E_j^x \uparrow E^x$, E^x è misurabile per q.o. x; la funzione $x \mapsto |E^x| = \sup |E_j^x|$ è misurabile per il Teorema di Levi che dà anche

$$\|E\| = \sup \|E_j\| = \sup \int |E_j^x|\, dx = \int \sup |E_j^x|\, dx = \int |E^x|\, dx$$

come volevamo. □

Applichiamo ora questo teorema per ricondurre l'integrazione di una funzione di più variabili a successive integrazioni di funzioni di una variabile sola. Come al solito intenderemo $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y = \mathbb{R}^{n+m}$.

TEOREMA 5.2. (Fubini-Tonelli) *Sia f una funzione integrabile in $\mathbb{R}^{n+m}$. Si ha*

- (i) *Per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot)$ è integrabile in $\mathbb{R}^m$.*

- (ii) *La funzione* $x \mapsto \int f(x,y)\,dy$ *è integrabile in* $\mathbb{R}^n$ *e il suo integrale è espresso da*

$$\int \left\{ \int f(x,y)\,dy \right\} dx = \int f(x,y)\,dx\,dy = \int \left\{ \int f(x,y)\,dx \right\} dy. \tag{39}$$

- (iii) *Se poi* $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$*, allora per q.o.*$x$ *la funzione* $f(x,\cdot)$ *è in* $L^1(\mathbb{R}^m_y)$ *mentre* $\int f(\cdot,y)\,dy$ *è in* $L^1(\mathbb{R}^n_x)$.

Dimostrazione. (i),(ii). Basta provare la prima delle due uguaglianze (39) perchè nell'ipotesi non c'è preferenza tra le due variabili x e y.
Separando f^+ e f^- ci riconduciamo al caso $f \geq 0$. L'enunciato del presente teorema viene a coincidere allora con quello del teorema precedente se in essoq interpretiamo E come sottografico di f. Vedi figura.
(iii) la grandezza (39) è ora per ipotesi finita. Osservando l'esperessione di sinistra concludiamo subito che $\int f(\cdot,y)\,dy$ è in $L^1(\mathbb{R}^n_x)$. In particolare, per q.o.x, si ha $\int f(x,y)\,dy < \infty$. Ció significa appunto $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m_y)$. $\square$

Esercizio. Si enunci e si dimostri il teorema precedente nel caso di una funzione integrabile in un insieme $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ misurabile.

Un'altra conseguenza molto utile del Teorema di Fubini-Tonelli è il seguente

TEOREMA 5.3. *Nell'insieme misurabile* $E \subset \mathbb{R}^n$ *siano date le funzioni integrabili non negative* g *e* h*. Si ha*

$$\int_E gh = \int_{\mathbb{R}^+} \left\{ \int_{(g>a)\cap E} h\,dx \right\} da. \tag{40}$$

Dimostrazione. Sia $G(x,a)$ la funzione caratteristica dell'insieme misurabile $\{(x,a) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 \leq a < g(x)\}$, cosicchè per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,G(x,a)\,dx = \int_{(g>a)\cap E} h\,dx.$$

D'altro canto, per q.o.$x \in E$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^+} h(x)\,G(x,a)\,da = h(x) \int_{(0,g(x))} da = g(x)\,h(x).$$

La funzione $h(x)\,G(x,a)$ è integrabile in $E \times \mathbb{R}^+$ perché prodotto di funzioni integrabili.
Integriamo le ultime due relazioni, la prima in da, la seconda in dx. Per il Teorema di Fubini-Tonelli otteniamo la stessa grandezza. Questo dá la (40) come volevamo. $\square$

Nel caso $h \equiv 1$ la (40) diventa

$$\int_E g\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} |(g>a)\cap E|\,da \tag{41}$$

valida per g integrabile in E e non negativa.

L'integrabilità di f in $\mathbb{R}^{n+m}$ è un'ipotesi essenziale nel Teorema di Fubini: il fatto che $f(x,\cdot)$ sia integrabile in $\mathbb{R}^m$ $\forall x$ e che $x \mapsto \int f(x,y)\,dy$ lo sia in $\mathbb{R}^n$ non bastano ad assicurare la validità di (39). Lo mostra il seguente
Esempio. I quadrati della figura sono supposti *aperti*.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita in ogni Q_n come segue: vale $1/|Q_n|$ in Q_n^1 e in Q_n^3, mentre vale $-1/|Q^n|$ in Q_n^2 e in Q_n^4. In tutto il resto di $\mathbb{R}^2$ f vale 0.
Ovviamente si ha $\int f(x,y)\,dy = 0$, $\forall x$, ma $\int_{Q_n} f^+ = \int_{Q_n} f^- = 1/2$, quindi $\int f^+ = \int f^- = \infty$. Perciò f, pur essendo misurabile, non è integrabile e dunque $\int f$ non esiste.

6. Integrazione e diffeomorfismi

In questo paragrafo si studia l'effetto di un diffeomorfismo sulla misura di un insieme oppure, cosa equivalente, il modo di valutare un integrale di una funzione che sia espressa rispetto a coordinate curvilinee y (per esempio polari) anzichè nelle coordinate cartesiane x, rispetto alle quali abbiamo sviluppato finora la teoria. Dalle x alle y si passa con un diffeomorfismo $y = \Phi(x)$ di matrice jacobiana Φ_x e la morale è che, per passare dall'integrale nelle y a quello nelle x, al differenziale $dy = dy_1 \dots dy_n$ va sostituito $|\det \Phi_x|\,dx$.

La dimostrazione è alquanto laboriosa. Questo è dovuto al fatto che ci troviamo a dover sviluppare questo argomento non nel suo contesto naturale che è quello della derivazione della misura di Lebesgue il quale non fa parte di questa trattazione.

Proviamo innanzitutto che *un'applicazione $\Phi : X \to Y$ di classe C^1 tra aperti di $\mathbb{R}^n$ manda ogni insieme misurabile $E \subset X$ in un insieme misurabile.* Si considerino i soliti aperti $X_j = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, \complement X) > 1/j,\ |x| < j\}$. Si ha $X_j \subset\subset X$, in particolare Φ ha derivate limitate in X_j, e $X_j \uparrow X$ quindi è sufficiente provare che sono misurabili gli insiemi $\Phi(E \cap X_j)$ perchè $\Phi(X) = \cup \Phi(E \cap X_j)$. Tanto vale allora supporre direttamente che Φ stessa abbia derivate limitate in X e che sia $|E| < \infty$. Se $y_j(x_1, \dots x_n)$ sono le equazioni di Φ abbiamo dunque $|\partial y_j / \partial x_h| \le C$. Ne segue

$$\sup_j |y_j(x') - y_j(x'')| \le C \sup_h |x'_h - x''_h|, \quad \forall x', x'' \in X.$$

Pertanto, per ogni intervallo $I \subset X$ esiste un intervallo $I' \subset \mathbb{R}^n$ tale che sia

$$I' \supset \Phi(I), \quad |I'| \leq C^n\,|I|.$$

Ne segue che si ha

$$|\Phi(F)|_e \leq C^n\,|F|_e, \quad \forall F \subset X.$$

Ricorrendo all'Esercizio di pag 14 possiamo prendere un compatto $K \subset E$ tale che sia $|E| \leq |K|+\varepsilon$. Si ha allora $|\Phi(E)\backslash\Phi(K)|_e \leq |\Phi(E\backslash K)|_e \leq C^n|E\backslash K| \leq C^n\varepsilon$ (si è usato $\Phi(E)\backslash\Phi(K) \subset \Phi(E\backslash K)$). Questo assicura la misurabilità di $\Phi(E)$ perchè $\Phi(K)$, essendo compatto, è chiuso. (vedi condizione (b) a pag 14).

Diffeomorfismi

Definizione. Un *diffeomorfismo* $\Phi : X \to Y$ tra gli aperti $X \subset \mathbb{R}^n_x$ e $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ è un'applicazione bijettiva di classe C^1 la cui matrice jacobiana Φ_x è non degenere in ogni punto.

Richiamiamo intanto il

Teorema delle Funzioni Inverse. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $F : X \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1. Se per $x^0 \in X$ si ha $\det F_x(x^0) \neq 0$, allora x^0 ha un intorno aperto $W \subset X$ tale che $F(W)$ è aperto e $F : W \to F(W)$ è un diffeomorfismo.

Definizione Un'applicazione $\Phi : X \to Y$ si dice *semplice* se le rette congiungenti x con $\Phi(x)$ sono tutte parallele.

Se scegliamo coordinate con l'asse x_j parallelo alle rette per x e $\Phi(x)$, l'applicazione semplice assume la forma

$$x \mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1},\ \varphi(x),\ x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

LEMMA 6.1. *I diffeomorfismi semplici generano localmente tutti i diffeomorfismi.*

Ciò significa che ogni punto $x^0 \in X$ ha un intorno aperto V tale che esistano n diffeomorfismi $\Phi_j : V_j \to V_{j+1}$, $j = 1, \ldots n$, tra aperti di $\mathbb{R}^n$, *che coinvolgono una sola variabile,* tali che si abbia $V_1 = V$, $V_{n+1} = \Phi(V)$ e

$$\Phi = \Phi_n \circ \cdots \circ \Phi_1.$$

Dimostrazione. Sia $y = y(x)$ l'equazione vettoriale di Φ. Siano r_j le righe della matrice jacobiana $\Phi_x(x^0)$ ed e_j i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. A meno di riordinare le variabili y_j possiamo supporre che le n-ple $(r_1, \ldots, r_{j-1}, e_j, \ldots, e_n)$ siano formate da vettori indipendenti per ogni $j = 1, \ldots n+1$. Indichiamo con $\mathbb{R}^n(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, \ldots, x_n)$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle variabili scritte nella parentesi. Consideriamo le $n+1$ applicazioni $\Psi_j : X \to \mathbb{R}^n(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, \ldots, x_n)$ di classe C^1 date da

$$\begin{aligned} &y_1 = y_1(x), \ldots, y_{j-1} = y_{j-1}(x),\\ &x_j = x_j, \ldots, x_n = x_n. \end{aligned}$$

Abbiamo riordinato le variabili in modo che tutte le Ψ_j abbiano determinante jacobiano non nullo in x^0.

Dal Teorema delle Funzioni Inverse segue allora che x^0 ha un intorno V tale che ciascuna delle Ψ_j è un diffeomorfismo di V su un aperto $V_j \subset \mathbb{R}(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n)$. Poiché $\Psi_1 =$ identità e $\Psi_{n+1} = \Phi$, si ha $V_1 = V$, $V_{n+1} = \Phi(V)$. I diffeomorfismi cercati sono

$$\Phi_j = \Psi_{j+1} \circ \Psi_j^{-1} : V_j \to V_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Φ_j ha la forma

$$\begin{aligned} &y_1 = y_1, \dots, y_{j-1} = y_{j-1}, \\ &y_j = y_j[\Psi_j^{-1}(y_1, \dots,\, y_{j-1},\, x_j, \dots, x_n)], \\ &x_{j+1} = x_{j+1}, \dots, x_n = x_n \end{aligned}$$

ed è quindi semplice. Si ha per costruzione $\Phi = \Psi_{n+1} = \Phi_n \circ \cdots \circ \Phi_1$, perchè è $\Psi_{j+1} = \Phi_j \circ \Psi_j$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

Il resto del paragrafo è consacrato a dimostrare il seguente

TEOREMA 6.1. *Siano* $\Phi : X \to Y$ *un diffeomorfismo,* $E \subset X$ *un insieme misurabile e* f *una funzione in* $L^1(\Phi(E))$. *Si ha*

$$\int_{\Phi(E)} f(y)\, dy = \int_E (f \circ \Phi)(x)\, |\det \Phi_x(x)|\, dx. \tag{42}$$

Dimostrazione. Separando f^+ e f^- possiamo supporre sistematicamente

$$f \geq 0.$$

La dimostrazione consiste in quattro passi (a)-(d).

(a) *La formula* (42) *è invariante per composizione di diffeomorfismi.*
Ciò significa che, se $\Psi : Y \to Z$ è un altro diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$ e se la (42) vale per Φ e per Ψ, allora essa è anche valida per $\Psi \circ \Phi : X \to Z$.
Dimostriamo (a).
Applichiamo la (42) al diffeomorfismo Ψ e alla funzione $f \in L^1\{\Psi[\Phi(E)]\}$ e, successivamente, al diffeomorfismo Φ e alla funzione $(f \circ \Psi)(y) \cdot |\det \Psi_y(y)|$ che è L^1 in $\Phi(E)$. Otteniamo

$$\int_{(\Psi \circ \Phi)(E)} f(z)\, dz = \int_E (f \circ \Psi \circ \Phi)(x) \cdot |\det \Psi_y[\Phi(x)]| \cdot |\det \Phi_x(x)|\, dx$$

che è ciò che volevamo perchè la regola di derivazione delle funzioni composte dà (con notazione matriciale) $(\Psi \circ \Phi)_x(x) = \Psi_y[\Phi(x)]\, \Phi_x(x)$. (a) è dimostrato.

(b) *La* (42) *è valida per* $n = 1$.
Dimostriamo (b).
In questo caso si ha $\det \Phi_x = \Phi'$. Dimostriamo prima la (42) per $f = 1$. Cioè la

$$|\Phi(E)| = \int_E |\Phi'(x)|\, dx. \tag{43}$$

Se E è un intervallo, la (43) si riduce al Teorema Fondamentale della Teoria dell'Integrazione. Ma allora (43) è valida per ogni aperto A in quanto esso è unione numerabile di intervalli disgiunti.

Gli aperti $A' \subset Y$ contenenti $\Phi(E)$ sono tutti del tipo $\Phi(A)$, con $A \supset E$. La (43) risulta allora da

$$|\Phi(E)| = \inf_{A' \supset \Phi(E)} |A'| = \inf_{A \supset E} |\Phi(A)| = \inf_{A \supset E} \int_A |\Phi'| = \int_E |\Phi'|.$$

Dalla (43) e dall'identità $(f > a) \cap \Phi(E) = \Phi[(f \circ \Phi > a) \cap E]$ otteniamo

$$|(f > a) \cap \Phi(E)| = \int_{(f \circ \Phi > a) \cap E} |\Phi'| \, dx$$

che integrata per $a \in \mathbb{R}^+$, e usando la (41) di pag 36 a primo membro e la (40) al secondo, dà la conclusione. (b) è dimostrato.

(c) *La formula* (42) *è valida se* Φ *è semplice.*
Dimostriamo (c).
Possiamo supporre che le rette per x e $\Phi(x)$ siano parallele all'asse x_1.

Poniamo $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, cosicchè è $x = (x_1, x')$. Φ ha ora la forma

$$\Phi(x) = (\varphi(x_1, x'), x').$$

Si ha $\det \Phi_x = D_{x_1}\varphi$. Useremo la notazione $E^{x'} = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x') \in E\}$. Si ha

$$\Phi(\cdot, x')E^{x'} = \Phi(E)^{x'}, \quad f(\cdot, x') \circ \Phi(\cdot, x') = (f \circ \Phi)(\cdot, x').$$

Fissiamo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Applichiamo il risultato per $n = 1$ al diffeomorfismo $\Phi(\cdot, x') : X^{x'} \to Y^{x'}$ tra aperti dell'asse x_1 e alla funzione $f(\cdot, x')$ di x_1. Si ha

$$\int_{\Phi(\cdot, x')(E^{x'})} f(\cdot, x') = \int_{E^{x'}} \{f(\cdot, x') \circ \Phi(\cdot, x')\} \cdot |D_{x_1}\varphi|$$

cioè

$$\int_{\Phi(E)^{x'}} f(x_1, x') \, dx_1 = \int_{E^{x'}} [(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi_x|](x_1, x') \, dx_1.$$

La (42) risulta allora integrando i due membri in dx' e applicando il Teorema di Fubini-Tonelli. (c) è dimostrato.

(d) *Conclusione.*
Se E è contenuto in un aperto V nel quale Φ è la composizione di diffeomorfismi semplici allora la (42) risulta immediatamente da (c) ed (a).
Per ricondurci a questo caso ricorriamo al Lemma 6.1 a pag 38. Esso assicura che gli aperti V con questa proprietá ricoprono X.

E allora, per il corollario 3.2 a pag 11, X si puó ricoprire con una famiglia numerabile U_j di insiemi misurabili disgiunti contenuti ciascuno in un qualche aperto V_j di quelli sopra nominati.

E è unione disgiunta degli insiemi misurabili $E_j = E \cap U_j \subset V_j$. Anche i $\Phi(E_j)$ sono misurabili perché Φ è C^1 e disgiunti perchè Φ è iniettiva.
Abbiamo dunque

$$\int_{\Phi(E_j)} f(y)\, dy = \int_{E_j} (f \circ \Phi)(x)\, |\det \Phi_x(x)|\, dx.$$

Sommando su j otteniamo la (42). $\square$

Part 2

Funzioni Olomorfe

CHAPTER 3

Richiami di analisi elementare

1. Limiti superiore e inferiore

Non tutte le successioni numeriche a_n hanno un limite ma tutte hanno un limite superiore $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ e uno inferiore $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Se a_n non è limitata superiormente allora il *limite superiore* o *massimo limite* è per definizione

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Altrimenti è ben definita la successione decrescente $\sup(a_1, a_2, \dots)$, $\sup(a_2, a_3, \dots)$, $\sup(a_3, a_4, \dots)$,$\dots$. Come tutte le successione decrescenti questa ha un limite uguale al suo $\inf$ (eventualmente $-\infty$) che si chiama *limite superiore* di a_n. Dunque è

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} a_k) = \inf_n(\sup_{k\geq n} a_k).$$

Omettiamo $n \to \infty$.

Per esempio $(-1)^n(1 + 1/n)$ non ha limite ma il suo $\overline{\lim}$ è 1. Dimostrare.

Dimostrare che $\overline{\lim} a_n$ è l'unico numero con questa proprietá:

Se $b < \overline{\lim} a_n < c$, allora $a_n \leq c$ per $n \gg 1$ e esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \geq b$.

Sia a_n limitata superiormente. Un numero b si chiama *maggiorante definitivo* di (a_n) se si ha $b \geq a_n$ per $n \gg 1$. Sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei maggioranti definitivi. Dimostrare che si ha

$$\overline{\lim} a_n = \inf \mathcal{M}.$$

(Se a_n non è limitata superiormente, allora $\mathcal{M} = \emptyset$). Puó succedere che questo $\inf$ sia un minimo oppure no. Per esempio $\overline{\lim}(1/n) = 0$ non è un minimo di $\mathcal{M}$ mentre invece $\overline{\lim}(-1/n) = 0$ sí.

Dimostrare che si ha

$$\overline{\lim} a_n = \sup(\text{limiti delle sottosuccessioni convergenti di } a_n)$$

e che questo è un minimo.

Il *limite inferiore* o *minimo limite* si puó definire cosí

$$\underline{\lim} a_n \equiv -\overline{\lim}(-a_n).$$

Dimostrare che si ha

$$\underline{\lim} a_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} a_k) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} a_k),$$

che $\underline{\lim} a_n$ è l'unico numero tale che da $b < \underline{\lim} a_n < c$ segue $a_n \geq b$ per $n \gg 1$ e l'esistenza di una sottosuccessione tale che $a_{n_k} \leq c$. Dimostrare anche che $\underline{\lim} a_n$ è il $\sup$ dei minoranti definitivi e che esso è il minimo dell'insieme dei limiti delle sottosuccessioni di a_n.

2. Successioni e serie di funzioni

Per $y \in \mathbb{R}^M$ indicheremo $|y| = (\sum_{j=1}^M y_j^2)^{1/2}$. Siano $f_n(x)$ funzioni (vettoriali) da $E \subset \mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$. Si dice che f_n converge uniformemente ad f ($f : E \to \mathbb{R}^M$) se si ha

$$\sup_E |f_n - f| \to 0.$$

La convergenza non comporta la convergenza uniforme. Per esempio in $E = (0,1)$ si ha $x^n \to 0$ ma non uniformemente.

Dal criterio di Cauchy segue che f_n converge uniformemente in E (a una qualche f) se si ha

$$\sup_E |f_n - f_m| \to 0, \quad \text{per } m, n \to \infty.$$

Valgono i seguenti teoremi

1 *Se le f_n sono continue in E e la convergenza è uniforme allora il limite f è anche continuo.*

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un'aperto. Poiché una funzione continua su ogni compatto $K \subset A$ è continua in A abbiamo

2 *Se le f_n sono continue in A e la convergenza è uniforme sui compatti $\subset A$, allora il limite f è anche continuo.*

questo secondo enunciato, a differenza del primo, si applica a (x^n) in $(0,1)$ perché $x^n \to 0$ uniformemente sui compatti di $(0,1)$. Per Cauchy, la convergenza uniforme sui compatti equivale a

$$\sup_K |f_n - f_m| \to 0, \quad \text{per } m, n \to \infty, \ \forall \text{ compatto } K \subset A.$$

Per scambiare l'operazione di derivazione con quella di limite si usa di solito questo Teorema

3 *Siano $f_n \in C^k(A)$, con $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Se le f_n e tutte le derivate fino alla k-ma convergono uniformemente sui compatti di A e $f_n \to f$ allora $f \in C^k(A)$ e*

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_N} f_n}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}} \to \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_N} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_N^{k_N}}, \quad \textit{per } n \to \infty,$$

per $k_1 + \cdots + k_N \leq k$.

Serie di funzioni

La serie $\sum_0^\infty g_j(x)$ è sistematicamente identificata alla successione delle somme parziali $f_n(x) = \sum_{j=0}^n g_j(x)$ e le definizioni (convergenza uniforme ecc…) si trasferiscono da questa a quella. La condizione di convergenza uniforme sui compatti, per esempio, diventa

$$\sup_K |\sum_{j=n}^m g_j| \to 0, \quad \text{per } m,n \to \infty,\ \forall \text{ compatto } K \subset A.$$

4 *Se le g_j sono in $C^k(A)$ e le serie delle derivate fino alla k-ma convergono uniformemente sui compatti di A, allora la somma è in $C^k(A)$ e ogni operatore di derivazione d'ordine $\le k$ passa sotto il segno di serie.*

Spessissimo si usa la stima con una serie numerica: se $g_j \in C^k(A)$ e per ogni compatto $K \subset A$ si ha $\sup_K |g_j| \le c_j$ con $c_j \in \mathbb{R}$ e $\sum c_j < \infty$, allora la convergenza uniforme è assicurata perché si ha

$$\sup_K |\sum_{j=n}^m g_j| \le \sup_K \sum_{j=n}^m |g_j| \le \sum_{j=n}^m c_j$$

e l'ultima somma tende a zero per $m, n \to \infty$ per via della necessitá del criterio di Cauchy concernente le serie numeriche.

A conclusioni analoghe si giunge se $g_j \in C^k(A)$ e una simile stima vale per tutte le derivate d'ordine $\le k$. Allora la somma è in $C^k(A)$ e si ha

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_N}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} \sum_{j=1}^\infty g_j = \sum_{j=1}^\infty \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_N}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_N^{k_N}} g_j,$$

per $k_1 + \cdots + k_N \le k$

3. Misura e integrale di Lebesgue

Al lettore che ha già letto la prima parte consigliamo di saltare questo paragrafo. Esso è stato inserito allo scopo di rendere indipendenti le due parti di questi appunti, cosicché alcune definizioni (per esempio quella di misura) sono in apparente contrasto con quelle già date nella prima parte.

Misura

Un rettangolo R di $\mathbb{R}^N$ è il prodotto di N intervalli aperti o chiusi o mezzi aperti e mezzi chiusi, non fa niente. La sua misura $m(R)$ è il prodotto delle lunghezze dei lati. Un'unione finita P di rettangoli si chiama *plurirettangolo*. Lo si puó decomporre (in vari modi) nell'unione di rettangoli $R_1, \dots, R_n$ disgiunti ma la sua misura $m(P) \equiv m(R_1) + \cdots m(R_n)$ non dipende dalla decomposizione. Prendiamo dapprima solo insiemi E contenuti nel cubo $Q \equiv \{0 \le x_j \le 1,\ j = 1, \dots, N\}$ che ha misura 1. Per ogni $E \subset Q$ si chiama *misura esterna* di E il numero

$$m^*(E) = \inf_{P \supset E} m(P).$$

Si ha ovviamente $m^*(E) \le 1$ perché $E \subset Q$.

E si dice *misurabile* se si ha

$$m^*(E) + m^*(Q \backslash E) = 1.$$

In questo caso la *misura* $m(E)$ di E è per definizione $m^*(E)$.

Questa nozione di misura ha la seguente fondamentale proprietá di additivitá infinita: *Se* $E_1, E_2, \ldots$ *sono contenuti in* Q*, a due a due disgiunti e misurabili, allora* $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ *è misurabile e si ha*

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \tag{44}$$

Per passare ad insiemi non necessariamente contenuti nel cubo si divide $\mathbb{R}^N$ in cubi $Q_{m_1,\ldots,m_N} \equiv \{m_j \leq x_j \leq m_j + 1, j = 1, \ldots, N\}$, con $(m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$. Allora $E \subset \mathbb{R}^N$ dicesi *misurabile* se lo sono tutte le intersezioni $E \cap Q_{m_1,\ldots,m_N}$ e si pone

$$m(E) = \sum_{(m_1,\ldots,m_N) \in \mathbb{Z}^N} m(E \cap Q_{m_1,\ldots,m_N}).$$

In questo caso, naturalmente, puó essere $m(E) = \infty$. La (44) continua a valere.

Integrale

Indichiamo con m_{N+1} la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{N+1}$. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e f una funzione *non negativa* in E. f si dice *misurabile* (in E) se il suo sotto-grafico

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid x \in E,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

è misurabile (in $\mathbb{R}^{N+1}$) e si pone

$$\int f = m_{N+1}(S).$$

Sia ora f di segno qualunque. Scriviamo $f = f^+ - f^-$ con $f^+ = \sup(0, f)$ e $f^- = -\inf(0, f)$, cosicché $f^+ \ge 0$, $f^- \ge 0$ e $|f| = f^+ + f^-$. f si dice *misurabile* se f^+ e f^- sono integrabili e *integrabile* se ha senso, finita o infinita, la somma

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

che definisce l'integrale di f. Questo accade precisamente quando $\int f^+$ e $\int f^-$ non sono entrambi ∞. Se i due integrali sono entrambi finiti, cioè quando $\int |f| < \infty$, allora f si dice L^1 in E e si scrive $f \in L^1(E)$. Si usano anche le notazioni $\int_E f$, $\int_E f dx$ ecc...

Se f è definita in un insieme piú grande di E, allora con $\int_E f$ intendiamo $\int \phi_E f$, dove ϕ_E è la funzione caratteristica di E.

Anche quando f è solo misurabile ma non integrabile, puó succedere che $\int f$ sia definibile in modo *improprio*. Per esempio, se E è illimitato, puó accadere che esista $\int_{E \cap B_R} f < \infty$ per $R > 0$ ($B_R = \{|x| \le R\}$) allora, se il limite esiste, si pone

$$\int f = \lim_{R \to \infty} \int_{E \cap B_R} f.$$

Tale è ad esempio il caso di

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

La funzione non è integrabile perché $\int (\frac{\sin x}{x})^+ dx = \int (\frac{\sin x}{x})^- dx = \infty$.

Analogamente puó accadere che f, pur essendo misurabile, non sia integrabile in nessun intorno di un dato punto (prendiamo l'origine) ma sia ben definito $\int_{E \setminus B_\varepsilon} f < \infty$ per $0 < \varepsilon \ll 1$ ed esista il limite

$$\int f = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon} f.$$

Questo integrale si chiama *valore principale* di $\int f$ e spesso è indicato con v.p. $\int f$. È il caso di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx = \pi.$$

La funzione non è integrabile in nessun intorno di 0 perché $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x})^+ \, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x})^- \, dx = \infty$.

Teoremi di convergenza dominata

Questi Teoremi (di Lebesgue) servono per passare al limite o per derivare sotto il segno $\int$. Sono continuamente applicati in analisi. Una proprietá che sia verificata in E tranne eventualmente nei punti di un insieme di misura nulla si dice che vale *quasi ovunque in* E e si scrive $\mathrm{q.o.}E$, oppure per quasi ogni x in E e si scrive $\mathrm{q.}\forall x \in E$.

Successioni.

Nel seguito $E \subset \mathbb{R}^N$ è sempre supposto *misurabile*.

1 *Siano* $f_n \in L^1(E)$*, con* E *misurabile e sia* $f_n \to f$*. Se esiste* $\Phi \in L^1(E)$ *tale che* $\Phi \geq f_n$ q.o.in E*, allora* $f \in L^1(E)$ *e* $\int f = \lim \int f_n$*.*

Φ è la *dominante* delle f_n.

2 Se E ha misura finita si puó prendere spesso $\Phi = C$:
Se $L^1(E) \ni f_n \to f$*,* $m(E) < \infty$ *e* $|f_n| \leq C, \mathrm{q.o.in} E$*, allora* $f \in L^1(E)$ *e* $\int f_n \to \int f$*.*

Serie

Nel caso delle serie i teoremi precedenti dánno:

3 *Se le* g_k *sono integrabili in* E *e quasi ovunque* ≥ 0*, si ha*

$$\int \sum_1^\infty g_k = \sum_1^\infty \int g_k.$$

Quest'ultima grandezza potrebbe essere ∞. Da questa si ottiene immediatamente:

4 *Se* $g_k \in L^1(E)$ *e* $\int \sum_1^\infty |g_k| \; (= \sum_1^\infty \int |g_k|) < \infty$*, si ha la stessa conclusione.*

Quando E ha misura finita le costanti sono $L^1(E)$. Frequentissima è la possibilità di dominare g_k con costanti c_k la cui somma converga. Si ha allora

5 *Se* $m(E) < \infty$ *e* $|g_k| \leq c_k$ *con* $\sum c_k < \infty$*, allora* $\sum g_k \in L^1(E)$ *e di nuovo abbiamo*

$$\int \sum_1^\infty g_k = \sum_1^\infty \int g_k \;\; (< \infty).$$

Continuità e derivazione

Nel seguito $E \subset \mathbb{R}^N$ è supposto misurabile e $A \subset \mathbb{R}^M$ aperto. $f : A \times E \to \mathbb{R}^a$ è assegnata e, per ogni $t \in A$, la funzione $E \ni x \mapsto f(t,x)$ è supposta integrabile (se è a valori vettoriali supponiamo integrabili tutte le componenti). Pertanto è ben definita in A la funzione

$$F(t) = \int f(t,x)dx.$$

Le proprietá di $f(t,x)$ si trasferiscono a $F(t)$ mediante i seguenti teoremi di convergenza dominata.

6 *Se $t \mapsto f(t,x)$ è continua in A per* $\mathrm{q}\forall x \in E$ *ed esiste $\Phi \in L^1(E)$ (dominante) con $|f(t,x)| \leq \Phi(t),\ \forall t \in A,\ \mathrm{q}\forall x \in E$, allora F è continua in A e i limiti rispetto a t passano sotto il segno.*

Per le derivate si ha un teorema perfettamente analogo: vanno dominate tutte le derivate fino all'ordine che si vuole derivare sotto il segno:

7 *Sia $t \mapsto f(t,x)$ di classe C^m in A per* $\mathrm{q}\forall x \in E$ *e ogni derivata rispetto alle t di ordine $\leq m$ sia maggiorabile quasi ovunque in E con una $\Phi \in L^1(E)$ (dominante). Allora $F \in C^m(A)$ e per $k_1 + \cdots + k_M \leq m$ si ha*

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_M}}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_M^{k_M}}F(t) = \int \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_M}}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_M^{k_M}}\, f(t,x)\,dx.$$

Anche qui, se E ha misura finita si puó prendere come dominante una costante. L'applicazione piú usata del teorema prcedente è questa:

8 *Sia $m(E) < \infty$ e $t \mapsto f(t,x)$ di classe C^m in A per* $\mathrm{q}\forall x \in E$ *e ogni derivata rispetto alle t di ordine $\leq m$ sia limitata quasi ovunque in E, indipendentemente da t. La conclusione è la stessa dell'enunciato precedente.*

Teorema di Fubini

Questo teorema dá una condizione per scambiare due operazioni di integrazione rispetto a variabili diverse:

9 *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ misurabili nei loro rispettivi spazi e sia $f(x,y)$ una funzione in $X \times Y$ eventualmente a valori vettoriali. Allora f appartiene a $L^1(X \times Y)$ se e soltanto se la funzione $X \ni x \mapsto f(x,y)$ appartiene a $L^1(X)$ per quasi ogni $y \in Y$, e $y \mapsto \int_X f(x,y)dx$ è una funzione $L^1(Y)$. In tal caso si ha*

$$\int_{X\times Y} f = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right)dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx\right)dy.$$

CHAPTER 4

Funzioni complesse di variabile complessa

1. Numeri complessi e funzioni complesse

1.1. Numeri complessi. Si puó aggiungere al corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali un'*unitá immaginaria* i, definita dalla condizione $i^2 = -1$, e poi tutte le somme e prodotti ottenibili in questo nuovo insieme rispettando le proprietá dei corpi ($a+b = b+a$, $ab = ba$, $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$, $a(b+c) = ab+ac$). Si ottiene così il corpo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*.

Ogni numero complesso si scrive in modo unico nella forma

$$z = x + iy, \quad \text{con } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$$

sicché $\mathbb{C}$ viene rappresentato sul piano $\mathbb{R}^2$. x ed y sono rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* di z. Ció si scrive $x = \Re z$, $y = \Im z$.

Posto $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, si ha $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ e $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

A differenza di $\mathbb{R}$, il corpo $\mathbb{C}$ è dotato di automorfismi [1] diversi dall'identitá. Uno di essi è il *coniugio*. Il coniugato di $z = x + iy$ è $\bar{z} = x - iy$. Verificare che ha $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$ e $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$. $z \to \bar{z}$ è dunque, appunto, un automorfismo.

Il prodotto scalare $x_1x_2 + y_1y_2$ di $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_1 + iy_2$ è uguale a $\Re(z_1 \bar{z}_2)$. Il *modulo* $|z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ di z è la lunghezza del vettore (x, y) e si ha $z\bar{z} = |z|^2$ e $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Verificare.

I vettori z_1 e z_2 sono paralleli se e solo se i numeri complessi z_1 e z_2 sono dipendenti su $\mathbb{R}$ e cioè se si ha $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$, con λ, μ reali non entrambi nulli.

La distanza euclidea di z_1 da z_2 è $|z_1 - z_2|$. Pertanto, in virtú del criterio di Cauchy, la successione z_n converge se e solo se $|z_n - z_m| \to 0$ quando n ed m tendono a infinito.

[1] Corrispondenze biunivoche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(a)\, f(b)$.

Le funzioni e^z, $\sin z$ e $\cos z$ sono definite dalle serie

$$e^z \stackrel{def}{=} 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \tag{45}$$

$$\sin z \stackrel{def}{=} z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{46}$$

$$\cos z \stackrel{def}{=} 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}. \tag{47}$$

Esse convergono assolutamente e uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{C}$.

Difatti, se nella prima serie prendiamo $|z| \leq R$, il modulo del termine n-mo è maggiorato da $R^n/n!$, e $\sum_{n=0}^{\infty}(R^n/n!) = e^R < \infty$, abbiamo quindi convergenza uniforme sui compatti (vedi in appendice 4 a p. 47). Quanto alle due derivate D_x e D_y, la serie dei loro moduli riproduce quella della serie di partenza. Stessa convergenza dunque per le serie delle derivate prime e, per ricorrenza, di tutte.

Veniamo alle altre due. La serie dei loro moduli è costituita dai termini dispari e pari rispettivamente della serie dei moduli di (45) e quindi soddisfa la stessa disuguaglianza e se ne trae la stessa conclusione. Lo stesso per le derivate. Verificare.

Concludendo:

Le serie di e^z, $\sin z$ e $\cos z$ convergono uniformemente sui compatti assieme a quelle delle loro derivate d'ogni ordine. In particolare esse sono indefinitamente derivabili sotto il segno.

Vogliamo provare che per ogni coppia di numeri complessi z e w si ha

$$e^{z+w} = e^z\, e^w. \tag{48}$$

A questo scopo fissiamo z e w.

Applicheremo il Teorema di unicitá per il seguente problema di Cauchy

$$f'(t) - wf(t) = 0, \qquad f(0) = e^z. \tag{49}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Derivando sotto il segno la serie di $f_0(t) = e^{z+tw}$ otteniamo che f_0 soddisfa (49) (verificare). In particolare, quando $z = 0$, e^{tw} soddisfa $f'(t) - wf(t) = 0, f(0) = 1$. Quindi $f_1(t) = e^z e^{tw}$ soddisfa (49) come f_0. Dunque $f_0 \equiv f_1$. Per $t = 1$ abbiamo la (48) richiesta. □

Dal confronto di (45), (46) e (47) si ottiene immediatamente l'*Equazione di Eulero*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

da cui otteniamo

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{50}$$

Esercizio. Verificare le relazioni $|\cos y + i \sin y| = 1$, per $y \in \mathbb{R}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $|e^z| = e^{\Re z}$,

(51) $$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi i, \quad \text{con}\, k \in \mathbb{Z}.$$

Argomento principale, radici.

Passiamo a coordinate polari (ρ, θ). Ovviamente si ha $\rho = |z|$. Se l'anomalia θ si fa variare in $(-\pi, \pi]$ allora essa viene chiamata *argomento principale*, e si indica con $\mathrm{Arg} z$.
La funzione $z \mapsto \mathrm{Arg} z$, definita in tutto $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, è discontinua sulla semiretta $\mathbb{R}^-$ con discontinuità 2π se la si attraversa salendo. Verificare.

Si ha $z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ e dunque dalla (50) risulta

$$z \ = \ \rho\, e^{i\theta}.$$

Questa è la rappresentazione polare che useremo. Per esempio gli insiemi $\{z = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \leq r < R,\ -\pi < \theta \leq \pi\}$ e $\{z = z_0 + Re^{i\theta},\ -\pi < \theta \leq \pi\}$ rappresentano rispettivamente il disco aperto ed il cerchio di centro z_0 e raggio R.

Da $\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ (ottenuta dalla (48)) segue che

Nel prodotto si moltiplicano i moduli mentre si sommano gli argomenti. La moltiplicazione per $e^{i\theta}$ consiste in una rotazione d'un angolo θ.

Da $z^n = a$, $a \neq 0$, segue perció $|z|^n = |a|$ e $n\, \mathrm{Arg} z = \mathrm{Arg} a, \mathrm{mod}\, 2\pi$. Dunque l'equazione $z^n = a$ ha n soluzioni e una di esse è $\sqrt[n]{|a|}\, e^{i(\mathrm{Arg} a)/n}$. Questa si chiama *radice principale n-ma di a* perché è ottenuta usando l'argomento principale. Essa è un vertice di un n-gono regolare con centro 0 e raggio $\sqrt[n]{|a|}$ i cui rimanenti vertici sono le altre radici di a. In particolare

$$\gamma_j \ \stackrel{def}{=} \ e^{i\frac{2j\pi}{n}}, \quad j = 0, 1, ..., n-1$$

sono le n radici dell'unitá. Si noti che $\gamma_0 = 1$.
Sia z_0 è una qualunque radice n-sima di a. Per ogni radice z si ha $(z/z_0)^n = 1$. z/z_0 è dunque radice n-sima dell'unitá. Pertanto la totalitá delle radici n-sime di a è

$$z_0,\ \gamma_1 z_0, \ldots, \gamma_{n-1} z_0.$$

Esercizio La radice cubica principale di -1 non è -1. Trovarla e disegnarla.

Logaritmi

Fissato $z \neq 0$, diremo che w è un *logaritmo* di z se si ha

$$e^w = z.$$

Mediante l'argomento principale introdotto a pagina 55 definiamo, per $z \neq 0$, il *Logaritmo principale*

(52) $$\mathrm{Log}\, z \ \stackrel{def}{=} \ \log|z| \ + \ i\, \mathrm{Arg} z.$$

Si tratta a buon titolo di un logaritmo perché si ha $e^{\mathrm{Log} z} = e^{\log|z|}\, e^{i\mathrm{Arg} z} = |z|(\cos(\mathrm{Arg} z) + i\, \sin(\mathrm{Arg} z)) = z$.
w è un logaritmo di z se e solo se $e^{w-\mathrm{Log} z} = 1$. Per la (51) ció equivale a $w = \mathrm{Log} z + 2k\pi i$, con k intero. z ha dunque infiniti logaritmi.
La funzione $\mathrm{Log} z$ è definita per ogni $z \neq 0$ ma è continua (anzi, di classe C^∞) solo in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ perché ha una discontinuità di $2\pi i$ su $\mathbb{R}^-$ a causa della già vista discontinuità di $\mathrm{Arg} z$. Verificare.

La presenza della discontinuità non è eliminabile con una migliore scelta del logaritmo. Dimostriamo questo fatto:

Non si puó definire una funzione g continua in tutto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ che soddisfi $e^{g(z)} = z$, qualunque $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Infatti, per quanto visto avremmo $g(z) = \mathrm{Log} z + 2k(z)\,\pi i$, con $k(z) \in \mathbb{Z}$. In $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, g e Log sono continue. Perció $k(z)$ è continua nel connesso $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, e dunque costante perché a valori interi. In conclusione $\mathrm{Log} z = g(z) - 2k\,\pi i$ in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Ma allora, contrariamente a quanto appena visto, Log si estenderebbe con continuità a tutto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ perché differisce per una costante da g che, per ipotesi, ha questa proprietá. $\square$

Potenze con esponente complesso

Possiamo definire ragionevolmente qualunque potenza complessa di base complessa fissata $w \neq 0$ così

$$w^z = e^{z\mathrm{Log} w}. \tag{53}$$

Questa si chiama *determinazione principale* della potenza w^z. Per $z = 1/n$ ritroviamo la radice principale.

Usando gli altri possibili logaritmi $\mathrm{Log} w + 2k\pi i$ otteniamo altre determinazioni.

Vogliamo contarle. Confrontiamo le determinazioni $e^{z(\mathrm{Log} w + 2k\pi i)}$ e $e^{z\mathrm{Log} w}$. Il loro quoziente $e^{z2k\pi i}$ è uguale a 1 se e solo se $zk \in \mathbb{Z}$. Se z non è razionale ció è impossibile e dunque abbiamo infinite radici distinte. Se invece $z = p/q$ con p e q interi, primi tra loro, la coincidenza delle due radici in questione si ha quando k è multiplo di q.

Concludendo, per $z = p/q \in \mathbb{Q}$, abbiamo precisamente q determinazioni di w^z. Esse sono $e^{\frac{p}{q}\mathrm{Log} w}\gamma_j$, $j = 0, \ldots, q-1$. Indicando dunque, secondo l'uso, con $\sqrt[q]{w}$ la determinazione principale di $w^{1/q}$ possiamo scrivere le nostre determinazioni nella forma

$$(\gamma_0 \sqrt[q]{w})^p, \cdots\cdots, (\gamma_{q-1} \sqrt[q]{w})^p.$$

1.2. Descrizione qualitativa di alcune funzioni di variabile complessa. $w = z^2$.
Ogni settore con vertice in $0 \in \mathbb{C}_z$ va in un analogo settore in $\mathbb{C}_w$ di ampiezza doppia. Biunivocamente se il primo ha ampiezza $< \pi$. Rette orizzontali e verticali vanno in parabole come da figura.

Lo 0 va nello 0 e ∞ in ∞. Lasciamo al lettore di condurre uno studio analogo di z^n (anche per $n < 0$).

$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. (Funzione di Joukowsky).

Dalla (50) a pag 54 segue $w(e^{i\theta}) = \cos\theta$. Pertanto, quando z percorre il cerchio unitario, w va e torna da 1 a -1 lungo il segmento. Il cerchio Γ_R di centro 0 e raggio R va nell'ellissi E_R di centro 0 e semiassi $(R+1/R)/2$ e $|R-1/R|/2$. Del resto, poiché si ha $w(z) = w(1/z)$, i cerchi Γ_R e $\Gamma_{1/R}$ devono avere la stessa immagine. Peró essi sono rappresentati con versi opposti: mentre z gira sul piú piccolo dei due cerchi, w descrive E_R nello stesso verso. Ció non accade per il cerchio piú grande.

$w = e^z$

È una funzione periodica di periodo $2\pi i$. Tutti i valori di w sono dunque già assunti quando z varia nella striscia $-\pi < y \leq \pi$ nella quale la funzione è iniettiva. La retta verticale $x = x_0$ va nel cerchio di raggio e^{x_0} e centro l'origine mentre la retta orizzontale $y = y_0$ va nella semiretta per l'origine di anomalia y_0.
La funzione e^z non si estende al punto all'infinito perché e^∞ (cioè $\lim_{|z|\to\infty} e^z$) non esiste. Si noti tuttavia che, $\forall\alpha < \pi/2$, nel settore $|\mathrm{Arg} z| \leq \alpha$ si ha $e^z \to 0$ per $z \to \infty$, verificare. Il punto ∞ è una discontinuità molto singolare: si verifichi che in qualunque intorno di ∞, cioè $\{|z| > R\}$, $\forall R > 0$, la funzione e^z assume tutti i valori possibili escluso il solo 0.

Per $x > 0$ e $y > 0$ la retta $\{tz\}_{t\in\mathbb{R}}$ ha per immagine una spirale che quando $t \downarrow -\infty$ tende a 0 compiendo infiniti giri in senso negativo, mentre quando $t \uparrow +\infty$, e^{tz} tende a ∞ girando positivamente. Veda il lettore ció che accade se invece $x < 0$ e/o $y < 0$.

Adattando quanto appena visto il lettore puó studiare la funzione $e^{\frac{1}{z}}$.

2. Esercizi

Gli esercizi indicati con * sono di natura teorica e/o sono applicati successivamente nella teoria.

- **1** a) Dimostrare: $z + \bar{z} = 2\Re z$, $z - \bar{z} = 2i\,\Im z$. b) Sia $z = x + iy \neq 0$. Calcolare $\Re\frac{1}{z}$ e $\Im\frac{1}{z}$ in funzione di x e y. c) Calcolare $\Re\frac{1+i}{1-i}$, $\Im\frac{1+i}{1-i}$.

- **2*** Provare $|z-\zeta|^2 = |z|^2 - 2\Re(\zeta\bar{z}) + |\zeta|^2$, mettere in relazione con i Teoremi di Pitagora e di Carnot.

- **3*** Provare che, se è $|a| < 1$ e $|z| < 1$, allora $|\frac{z-a}{1-a\bar{z}}| < 1$, e che si ha $\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} = \Re\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$, per $|\zeta| = 1$ e $\zeta \neq z$.

- **4** Siano z e ζ complessi, non nulli. Dimostrare
$$|z+\zeta| = |z| + |\zeta| \ \Leftrightarrow \mathrm{Arg} z = \mathrm{Arg}\zeta,$$
$$|z+\zeta| = ||z| - |\zeta|| \ \Leftrightarrow \mathrm{Arg} z = -\mathrm{Arg}\zeta.$$

- **5** a) Scrivere in forma trigonometrica $\sqrt{3}+i$. b) Calcolare $(1-i\sqrt{3})^3$ usando la forma trigonometrica e controllare con il calcolo diretto. c) Calcolare le seguenti radici principali: $\sqrt[3]{8i}$, $\sqrt[3]{2i-2}$.

- **6** Usando la (50) e la (48) dimostrare le formule di addizione $\sin(z+w) = \sin z\,\cos w + \cos z\,\sin w$ e $\cos(z+w) = \cos z\,\cos w - \sin z\,\sin w$

- **7** Controllare che l'applicazone $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ è l'inversione rispetto al cerchio unitario $(\rho,\theta) \mapsto (\frac{1}{\rho},\theta)$.

- **8** Siano $a \neq b$ dati, $z = x+iy$ variabile. Descrivere i luoghi:
a) $\Re z^2 < 0$, b) $|z-i| = y$, c) $|z-a| + |z-b| = |a-b|$,
d) $|z-a| - |z-b| = |a-b|$ $(a \neq b)$, e) $|z-a| + |z-b| = \alpha$ $(\alpha > 0)$,
f) $|\,|z-a| - |z-b|\,| = \alpha$ $(\alpha > 0)$, g) $|z-1| - |z+1| > 1$,
h) $\Re\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $(a > 0)$, i) $\Re\frac{z-1}{z+1} = 0$ l) $\Im\frac{z-1}{z+1} = 0$. m) $\Re\frac{z-a}{z+a} = 0$, $(a > 0)$.

- **9*** Dimostrare che non sempre è $\mathrm{Log}(a_1a_2) = \mathrm{Log}a_1 + \mathrm{Log}a_2$ (provare con $a_1 = a_2 = i-1$) ma che invece, per qualunque logaritmo g si ha
$$g(a_1a_2) \ = \ g(a_1) \ + \ g(a_2), \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi i).$$

- **10*** Al posto dell'argomento principale si scelga $\arg z$ variabile in $[0,2\pi)$ e si dimostri che
$$\log z = \log|z| + i\arg z$$
è un logaritmo di z, discontinuo su $\mathbb{R}^+$ e che si ha $\log z = \mathrm{Log}\, z$ se $y > 0$, $\log z = \mathrm{Log}\, z + 2\pi i$ se $y < 0$.
- **11*** Sia $z(t)$ continua e non nulla in $[a,b]$. Si provi la diseguaglianza
$$|\int_a^b z(t)dt| \leq \int_a^b |z(t)|dt$$
e si dimostri che vale l'uguaglianza se e solo se $z(t)$ descrive un tratto di una retta per l'origine, cioè se $\mathrm{Arg} z$ è costante e dunque si ha $z(t) = C\cdot|z(t)|$ dove C è una costante complessa non nulla.

- **12*** Usando $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ provare la formula di Moivre
$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left(\begin{array}{c} 2k \\ n \end{array} \right) \cos^{n-2k}\theta \ \sin^{2k}\theta.^2$$
- **13*** Sia $\theta \neq 0 \bmod 2\pi$. Provare le formule
$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta \ = \ \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \ \cdot \ \sin\frac{n\theta}{2}.$$
$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \ = \ \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$
Consiglio Trovare la somma della progressione geometrica $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta}$.
- **14*** Dimostrare che i vertici di un generico n-gono regolare sono rappresentati da $a\gamma^k + b$, dove $\gamma = e^{2\pi i/n}$ è la radice principale di 1.
- **15*** Sia p un polinomio di grado n. Provare che, se $m > n$, la media aritmetica dei valori assunti da p nei vertici di un m-gono regolare è uguale al valore assunto nel centro.
- **16*** Sia $z(t)$ derivabile e non nulla. Dimostrare
$$\frac{d}{dt}|z| = |z|\,\Re\frac{\dot z}{z}, \quad \frac{d}{dt}\arg z = \Im\frac{\dot z}{z}, \quad \frac{d}{dt}\frac{z}{|z|} = i\frac{z}{|z|}\,\Im\frac{\dot z}{z}.$$

Risposte **1**: b) $\frac{x}{x^2+y^2}$, $-\frac{y}{x^2+y^2}$, c) 0, 1, **5**: a) $2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, b) -8, c) $\sqrt{3}+i$, $1+i$, **8**: a) $|x| < |y|$, b) Parabola con fuoco i e direttrice l'asse x: $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, c) Segmento $[a, b]$, d) Semiretta contenuta nella retta per a e b, con origine in a e non contenente b, e) Se $\alpha < |a-b|$, $\emptyset$. Se $\alpha = |a-b|$, segmento (vedi c)). Se $\alpha > |a-b|$, ellissi di fuochi a e b e semiassi $\alpha/2$ e $\sqrt{\alpha^2 - |a-b|^2}/2$, f) Se $\alpha > |a-b|$, $\emptyset$. Se $\alpha = |a-b|$, retta per a e b meno il segmento aperto (a, b). Se $\alpha < |a-b|$, iperbole di fuochi a e b e semiassi $\alpha/2$ e $\sqrt{|a-b|^2 - \alpha^2}/2$, g) Una delle tre regioni determinate dall'iperbole che ha per assi gli assi coordinati e semiassi $1/2$ e $\sqrt{3}/2$: quella di sinistra, h) Il cerchio che ha [0,a] per diametro, privato del punto 0, i) Il cerchio $|z| = 1$, l) L'asse reale, m) Il cerchio $|z| = a$. **11**: Posto $\theta(t) = \mathrm{Arg} z(t)$ e $\Theta = \mathrm{Arg}\int_a^b z(t)dt$, si ha $\int |z|dt - |\int z dt| = \int |z|(1 - e^{i(\theta-\Theta)})dt = \int |z|(1-\cos(\theta-\Theta))dt \geq 0$. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'integrale è reale. Se l'ultimo integrale è nullo l'integrando deve annullarsi identicamente ...

[2] Per $a \in \mathbb{R}^+$, $[a]$ indica la parte intera di a, cioè il piú grande intero $\leq a$.

CHAPTER 5

Curve, forme, buchi

1. Curve orientate

Una *curva* γ *di classe* C^1 è una funzione complessa $z(t)$, continua nello intervallo $[a, b]$, con derivata $\dot{z}(t)$ continua e non nulla in $[a, b]$.

Due curve $\{z(t), t \in [a, b]\}$ e $\{z(\tau), \tau \in [\alpha, \beta]\}$ sono dette *equivalenti* se esiste un cambiamento di parametro $t = t(\tau)$ di classe C^1, con $\partial t/\partial\tau > 0$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, tale da aversi $z(\tau) = z[t(\tau)], \forall\tau \in [\alpha, \beta]$.
La classe d'equivalenza di $z(t)$ si chiama *curva orientata* (di classe C^1) e $z(t)$ ne è una *parametrizzazione.*

Se invece $z(t)$ è continua, ma $\dot{z}(t)$ ha un numero finito di discontinuità di prima specie, dove esistono cioè, finiti e non nulli, i suoi limiti destro e sinistro, allora γ si dice *di classe* C^1 *a tratti.*

Una curva C^1 a tratti ha l'aspetto di una spezzata con lati curvilinei.

È sempre sottointeso che una curva sia di classe C^1 *a tratti.*

I punti $z(a)$ e $z(b)$ si chiamano *estremi* della curva. Se essi coincidono allora γ dicesi *chiusa*.
Quando il secondo estremo di γ_1 coincide con il primo di γ_2 rimane definita nel modo ovvio la curva somma $\gamma_1 + \gamma_2$.

Il punto $z(t)$, $t \in [a, b]$, si dice *punto semplice* se corrisponde al solo valore t del parametro, oppure, se γ è chiusa, se esso proviene dai due valori estremi a e b del parametro e non da altri.

Se tutti i punti sono semplici, allora γ dicesi *curva semplice*.
Una curva semplice chiusa si chiama *contorno* .

Un contorno Γ è sempre la frontiera di un'aperto limitato Δ, cioè $\Gamma = \partial\Delta$.
Tralasciamo la dimostrazione di questo facile risultato che non va confuso con il ben piú difficile Teorema di Jordan concernente le curve continue.
In generale peró la frontiera di un aperto limitato è costituita da piú di un contorno: si pensi alla corona circolare.

Il contorno $\Gamma = \partial\Delta$ si intende percorso in modo da lasciarsi Δ alla sinistra. E dunque, visto che Δ è supposto limitato, Γ è percorso in senso antiorario.

Esercizio 1.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e $K \subset \Omega$ un compatto. Esiste un aperto Δ la cui frontiera consiste in un numero finito di contorni tale da aversi $K \subset \Delta \subset\subset \Omega$. [1]
Consiglio: La distanza $d = \inf\{|z - z'|, z \in K, z' \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}$ di K dal complementare di Ω è positiva. K è ricoperto da un'unione finita $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ di dischi con centro in K e raggio $d/2$. $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ è un buon candidato per Δ.

Non tutte le curve chiuse sono contorni. Dimostri il lettore che una curva a forma di otto è del tipo $\partial\Omega_1 - \partial\Omega_2$ ma non è un contorno. Ancora peggio per la curva chiusa composta dai due tratti $z(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$ e $z(t) = 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$ che rappresenta il segmento $[0, 1]$ dell'asse reale percorso due volte e non è neppure rappresentabile come somma o differenza di contorni.

Nel seguito necessiteremo di qualche nozione elementare di topologia del piano che ora ci procuriamo.

L'aperto Ω puó contenere la frontiera Γ dell'aperto limitato Δ senza per questo contenere Δ stesso. In figura 1 ció accade per Γ'' ma non per Γ' perché questo circonda un buco B di Ω (Ω consiste nell'ellissi meno il disco piccolo B).

Passiamo ora a definizioni rigorose.
Si chiama *buco* di $\Omega \subset \mathbb{C}$ ogni componente connessa limitata del complementare $\mathbb{C}\backslash\Omega$ di Ω.[2]
Un insieme del piano si dice essere *semplicemente connesso* se non ha buchi [3]; il suo complementare insomma deve avere solo componenti connesse illimitate.

Quanto prima accennato si puó precisare con il seguente lemma al quale premettiamo un esercizio.

Esercizio Una curva che non incontra la frontiera di un insieme è contenuta nell'insieme oppure ne sta completamente fuori. Dimostrare.

---

[1] $A \subset\subset B$ si legge "A relativamente compatto in B" e significa che la chiusura $\overline{A}$ di A è compatta (cioè A è limitato) ed è contenuta in B. Se B è aperto ció equivale ad essere A limitato e contenuto in B e la sua frontiera non tocca quella di B.

[2] Componente connessa C di un punto a di un insieme $E \subset \mathbb{C}$ è l'unione di tutte le curve continue contenute in E ed uscenti da a. C è la componente connessa di ogni suo punto. Verificare.

[3] Questa definizione di connessione semplice è corretta *solo nel piano*.

LEMMA 1.1. *Siano Ω e Δ sottoinsiemi di $\mathbb{C}$, Δ limitato. Se la frontiera di Δ è contenuta in Ω, allora Δ è contenuto in Ω oppure contiene almeno un buco di Ω. In particolare, se Ω è semplicemente connesso, allora $\partial\Delta \subset \Omega \Rightarrow \Delta \subset \Omega$.*

Dimostrazione. Useremo l'esercizio precedente. Escludiamo che sia $\Delta \subset \Omega$ e cerchiamo un buco di Ω contenuto in Δ. Scegliamo $a \in \Delta\backslash\Omega$. Sia B la componente di a in $\mathbb{C}\backslash\Omega$. B consiste nell'unione di tutte le curve $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$ uscenti da a. Poiché la curva γ non incontra $\partial\Delta$ (γ non incontra Ω che contiene $\partial\Delta$), essa non esce da Δ dunque è $B \subset \Delta$. B è limitato perché tale è Δ che lo contiene. Esso è dunque un buco di Ω. $\square$

Esercizi. 1 Costruire un insieme connesso E del piano che abbia un'infinitá non numerabile di buchi. Si puó imporre che E sia aperto?
2 Sia B un buco dell'aperto A. Dimostrare che B è compatto e che $A \cup B$ è aperto.

2. Forme differenziali

Una *forma differenziale* in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un'espressione del tipo

$$\omega \;=\; A\,dx \;+\; B\,dy,$$

dove A e B sono funzioni continue in Ω a valori reali o complessi.

L'integrale di ω su una curva $\gamma = \{z(t)\}_{t\in[a,b]}$ è definito da

$$\int_\gamma \omega \;=\; \int_a^b \{A[z(t)]\dot{x}(t) + B[z(t)]\dot{y}(t)\}dt.$$

Se A e B sono reali $\int_\gamma \omega$ è dunque il lavoro che compie un punto che percorra γ sotto l'azione di una forza posizionale di componenti (A, B).

Il valore di $\int_\gamma \omega$ non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata γ.

Sia infatti $z(\tau),\ \alpha \le \tau \le \beta$ un'altra parametrizzazione di γ . L'integrale che definisce $\int_\gamma \omega$ puó essere valutato con la sostituzione $t \mapsto t(\tau)$. Allora, tenendo conto che si ha $\frac{dz}{dt}[t(\tau)] = \frac{d\tau}{dt}[t(\tau)]\frac{dz}{d\tau}(\tau)$, [4] otteniamo per $\int_\gamma \omega$ l'espressione di partenza ma con τ, α, β al posto di t, a, b.

$\int_\gamma \omega$ dipende invece, nel segno, dall'orientazione (verso di percorrenza) di γ. Si ha infatti $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$. Inoltre si ha $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$. Verificare.
Una forma differenziale di uso molto frequente è $dz = dx + idy$.

Esercizio 2.1. Se f è continua sulla curva γ di classe C^1 a tratti, si ha $|\int_\gamma f dz| \le \sup_\gamma |f| \cdot \mathrm{lungh}(\gamma)$.

[4] Evitiamo qui di indicare la derivazione con il punto perché la presenza di due diversi parametri renderebbe ambigua questa notazione.

Forme esatte

L'esempio piú comune di forma differenziale è appunto il *differenziale*

$$df \;=\; f_x\,dx \;+\; f_y\,dy \tag{54}$$

di una funzione $f \in C^1(\Omega)$. Una forma di questo tipo si chiama *forma esatta in* Ω.

Immediatamente si ha

$$\int_\gamma df \;=\; \int_a^b \{f_x[z(t)]\dot{x}(t) + f_y[z(t)]\dot{y}(t)\}\,dt \tag{55}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f[z(t)]dt \;=\; f[z(b)] - f[z(a)]. \tag{56}$$

Ne concludiamo che

l'integrale su di una curva di una forma esatta dipende unicamente dagli estremi della curva stessa.

Ció equivale a dire che *il suo integrale su una qualsiasi curva chiusa è nullo.* Difatti, se γ è chiusa ($z(a) = z(b)$), allora $\int_\gamma \omega = f[z(a)] - f[z(b)] = 0$. Viceversa, se γ_1 e γ_2 hanno gli stesi estremi allora $\gamma_1 - \gamma_2$ è chiusa ...

Cominciamo col rovesciare quanto test è osservato.

LEMMA 2.1. *Una forma ω, continua in un'aperto Ω è esatta in Ω se e solo se si ha*

$$\int_\gamma \omega \;=\; 0$$

per ogni curva chiusa $\gamma \subset \Omega$.

In tal caso infatti si ha

$$\omega \;=\; df, \text{ con } f(z) \equiv \int_{z_0}^{z} \omega, \quad z_0 \in \Omega \text{ fissato arbitrariamente.}$$

Con $\int_{z_0}^{z} \omega$ s'intende l'integrale esteso ad un'arbitraria curva $\gamma(z) \subset \Omega$ che va da z_0 a z. Esso, per ipotesi, non dipende dalla scelta di $\gamma(z)$. f è dunque ben definita.

Dimostrazione. Sia σ il segmento orizzontale d'estremi z e $z{+}\Delta x$, vedi figura 2. σ ha equazione $z(t) = z{+}t$ con $t \in [0, \Delta x]$. Possiamo scegliere $\gamma(z{+}\Delta x) = \gamma(z){+}\sigma$. Ricordiamo la notazione $\omega = Adx + Bdy$ e scriviamo $A = u + iv$ separando le parti reale e immaginaria.

Si ha

$$\frac{f(z+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \;=\; \frac{1}{\Delta x}\Big(\int_{\gamma(z)+\sigma}\omega - \int_{\gamma(z)}\omega\;\Big) \;=\; \frac{1}{\Delta x}\int_{\sigma}\omega.$$

Ma dal teorema della media integrale abbiamo $\frac{1}{\Delta x}\int_\sigma \omega = \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} A(z+t)dt = u(z+\lambda\Delta x) + iv(z+\mu\Delta x)$, con $|\lambda|, |\mu| \le 1$. Sostituendo e passando al limite per $\Delta x \to 0$ otteniamo $f_x(z) = u(z) + iv(z) = A(z)$. Analogamente si ha $f_y = B$. □

A pagina 137 dell'appendice dimostriamo il seguente

TEOREMA 2.1. *Sia ω di classe C^1 in Ω* [5]*. Se $\int_\Gamma \omega$ si annulla per ogni contorno $\Gamma \subset \Omega$, allora si annulla su qualunque curva chiusa e dunque ω è esatta.*

In conclusione, tenendo conto del lemma abbiamo che

COROLLARIO 2.1. *Una forma è esatta in Ω se e solo se il suo integrale si annulla su ogni contorno $\Gamma \subset \Omega$.*

Conosciamo dall'analisi elementare il seguente

TEOREMA DI GREEN. *Se Ω è limitato e la sua frontiera consta di un numero finito di curve allora, se A e B sono in $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, si ha $\int_{\partial\Omega} Adx = -\int_\Omega A_y dxdy$ e $\int_{\partial\Omega} Bdy = \int_\Omega B_x dxdy$.*

Questa formula, nella nostra notazione, si puó riscrivere così

$$\int_{\partial\Omega}\omega \;=\; \int_\Omega (B_x - A_y)\,dx\,dy. \tag{57}$$

Forme chiuse

La forma ω si dice *chiusa* o *localmente esatta* se ogni punto ha un intorno ristretta al quale essa è esatta.

A differenza delle forme esatte, le forme chiuse non hanno a priori integrale nullo su *tutti* i contorni, ma solo su quelli che non circondano buchi.

Questo è il senso della seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia $\omega = Adx + Bdy$ una forma di classe C^1 in Ω. Sono equivalenti queste tre proprietá:*

(i) *ω è chiusa,*
(ii) *si ha $A_y = B_x$,*

---

[5] Ma il teorema vale anche se ω è solo continua.

(iii) *si ha*

$$\int_{\partial\Delta} \omega \;=\; 0, \tag{58}$$

per ogni aperto $\Delta \subset\subset \Omega$ *con frontiera di classe* C^1 *a tratti,*

(iv) *si ha*

$$\int_{\Gamma} \omega \;=\; 0$$

per ogni contorno $\Gamma \subset \Omega$ *che delimiti un aperto contenuto in* Ω*, e cioè che non circondi un buco di* Ω*.*

Si noti che (iii) e (iv) sono diverse perché $\partial\Delta$ puó essere formato da piú contorni.
Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Localmente abbiamo $\omega = df$ con $f \in C^1$, cioè $A = f_x$, $B = f_y$. Ma per ipotesi A e B sono C^1, dunque $f \in C^2$ e pertanto $A_y = f_{xy} = f_{yx} = B_x$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Segue immediatamente dal Teorema di Green (57).
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Ovvio.
(iv) $\Rightarrow$ (i). Ogni punto di Ω ha un'intorno semplicemente connesso contenuto in Ω, per esempio un disco D. Basterá mostrrare che ω ristretta a D è esatta. Per il Corollario 1.1 a pag.63, ogni contorno $\Gamma \subset D$ è frontiera di un aperto contenuto in D e quindi in Ω. Dunque $\int_\Gamma \omega = 0$. Poiché D è semplicemente connesso, possiamo applicare il Corollario 2.1 a pagina 65 con D al posto di Ω concludendo che ω è esatta in D. $\square$

Poiché gli insiemi semplicemente connessi sono quelli senza buchi, dal confronto del Corollario 2.1 e di (iv) qui sopra segue immediatamente il seguente, fondamentale Teorema.

TEOREMA 2.2. *Ogni forma* ω *chiusa, di classe* C^1 *in un aperto semplicemente connesso* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *è ivi anche esatta.* [6]

Dimostrazione. Per il Corollario 2.1 a pag.65 basta mostrare che ω ha integrale nullo su ogni contorno $\Gamma = \partial\Delta \subset \Omega$. Ma per quanto visto nel Corollario 1.1 a pag. 63 si ha $\Delta \subset \Omega$. Pertanto il Teorema segue dalla caratterizzazione (iv) delle forme chiuse data nel teorema precedente. $\square$

Esercizio 2.2. Sia ω una forma chiusa definita in Ω. Il valore dell'integrale di ω su un contorno $\gamma \subset \Omega$ dipende solo dai buchi di Ω circondati da γ. In altre parole, se è $\gamma = \partial\Delta$ e $\gamma' = \partial\Delta' \subset \Omega$, e se Δ e Δ' contengono gli stessi buchi di Ω, allora si ha $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$.
Consiglio: Si costruisca un contorno $\gamma'' = \partial\Delta'' \subset \Omega$, contenuto in $\Delta \cap \Delta'$ in modo che Δ'' contenga gli stessi buchi. $\gamma - \gamma''$ è il bordo di $\Delta\backslash\Delta''$ che è contenuto in Ω. Applicando la (iii) della proposizione si ha $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma''} \omega$ Analogamente $\int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma''} \omega$.

[6]Il risultato vale anche se ω è soltanto continua. Non solo, ogni aperto in cui forme chiuse ed esatte coincidono è semplicemente connesso.

Un esempio tipico di forma chiusa ma non esatta è il famigerato $d\theta$.
Qui θ è l'argomento principale o qualunque altro argomento.

Prendiamo in $\mathbb{C}$ coordinate polari (ρ, θ) in modo che ogni punto $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ si scriva nella forma $z = \rho e^{i\theta}$. Si puó scegliere indifferentemente $\theta = \mathrm{Arg} z \in (-\pi, \pi]$, che è C^∞ in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, oppure $\theta = \mathrm{arg} z \in [0, 2\pi)$, che è C^∞ in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.
La funzione $\theta = \theta(z)$ è comunque definita in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e ha in entrambi i casi una discontinuità di 2π su una quanche semiretta.
Il suo differenziale invece è una forma C^∞ in tutto $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Infatti differenziando rispetto a z la relazione

$$z = \rho e^{i\theta},$$

otteniamo

$$dz = e^{i\theta}\, d\rho + i\rho e^{i\theta}\, d\theta = \frac{z}{|z|}\, d|z| + iz\, d\theta,$$

donde

$$d\theta \;=\; \frac{dz}{iz} \;+\; i\, d\log|z|. \tag{59}$$

$d\theta$ è chiusa in ogni punto di $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ per definizione, visto che in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ essa è il differenziale di $\mathrm{Arg} z$ e in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ di $\mathrm{arg} z$.
Ma malgrado la notazione, *$d\theta$ non è esatta in* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (θ non è continua in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$).

Difatti, per il corollario 2.1 di pag 65, basta prendere un contorno che fa il giro dell'origine e mostrare che lí $d\theta$ ha integrale non nullo. Per esempio il cerchio unitario $\Gamma = \{e^{i\theta}, 0 \le \theta < 2\pi\}$, e si ha $\int_\Gamma d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$.

Esercizio 2.3. Applicando l'esercizio 2.2 pag.66 a $d\theta$ si dimostri che, dato un contorno $\gamma = \partial\Delta$ con $0 \notin \gamma$, $\int_\gamma d\theta$ è uguale a 2π se $0 \in \Delta$, uguale a zero altrimenti.

3. Indice d'avvolgimento

Sia $\gamma = \{z(t), t \in [0,1]\}$ una curva *chiusa* che non passa per un punto a. Non è qui necessario supporre che la velocitá $\dot z(t)$ sia non nulla, come invece sempre facciamo. Prendiamo coordinate polari centrate in a cosicché γ è rappresentata da

$$z(t) \;=\; a + r(t)e^{i\theta(t)},\; 0 \le t \le 1$$

e $r(t) > 0$ e $\theta(t)$ sono funzioni C^1 a tratti in $[0,1]$. Non è detto che $\theta(t)$ copra un intervallo di ampiezza 2π. Per esempio, per la curva chiusa $z(t) = e^{i4\pi t}$ abbiamo $\theta(t) = 4\pi t$ che va da 0 a 4π. La ragione è che questa curva compie *due* giri attorno allo 0. In ogni caso, siccome è $z(0) = z(1)$, il numero $\theta(1) - \theta(0)$ è un multiplo intero (positivo, negativo o nullo) di 2π e

$$n_\gamma(a) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

rappresenta il *numero di giri* o *indice d'avvolgimento* di γ relativo ad a (o di a rispetto a γ).

L'indice d'avvolgimento si trova usando la (59) pag.67 dove intendiamo che θ sia l'argomento con centro in a, poniamo cioè $z = a + |z - a|\, e^{i\theta}$ e quindi $z - a$ in luogo di z. Poiché $\int_\gamma d \log|z - a| = \log|z(1) - a| - \log|z(0) - a| = 0$, otteniamo

(60) $$n_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Definiamo una deformazione continua o *omotopia* tra due curve chiuse: sia $z(t, \lambda)$ una funzione continua $[0, 1] \times [0, 1] \to A$ dove $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto. Supponiamo che, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, $t \mapsto z(t, \lambda)$ rappresenti una curva chiusa γ_λ e che le derivate $\frac{\partial z}{\partial t}$ siano anche continue in λ dove sono definite. In questo caso la famiglia di curve $\{\gamma_\lambda\}$ si chiama *omotopia* tra γ_0 e γ_1 che diconsi pertanto *omotope in* A.

Di regola questa nozione e quella di indice d'avvolgimento, che sono puramente topologiche, vengono date per curve soltanto continue e la $z(t, \lambda)$ è anche supposta solo continua. Ma questo esula da questa trattazione.

Osservazione 3.1.
(i) *La funzione* $a \mapsto n_\gamma(a)$ *è costante nelle componenti connesse di* $\mathbb{C}\backslash\gamma$,
(ii) (Invarianza omotopica dell'indice d'avvolgimento) *Se* γ_0 *e* γ_1 *sono omotope in* $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ *allora si ha* $n_{\gamma_0}(a) = n_{\gamma_1}(a)$.

Dimostrazione (i) Se p e q sono nella stessa componente connessa di $\mathbb{C}\backslash\gamma$, vuol dire che c'è una curva $\sigma = \{a(t)\}$ che li congiunge senza incontrare γ. Pertanto, se $a \in \sigma$ e $z \in \gamma$, deve essere $|a - z| > C > 0$ cosicché l'integrando in (60) è dominato da $|\dot{z}|/C$. Dal Teorema della convergenza dominata segue allora che l'integrale che definisce $n_\gamma(a)$ dipende con continuità da $a(t)$ quando questo varia in σ, cioè da t. Ma poiché si tratta di un multiplo di $2\pi i$, esso è costante. In particolare $n_\gamma(p) = n_\gamma(q)$.
(ii) Questa volta è γ che varia ma in ragionamento è lo stesso. Sia $z(t, \lambda)$ l'omotopia in questione. Basterá dimostrare la continuità di

$$\lambda \mapsto \int_{\gamma_\lambda} \frac{dz}{z - a} = \int_0^1 \frac{\frac{\partial z(t,\lambda)}{\partial t}}{z(t, \lambda) - a}\, dt.$$

Ma anche questo segue dalla convergenza dominata perché la funzione continua $(t, \lambda) \mapsto |z(t, \lambda) - a|$, positiva nel compatto $[0, 1] \times [0, 1]$, è minorata da una costante positiva. $\square$

Esercizi

1. Sia $\gamma = \partial\Delta$ un contorno. Dimostrare che si ha $n_\gamma(z) = 1$ se $z \in \Delta$, $n_\gamma(z) = 0$ se $z \notin \overline{\Delta}$. Vedi Esercizio 2.3 a pag.67.
2. Controllare che i numeri d'avvolgimento indicati nelle regioni di $\mathbb{C}\backslash\gamma$ della figura 3 sono esatti.

4. Logaritmi e potenze di funzioni, differenziale logaritmico.

Vogliamo studiare la possibilità di definire un logaritmo continuo di una funzione f continua e *non nulla* nell'aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$.
Abbiamo visto a pag 56 che ció non è possibile per $f(z) = z$ e $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Cerchiamo insomma una soluzione g continua in A dell'equazione

$$e^{g(z)} \ = \ f(z). \tag{61}$$

Notiamo intanto che se g è una soluzione, allora $\{g + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$ è la totalitá delle soluzioni. Difatti, se g_1 è un'altra soluzione, in A deve aversi $e^{g_1 - g} = 1$ cioè $g_1(z) = g(z) + 2k(z)\pi i$, con $k(z) \in \mathbb{Z}$ e $k(z)$ è costante perché continua in un connesso e a valori interi.

Inoltre f ammette comunque de *logaritmi locali*. Cioè ogni $a \in A$ ha un intorno connesso U dove (61) ha una soluzione continua. Difatti se $f(a) \notin \mathbb{R}^-$, scegliamo U tale che sia $f(z) \notin \mathbb{R}^-$, $\forall z \in U$ e prendiamo $g(z) = \operatorname{Log} f(z)$ in U. Se invece $f(a) \in \mathbb{R}^-$ facciamo la stessa cosa ma prendendo $f(z) \notin \mathbb{R}^+$, $\forall z \in U$ e usando invece di "Log" il logatitmo "$\log$" introdotto in 10^* pag 58.

Adesso supponiamo che f sia C^1 in A. Dunque anche le g ora costruite sono C^1 nei rispettivi U.
Differenziando la (61) in U si ha $df = e^g dg = f\, dg$, dunque

$$dg = \frac{df}{f}.$$

Pertanto

f puó avere o non avere un logaritmo continuo globale in A, tuttavia, se f è C^1, i suoi logaritmi locali hanno tutti lo stesso differenziale df/f che è una forma continua in tutto A.

A buon titolo dunque df/f si chiama *differenziale logaritmico* di f.

Vediamone ora il significato geometrico.

Prendiamo una curva chiusa $\gamma \equiv \{z(t)\} \subset A$. f manda γ nella curva chiusa $f\gamma \equiv \{\zeta(t) = f[z(t)]\}$ e dalla (60) a pagina 68 applicata a $\zeta(t)$ otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df}{f} \;=\; n_{f\gamma}(0). \tag{62}$$

Dunque
L'integrale del differenziale logaritmico di f lungo la curva chiusa γ è pari a $2\pi i$ volte l'indice di avvolgimento attorno all'origine della curva $f\gamma$ immagine di γ tramite f.

A conclusione delle considerazioni fatte e con l'uso del Teorema 2.1 a pag. 65 raccomandiamo il seguente esercizio.

Esercizio 4.1. *Sia A un aperto connesso e $f \in C^1(A)$ non nulla.*
Sono equivalenti i seguenti enunciati:

(i) *f ha un logaritmo in A,*
(ii) *Il differenziale logaritmico df/f è esatto in A,*
(iii) *Nessuna curva chiusa contenuta in A è mandata da f in una curva che gira attorno all'origine,*
(iv) *Per ogni contorno $\gamma \subset A$ si ha $\int_\gamma df/f = 0$.*

In queste condizioni, fissato ad arbitrio $a \in A$ [7]*, la totalitá dei logaritmi di f è data dalle funzioni*

$$g(z) \;=\; \mathrm{Log} f(a) \;+\; \int_a^z \frac{df}{f} \;+\; 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre se A è semplicemente connesso f ha certamente un logaritmo in A.

Solo (ii)⇒(i) non segue immediatamente da quanto precede. Ma basta servirsi dell'esattezza di df/f per prendere $g \in C^1(A)$ tale che sia $dg = df/f$, ed osservare che g è indeterminata a meno di una costante additiva, le si puó dunque imporre $g(a) = \mathrm{Log}(a)$ per un qualche $a \in A$. Si ha allora $d(fe^{-g}) = e^{-g}df - fe^{-g}dg = 0$. Perció $fe^{-g} = f(a)e^{-g(a)} = 1$, cioè $f = e^g$ in A.

Radici delle funzioni.

Dati $f \in C^1(A)$ e $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, ci si puó chiedere se esiste $h \in C^1(A)$ tale che sia $h^m = f$ in A. Se una tale radice esiste allora, per quanto visto a pag. 56, essa ha m determinazioni che si ottengono da una qualunque di esse moltiplicandola per le m radici m-sime dell'unitá.

La radice h non esiste in generale. Per esempio se $m > 1$, $f(z) = z$ non ha una radice m-ma h in tutto $\mathbb{C}$. Difatti non puó aversi $h^m(z) = z$ in un intorno dell'origine dove h sia C^1 [8] perché differenziando otterremmo $mh^{m-1}dh = dz$ e, ponendo $z = 0$, avremmo $0 = dz$ perché $h(0) = 0$.

[7] In realtá a è sottoposto alla condizione $f(a) \notin \mathbb{R}^-$, ma se per disgrazia $fA \subset \mathbb{R}^-$, basta sostituire $\mathrm{Log}\, a$ con $\log a$.

[8] . . . ma neppure continua.

Peró, in un aperto dove f ha un logaritmo g, allora $h \equiv e^{g/m}$ è una radice m-ma di f. Verificare.

Tuttavia puó esistere la radice senza bisogno che esista anche il logaritmo. Se prendiamo ad esempio $f(z) = z^m$, che certo ha una radice m-sima, si ha $\int_\Gamma d(z^m)/z^m = m\int_\Gamma dz/z = m2\pi i \neq 0$ ($\Gamma \equiv \{|z| = r > 0\}$) e dunque, per l'Esercizio 4.1 (iv), z^m non ha un logaritmo in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Del resto, se h esiste, certamente si ha $df/f = m \cdot dh/h$, verificare. Per ogni curva chiusa $\gamma \subset A$, il numero $n_{f\gamma}(0)$ d'avvolgimento di $f\gamma$ attorno all'origine è dunque pari a m volte quello di $h\gamma$. In particolare esso è multiplo di m.

Si puó in effetti dimostrare che, se $n_{f\gamma}(0)$ è un multiplo di m, $\forall\gamma$, allora la radice m-ma di f esiste.

5. Esercizi

1 a) Si calcolino gli integrali $I_j = \int_{C_j}\omega$, con $j = 1, 2, 3$, dove $\omega = (1 + i - 2\bar{z})dx + (i - 1 - 2i\bar{z})dy$ e C_j sono curve che vanno da 0 a $1 + i$: C_1 è il segmento, C_2 l'arco della parabola $y = x^2$, C_3 la spezzata coordinata che passa per il punto 1. b) Senza fare nuovi integrali si calcolino le aree delle tre figure A_{kj}, $1 \leq j < k \leq 3$, dove A_{kj} ha per frontiera $C_k - C_j$. Applicare Green.

2 Calcolare $\int_C(3z^2 + 2z)dz$, dove C è l'arco di cerchio passante per l'origine che va da $1 - i$ a $1 + i$ in senso antiorario.
Consiglio Si applichi il Teorema di Green (57) a pag 65 per scegliere un cammino piú comodo.

3 Calcolare $\int_C(z^2 - |z|^2)dz$, dove C è il semicerchio $\{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, sia direttamente, sia applicando la Green.

4 Calcolare $\int_C z\, dz$, dove C è una curva che va da a a b.

5 Calcolare $\int_C |z|\, dz$. a) Se C è il segmento che va da $-i$ a i, b) Il semicerchio $|z| = 1, x \geq 0$ che va da $-i$ a i.

6 Calcolare

$$\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz|.$$

$|dz| = |\dot{z}|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ è l'elemento d'arco.

7 Calcolare $\int_C z\sin z\, dz$, dove C è il segmento che va da 0 a i.

8 Dimostrare che, per $|a| < r$, si ha

$$a)\ \int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{Z}, \text{ diverso da } -1, \end{cases} \qquad b)\ \int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi r^2}{r^2 - |a|^2}.$$

9 Dimostrare che, se f è continua su una curva C di lunghezza finita, si ha $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz|$.

10* Provare il seguente *Lemma di Jordan*. Sia f continua in $\{|z| \geq C, y \geq 0\}$ e sia $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ y\geq 0}} f(z) = 0$. Allora, posto $\Gamma_R = \{|z| = R, y \geq 0\}$, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} |f(z)e^{iaz}|\, d|z| = 0, \qquad \forall a > 0.$$

Consiglio Usare la stima $\int_0^\pi e^{-b\sin\theta} d\theta \leq \pi(1 - e^{-b})/b$, $\forall b > 0$ che si ottiene scrivendo l'integrale nella forma $2\int_0^{\pi/2} e^{-b\cos\theta} d\theta$ ed usando l'ovvia disuguaglianza $\cos\theta \geq 1 - 2\theta/\pi$ per $0 \leq \theta \leq \pi/2$ dovuta alla concavitá del coseno in $(0, \pi/2)$.

11 Ponendo $f(z) = g(iz)$ e usando l'esercizio precedente dimostrare che se g è continua in $\{|z| \geq C, x \geq 0\}$ e $\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ y\geq 0}} g(z) = 0$, allora, posto $\gamma_R = \{|z| = R, x \geq 0\}$, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)e^{-az} dz = 0, \qquad \forall a > 0.$$

12 Sia f continua nel semipiano $y \geq 0$ e soddisfi $|f(z)| \leq M|z|^m$. Sia Γ_R il semicerchio intersezione del semipiano col cerchio $|z| = R$. Dimostrare che si ha

$$\Big| \int_{\Gamma_R} f(z)e^{iz} dz \Big| \leq \pi M R^m.$$

Consiglio Vedi Esercizio 10.

13* Sia f continua nel settore $|\text{Arg} z| \leq \alpha$, con $0 < \alpha < \pi$, e sia Γ_R l'arco intersezione del settore con il cerchio $|z| = R$. Dimostrare che da $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$ segue

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2i\alpha A.$$

14 $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto non contenente 0. Dimostrare che in A è definito un logaritmo di z se e solo se 0 non si trova in un buco di A.
Consiglio: Tappare tutti i buchi di A e definire il logaritmo nell'insieme cosí ottenuto.

15 Questo è un pó tosto. Sia $\Omega = \{|x| < 1,\, x^2 < y < 1\}$, $\omega = d\sqrt{y}$. Provare che si ha $\int_{\partial\Omega} \omega = 2$. Eppure ω è per definizione un differenziale! C'è contrasto con il Corollario 2.1 di pagina 65?

16 Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco di centro $(1, 1)$ e raggio 1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{-ydx}{\sqrt{2-x}} + 2\sqrt{2-x}\, dy.$$

Dimostrare che l'integrale $\int_{\partial D} \omega$ è ben definito (attenzione al punto $(2, 1)$!) e provare che dá $-\frac{16\sqrt{2}}{3}$. Eppure $\omega = d(2y\sqrt{2-x})$!...

17 Sia $p(t) = \sum_0^N a_n t^n$ un polinomio. Studiare il comportamento della funzione

$$f(r) = \int_{|z|=r} p(\bar{z}) dz.$$

18* Se f è continua sul cerchio $\Gamma_r = \{\zeta |\, |\zeta - z| = r\}$ di centro z e raggio r, il suo valor medio in Γ_r è

$$\frac{1}{\text{lung } \Gamma_r} \int_{\Gamma_r} f(s)\, ds \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{63}$$

In particolare, se f è continua vicino a z si ha

$$f(z) \;=\; \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{64}$$

Difatti Γ_r ha equazione parametrica $\zeta = z + re^{i\theta}$ dunque $d\zeta = ire^{i\theta} d\theta = i(\zeta - z) d\theta$. Da $s = r\theta$ segue allora $ds = \frac{r}{i(\zeta - z)} d\zeta$. Sostituendo otteniamo la prima formula. L'altra ne è una ovvia conseguenza.

19 Siano a e b punti distinti del piano congiunti da una curva continua σ. *Allora in* $\mathbb{C} \backslash \sigma$ *è definito un logaritmo della funzione* $f(z) = \frac{z-a}{z-b}$, discontinuo solo su σ. Attraversando σ in senso orario rispetto ad a esso subisce una discontinuità di $-2\pi i$. Pertanto in $\mathbb{C} \backslash \sigma$ è definita anche una determinazione di $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ che cambia segno quando si attraversa σ.

Difatti f manda a nello zero e b all'infinito. Quindi σ va in una curva σ' che va da 0 a ∞ (cioè $\sigma' = \{w(t),\, t \in [0,1)\}$ e $\lim_{t \to 1} |w(t)| = \infty$). Dunque $\mathbb{C} \backslash \sigma'$ non puó contenere una curva che gira attorno a 0. Si applica allora l'Esercizio 4.1 pag 70.

Risposte

1: a) $I_1 = 2i - 2$, $I_2 = -2 + 4i/3$, $I_3 = -2$. b) Poiché $B_x - A_y = -4i$, Green dá $-4i\, \text{area} A_{kj} = I_k - I_j$. Dunque $\text{area} A_{21} = 1/6$, $\text{area} A_{31} = 1/2$, $\text{area} A_{32} = 1/3$. **2** : $8i$. **3**: Direttamente: $\int_0^\pi (e^{2i\theta} - 1)\, ie^{i\theta}\, d\theta = 4/3$, con Green, poiché è $B_x - A_y = -2ix + 2y$, $\int_0^1 \int_0^\pi (-2i\rho \cos\theta + 2\rho \sin\theta) \rho d\rho d\theta = 4/3$ e l'integrale della forma sul segmento $[-1, 1]$ è nullo, si ritrova $4/3$. **4** : $(b^2 - a^2)/2$. **5**: a) i, b) $2i$. **6**: 8. **7**: $-i/e$. **15**: Il corollario presuppone che ω sia esatta in un aperto contenente la curva chiusa mentre $\sqrt{y}$ non è C^1 in nessun intorno di $\partial\Omega$. Verificare. **16** : Situazione simile alla precedente. **17**: $f(r) = 2\pi i a_1 r^2$.

CHAPTER 6

Funzioni olomorfe

Si dice che la funzione complessa f è differenziabile in z_0 se si ha

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|).$$[1]

Il differenziale di f in z_0 è la forma

$$df(z_0) = f_x(z_0)\, dx + f_y(z_0)\, dy. \tag{65}$$

Sostituendo $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ otteniamo

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)](z - z_0) + \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)](\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|).$$

Per *pura analogia formale* con l'espressione precedente poniamo allora

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) \tag{66}$$

in modo che avremo

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|), \tag{67}$$

e la (65) diviene

$$df = f_z\, dz + f_{\bar{z}}\, d\bar{z}. \tag{68}$$

Notiamo subito che f_z è solo una notazione e *non ha il senso di una derivata in senso complesso:*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{69}$$

che in generale non esiste neppure per le funzioni più regolari. Ad esempio, per la funzione $f(z) = \bar{z}$, il limite (69) diviene $\lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$ e dà i valori 1 se calcolato sulla successione $z_0 + \frac{1}{n}$, e -1 se calcolato su $z_0 + \frac{i}{n}$, esso non può dunque esistere.

DEFINIZIONE 0.1. La funzione f si dice *olomorfa* nel punto z_0 se esiste il limite (69), $f'(z_0)$ *si chiama allora derivata in senso complesso di* f *in* z_0.

Se f è olomorfa in z_0 allora $f_z(z_0)$ è davvero il limite $f'(z_0)$ di un rapporto incrementale. Vale infatti la seguente

[1] In generale $o(t)$ indica una funzione che, divisa per t, ha limite nullo per $t \to 0$.

PROPOSIZIONE 0.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia olomorfa in z_0 è che f sia ivi differenziabile e che si abbia $f_{\bar z}(z_0) = 0$. In tal caso si ha $f_z(z_0) = f'(z_0)$.*

Dimostrazione. Sia f olomorfa in z_0. Dalla (69) si ha $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) + o$, dove $o \to 0$ per $z \to z_0$. Ponendo $z = z_0 + \Delta x$ e passando al limite per $\Delta x \to 0$ si ha $f_x(z_0) = f'(z_0)$, mentre ponendo $z = z_0 + i\Delta y$ e passando al limite per $\Delta y \to 0$ otteniamo $f_y(z_0) = if'(z_0)$. Da queste relazioni e dalle (66) otteniamo appunto $f_z(z_0) = f'(z_0)$ e $f_{\bar z}(z_0) = 0$. Se viceversa quest'ultima è verificata e f è differenziabile in z_0 allora dalla (67) si ricava subito l'esistenza del limite (69). □

Insomma, i punti di olomorfia sono quelli dove si ha

(70) $$df = f'\, dz$$

Significato infinitesimale della proprietá di olomorfia.

Le funzioni olomorfe furono introdotte simultaneamente da D'Alembert e da Eulero alla metá del XVIII secolo.

Quest'ultimo, studiando questioni di meccanica dei fluidi, si serviva delle funzioni olomorfe indicandole come quelle che trasformano cerchi infinitesimi in curve infinitamente somiglianti a cerchi, percorse nello stesso verso.

Nei successivi lavori di cartografia invece, le designava come quelle trasformazioni che rispettano gli angoli ("somiglianti").

Veniamo alla prima caratterizzazione. Sia $w(z)$ una funzione C^1 nell'intorno di z_0, dunque $w(z) = w(z_0) + w_z(z_0)(z - z_0) + w_{\bar z}(z_0)(\overline{z - z_0}) + o(|z - z_0|)$. Introduciamo coordinate polari (ρ, θ) nel piano $\mathbb{C}_z$ con centro in z_0 e (r, φ) in $\mathbb{C}_w$ centrate in $w(z_0)$ cosicché $w(z)$ è rappresentata da

$$re^{i\varphi} \;=\; \rho e^{i\theta}\left[w_z(z_0) + e^{-2i\theta} w_{\bar z}(z_0)\right] \;+ o(\rho).$$

Trascuriamo gli infinitesimi superiori e supponiamo che z_0 non sia punto critico di $w(z)$ (w_x e w_y e quindi w_z e $w_{\bar z}$ non entrambi nulli in z_0).

Al cerchio $\rho = \mathrm{cost} \neq 0$ corrisponde un cerchio $r = \mathrm{cost} \neq 0$ se e solo se la parentesi quadra ha modulo indipendente da θ e non nullo.

Ció puó accadere solo se w_z o $w_{\bar z}$ si annulla in z_0. Ma se si annulla il primo non puó annullarsi il secondo e w girerebbe in senso negativo.

La condizione che $z \mapsto w$ mandi $\{$cerchio$\}\mapsto\{$cerchio $+$ infinitesimo$\}$ conservando l'orientamento del cerchio equivale dunque all'olomorfia di w in z_0: $w_{\bar z}(z_0) = 0$.

Veniamo alla caratterizzazione mediante gli angoli. Dalla relazione precedente abbiamo

$$\varphi \;\sim\; \theta + \mathrm{Arg}[w_z(z_0) + e^{-2i\theta} w_{\bar z}(z_0)]$$

vediamo che l'angolo tra due direzioni resta invariato ($\varphi_1 - \varphi_2 = \theta_1 - \theta_2$) se e solo se $\mathrm{Arg}[w_z(z_0) + e^{-2i\theta} w_{\bar z}(z_0)]$ non dipende da θ e ció di nuovo equivale a $w_{\bar z}(z_0) = 0$.

Concludendo, possiamo affermare che

Le funzioni olomorfe con derivata non nulla coincidono con quelle applicazioni C^1 tra regioni piane che conservano l'angolo di incidenza tra due curve qualunque.

A queste, che si chiamano oggi *Trasformazioni conformi*, dedicheremo un capitolo.

Si studi intanto il comportamento degli angoli nella figura 1.2 a pagina 57.

Esercizio 0.1.

1. Non tutti i polinomi $p(x, y)$ sono polinomi nella z. Per sapere se $p(x, y)$ lo è, si può sostituire $x = (z + \bar{z})/2,\ y = (z - \bar{z})/2i$ e verificare se $\bar{z}$ scompare. Ma più spedito è dimostrare e poi applicare il seguente enunciato: "Un polinomio delle variabili x ed y è anche un polinomio della z se e soltanto se esso è una funzione olomorfa in ogni punto del piano complesso". Verificare.
2. Dire quali dei seguenti polinomi sono polinomi della z (e dunque funzioni olomorfe in tutto $\mathbb{C}$)
   $x,\ x + z - 2iy,\ 3x^2 - 3y^2 + 6ixy - 2x - 2iy + 1,\ x^2 - \bar{z}^2 + y^2 + 2ixy.$
3. In quali punti la funzione $|z|^2 = x^2 + y^2$ è olomorfa?
4. Siano A un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ e $\mathcal{O}(A)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe in ogni punto di A. Provare che $\mathcal{O}(A)$ è uno spazio vettoriale complesso.
5. Si provi con un esempio che $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ non è il coniugato di $\frac{\partial f}{\partial z}$ ma che invece si ha sempre $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$.
6. Si provino le usuali regole di derivazione per gli operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ e, per la derivazione della funzione composta da $g(w)$ e $w = f(z)$, si dimostrino le formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} g[f(z)] &= g_w[f(z)]\, f_z(z) + g_{\overline{w}}[f(z)]\, \overline{f}_z(z), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g[f(z)] &= g_w[f(z)]\, f_{\bar{z}}(z) + g_{\overline{w}}[f(z)]\, \overline{f}_{\bar{z}}(z). \end{aligned} \tag{71}$$

7. Se f e g sono olomorfe in z_0 allora lo è fg e, se $g(z_0) \neq 0$, anche f/g. Se poi h è olomorfa in $f(z_0)$, allora anche $h \circ f$ è olomorfa in z_0.
8. Le funzioni
$$e^z,\ \sin z,\ \cos z$$
   definite dalle (45), (46) e (47) a pagina 54 sono olomorfe in tutto il piano complesso.
9. Nei punti dove f è olomorfa si ha $f' = f_x = -if_y = f_z,\ f_y = if_z$.
10. Se f è olomorfa in un aperto connesso e assume ivi solo valori reali allora essa è costante. (Consiglio: da $f = \overline{f}$ segue $\overline{f}_z = \overline{f_{\bar{z}}} = 0$ e dunque $f_z = 0$. Perció $f_x = f_y \equiv 0$.)
11. Si ha
$$D_z = \frac{1}{2z}(\rho D_\rho - iD_\theta),\ D_{\bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}}(\rho D_\rho + iD_\theta),$$
   e
$$D_\rho = \frac{1}{\rho}(zD_z + \bar{z}D_{\bar{z}}),\ D_\theta = i(zD_z - \bar{z}D_{\bar{z}}).$$

Per ottenere queste formule basta differenziare l'identitá $z(\rho, \theta) = \rho e^{i\theta}$ e la sua coniugata. Poi inserire il risultato nella $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} = f_\rho d\rho + f_\theta d\theta$.

12 Le forme dz e $d\bar{z}$ sono linearmente indipendenti. Difatti, poiché $Ldz + Md\bar{z} = (L+M)dx + i(L-M)dy$, da $Ldz + Md\bar{z} = 0$ segue $L = M = 0$.

Noi studieremo soltanto funzioni che sono olomorfe in insiemi aperti. Per esse vale il seguente fondamentale

TEOREMA DI GOURSAT. *Se la funzione f è olomorfa in un insieme aperto A allora f è di classe $\mathbb{C}^\infty$ in A.* [2]

Per la dimostrazione rimandiamo all'appendice a pagina 141.

Il risultato è alquanto sorprendente se si pensa che esso afferma che la funzione f' per il solo fatto di esistere è C^∞.

Possiamo dunque affermare che le funzioni olomorfe in un aperto coincidono con le soluzioni C^1 dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \tag{72}$$

e che esse sono automaticamente di classe C^∞.

Questa equazione si chiama *Equazione di Cauchy Riemann*.

Esercizio 0.2. Interpretiamo la funzione $w = f(z)$, olomorfa nell'aperto A, come applicazione di A sul piano $\mathbb{C}_w$.

Separiamo le parti reale e immaginaria scrivendo $w = u + iv$, sicché f è l'applicazione $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Dimostrare che la forma reale dell'equazione di Cauchy-Riemann è

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{73}$$

E per il determinante jacobiano di f si ha

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'|^2.$$

L'ultima relazione giustifica il nome di *coefficiente di dilatazione* per la grandezza $|f'|^2$.

Rispetto all'inversione le funzioni olomorfe si comportano in modo analogo alle funzioni reali di variabile reale. Lo mostra la seguente osservazione.

[2] Il teorema originale in verità afferma soltanto la continuità della derivata complessa f', ma la sua stessa dimostrazione permette di ottenere questo risultato piú forte.

Osservazione 0.1. *Se $w = f(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0 ed è $f'(z_0) \neq 0$, allora c'è un intorno U di z_0 tale che $f_{|U}$ abbia un'inversa $z = g(w)$, che si abbia cioè $g[f(z)] = z$, $\forall z \in U$ e $f[g(w)] = w$, $\forall w \in fU$. Inoltre fU è aperto nel piano delle w e g è olomorfa in fU. Infine si ha $g'(w) = \frac{1}{f'[g(w)]}, \forall w \in fU$.*

Dimostrazione. Per l'Esercizio 0.2, f ha jacobiano non degenere in z_0 e allora dal teorema delle funzoni inverse segue l'esistenza di un intorno U di z_0 tale che fU sia aperto ed $f_{|U}$ abbia un'inversa $g : fU \to U$ di classe C^1.

Restringendo U possiamo supporre che ivi si abbia $f' \neq 0$. Usando la regola (71) di pagina 77 deriviamo rispetto a $\overline{w}$ e a w la relazione $f[g(w)] \equiv w$ ottenendo $g_{\overline{w}}(w)\overline{f'}[g(w)] = 0$ e $g_w(w)f'[g(w)] = 1$ da cui segue l'asserto perché $g(w)$ è in U quando $w \in fU$ e dunque $f'[g(w)] \neq 0$. □

Esercizio 0.3. Le derivate f', f_x, e f_y di una funzione olomorfa in un aperto A sono olomorfe in A. Quindi, per ricorrenza, tutte le derivate di ogni ordine sono olomorfe.

Esercizio 0.4. La formula dell'esercizio 9 a pagina 77 si puó estendere alle derivate d'ordine superiore quando f è olomorfa in un aperto. Si ha

$$D_x^p D_y^q \, f \;=\; i^q \, f^{(p+q)} \tag{74}$$

In particolare

$$\left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q} \right| = |f^{(p+q)}|. \tag{75}$$

Se g è olomorfa in A e si ha

$$g' = f \quad \text{in } A,$$

allora diremo che g è una *primitiva* di f in A.

Sia f olomorfa in Ω. Studiamo la forma differenziale fdz.
Se poniamo $fdz = Adx + Bdy$ otteniamo $A = f$, $B = if$ e quindi $B_x - A_y = 2if_{\bar{z}} = 0$. Dalla Proposizione 2.1 (ii) a pagina 66 possiamo concludere che

Se f è olomorfa allora la forma fdz è chiusa.

Se inoltre f ha una primitiva g in Ω, avremo in Ω $fdz = g'dz = dg$ e dunque

Se f ha una primitiva in Ω, allora la forma fdz è esatta in Ω.

In particolare, per il Teorema 2.2 a pag 66,

In un aperto semplicemente connesso ogni funzione olomorfa ha una primitiva.

In generale peró l'esistenza della primitiva non è assicurata come mostra l'esempio della funzione $\frac{1}{z}$ olomorfa nell'aperto $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ non semplicemente connesso. In $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ infatti $\frac{1}{z}\,dz$

non puó essere esatta visto che, per quanto sappiamo sull'indice d'avvolgimento (vedi (60) a pag 68), il suo integrale su una curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ è pari a $2\pi i$ moltiplicato per il numero di giri che γ compie attorno a 0 e che questo puó non essere nullo: per esempio se γ è un cerchio con centro in 0.

Gli enunciati precedenti concernenti fdz possono essere rovesciati anche se per f ci si limita a supporre la sola continuità. Si tratta del seguente

TEOREMA 0.1. (di Morera.) *Sia f continua in A.*
Se fdz è chiusa, allora f è olomorfa e se, in piú, fdz è esatta, allora f ha una primitiva in A.

Dimostrazione Proviamo prima la seconda parte. Per definizione di forma esatta esiste $g \in C^1(A)$ con $fdz = dg$. Confrontando con l'identitá $dg = g_z dz + g_{\bar{z}} d\bar{z}$, per l'indipendenza lineare di dz e $d\bar{z}$ (Vedi Esercizio 0.1, 12 a pag 78) otteniamo due cose. Primo: $g_{\bar{z}} = 0$, e quindi g è olomorfa in U. Secondo: $f = g_z\ (= g')$, e quindi f è olomorfa perché è la derivata di una funzione olomorfa ed ha g come primitiva.
Quanto alla prima parte, basta provare che ogni punto di $a \in A$ ha un intorno U dove f è olomorfa. Ora, per definizione di forma chiusa, a ha un intorno U dove fdz è esatta. Applicando allora la seconda parte del teorema con U al posto di A, abbiamo che f è olomorfa in U come volevamo. $\square$

1. Esercizi

1* Sulla linea dell'esercizio 2.2 a pag 66: Siano $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\Gamma = \partial\Delta \subset \Omega$ un contorno. L'integrale $\int_\Gamma f dz$ dipende solo dai buchi di Ω circondati da Γ (cioè contenuti in Δ).

2* Usando l'esercizio 11 a pagina 78 provare che $\mathrm{Log} z$ e $\log z$ sono olomorfe in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ rispettivamente. Usare $\mathrm{Log}(\rho\, e^{i\theta}) = \log\rho + i\theta$.

3 Mostrare che se $f = u + iv$ è olomorfa si ha $u_x v_x + u_y v_y = 0$ e dedurne che le curve $u = cost$ e $v = cost$ sono ortogonali dove $f' \neq 0$. Mettere in relazione con le considerazioni che precedono l'esercizio 0.1 di pag 77.

4 Per ciascuna delle seguenti funzioni olomorfe dire quale parte del piano $\mathbb{C}_z$ viene dilatata e quale compressa. (Usare l'espressione dello Jacobiano):

$$a)\ e^z, \quad b)\ \mathrm{Log} z, \quad c)\ \frac{1}{z}, \quad d)\ z^3.$$

5 Sia $f = u + iv$ olomorfa in un aperto connesso A. Provare che se una delle seguenti funzioni è costante allora f è costante.

$$u, \quad au + bv, (a,b \text{ costanti non entrambe nulle}), \quad |f|, \quad \mathrm{Arg} f.$$

6 Sia $f = u+iv$ olomorfa in un aperto connesso A ed $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile e strettamente crescente. Dimostrare che da $u(z) = F[v(z)]$ segue che f è costante.

7 Mostrare che le seguenti funzioni olomorfe non hanno primitive nelle regioni indicate in parentesi

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{z},\ (z \neq 0), & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1},\ (0 < |z| < 1), \\ \frac{z}{1+z^2},\ (|z| > 1), & \frac{1}{z(1-z^2)},\ (0 < |z| < 1). \end{array}$$

8* Sia f olomorfa nell'aperto convesso A. Dimostrare che si ha

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \sup_A |f'|\, |z_1 - z_2|, \qquad \forall z_1, z_2 \in A. \tag{76}$$

9* Sia f olomorfa nell'aperto A semplicemente connesso. Per z_1, z_2 in A indichiamo con $d_A(z_1, z_2)$ l'estremo inferiore della lunghezza delle spezzate contenute in A che congiungono z_1 con z_2. Dimostrare che si ha

$$|\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz| \leq \sup_A |f| \cdot d_A(z_1, z_2).$$

10* Sia f olomorfa nell'aperto convesso, limitato A. Siano z_1 e z_2 punti di A. Dimostrare che si ha

$$|\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz| \geq \inf_A \Re f \cdot |z_1 - z_2|.$$

11* Dimostrare che nell'esercizio precedente la costante $\inf_A \Re f$ puó essere migliorata mettendo al suo posto $\sup_{\varphi \in [0,2\pi)} (\inf_A \Re(e^{i\varphi} f))$.

12 Siano $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Sia $f \in C^1(\mathbb{C})$ tale da aversi

$$f^2(z) + a(z)f(z) + b(z) = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dimostrare che f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.
Soluzione Derivando rispetto a $\bar{z}$ si ha che f è olomorfa nell'aperto $\{2f + a \neq 0\}$. Inoltre f è olomorfa nei punti interni dell'insieme chiuso $\{2f + a = 0\}$ perchè a è olomorfa. Ma $f_{\bar{z}}$ è continua ...

13 Sia $F(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne un insieme discreto di punti. Si dimostri che la funzione di $\lambda(r) = \int_{|z|=r} F(z)dz$ è costante a tratti.

14 Sia $f(z, t)$ continua per $(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, 1]$, olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ per ogni $t \in [0, 1]$ fissato. Dimostrare che $F(z) = \int_0^1 f(z, t)dt$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.

15 Dimostrare che l'integrale dell'esercizio 7 a pag 71 non dipende dal cammino e ripetere l'esercizio calcolando e usando la primitiva di $z\, sinz$. Viene piú facile.

Risposte **4** a) Il semipiano superiore si dilata e quello inferiore si comprime, b) Il disco unitario aperto D (esclusa l'origine) si dilata e $\mathbb{C} \backslash \overline{D}$ si comprime, c) Come b), d) $\{|z| < 1/\sqrt{3}\}$ si comprime, $\{|z| > 1/\sqrt{3}\}$ si dilata.

CHAPTER 7

Formula di Cauchy e sue conseguenze.

In questo paragrafo $\Omega \subset \mathbb{C}$ *sará sempre un aperto limitato con frontiera costituita da un numero finito di curve chiuse di classe* C^1 *a tratti.*

Sia f di classe C^1 in Ω, continua in $\overline{\Omega}$. Consideriamo la forma $\omega = f dz$ e poniamo $A = f$ e $B = if$. Si ha $B_x - A_y = 2if_{\bar{z}}$. La Formula di Green (57) a pagina 65 dá allora

$$\int_{\partial\Omega} f\, dz \;=\; 2i \int_{\Omega} f_{\bar{z}}\, dx\, dy, \qquad \forall f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \tag{77}$$

e, se f è olomorfa in Ω,

$$\int_{\partial\Omega} f\, dz \;= 0. \tag{78}$$

Vogliamo mostrare che la (78) permette di rappresentare f mediante la sua traccia sul bordo $\partial\Omega$.

TEOREMA 0.1. (Cauchy). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *come sopra precisato,* f *olomorfa in* Ω*, continua fino al bordo. Si ha*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \forall z \in \Omega. \tag{79}$$

Dimostrazione. Fissiamo $z \in \Omega$. Sia D_r il disco $\{\zeta \mid |\zeta - z| < r\}$ il cui bordo è il cerchio $\Gamma_r = \{\zeta|\, |\zeta - z| = r\}$. Prendiamo $0 < r \ll 1$ cosicché $\overline{D_r} \subset \Omega$. La funzione di ζ $\;f(\zeta)/2\pi i(\zeta - z)$ soddisfa le condizioni richieste per applicare la (78) nell'aperto $\Omega\backslash\overline{D_r}$ perché abbiamo tolto D_r e dunque non puó essere $\zeta = z$. Poiché il bordo di $\Omega\backslash\overline{D_r}$ è $\partial\Omega - \partial D_r$ otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Il primo membro è la media di f sul cerchio Γ_r (vedi esercizio 18 pag 73) quindi tende a $f(z)$ per $r \to 0$, passando allora al limite otteniamo la (79). $\square$

La formula di Cauchy (79) è prodiga di importanti applicazioni. Eccone una.
Ricordiamo che per *funzione razionale* si intende il quoziente $p(z)/q(z)$ di due polinomi nella z. Vale il seguente teorema di approssimazione.

TEOREMA 0.2. (Runge.) *Una funzione f olomorfa in un intorno di un compatto K si puó approssimare uniformemente su K con funzioni razionali.*

In altre parole, $\forall\varepsilon > 0$ esistono polinomi p e q tali da aversi $|f - p/q| < \varepsilon$ in K.
Dimostrazione. Siano A l'intorno di K ed f la funzione. Usando l'esercizio 1.1 a pag. 61 costruiamo un aperto Δ limitato da un contorno Γ tale che sia $K \subset \Delta \subset\subset A$. Applichiamo ora la formula di Cauchy (79) a $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. Approssimiamo l'integrale che vi compare con funzioni costanti a tratti. Per ogni $\delta > 0$ dividiamo $\partial\Delta$ in $n = n(\delta)$ curve γ_j, $1 \le j \le n$ di lunghezza $< \delta$. Siano z'_j e z''_j gli estremi della j-ma di esse.

La funzione

$$r(z) \;\equiv\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n} f(z'_j)\frac{z''_j - z'_j}{z'_j - z}$$

è razionale.

Poiché $\int_{\gamma_j} d\zeta = z''_j - z'_j$, dalla (79) si ha

$$f(z) - r(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\Big(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(z'_j)}{z'_j - z}\Big)d\zeta.$$

Ma $f(\zeta)/(\zeta - z)$ è una funzione continua di (z, ζ) nel compatto $K \times \partial\Delta \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il Teorema di Heine Cantor al variare di (ζ, z) in $\gamma_j \times K$ l'oscillazione di f è minore di ε se δ è scelto abbastanza piccolo. Ne segue che ciascuno degli n integrandi qui sopra è $< \varepsilon$ e il corrispondente integrale si maggiora con $\mathrm{lungh}(\gamma_j) \cdot \varepsilon$. Pertanto $|f - r| < \varepsilon\,\mathrm{lung}(\partial\Delta)/2\pi$ su K. $\square$

La formula di Cauchy (79) *è indefinitamente derivabile sotto il segno.*

Difatti, se z varia in un arbitrario disco $D \subset\subset \Omega$ e $\zeta \in \partial\Omega$, si ha $|\zeta - z| > d$, per un certo $d > 0$. Allora la (75) di pag. 79 dá

$$\left|D^p_x D^q_y \frac{1}{\zeta - z}\right| \;=\; \left|D^{p+q}_z \frac{1}{\zeta - z}\right| \;=\; \frac{(p+q)!}{|\zeta - z|^{p+q+1}}. \tag{80}$$

Ne segue che tutte le derivate k-me (rispetto a x e y complessivamente) dell'integrando sono maggiorate in D da $k! \sup_D |f|/d^{k+1}$ e allora, per il Teorema di Lebesgue, l'integrale è indefinitamente derivabile sotto il segno.

E derivando appunto sotto il segno otteniamo che la derivata complessa k-ma è data da

$$f^{(k)}(z) \;=\; \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta. \tag{81}$$

La (81) si chiama *formula di Cauchy per le derivate.*

La formula di Cauchy (79) dá immediatamente il seguente

TEOREMA 0.3. (della media). *Sia f olomorfa nel disco D di centro z_0 e raggio R, continua sulla chiusura. Allora il valore di f nel centro è uguale alla media integrale dei valori sulla frontiera del disco. Si ha cioè*

$$f(z_0) = \frac{1}{\text{lung}\,\partial D_R}\int_{\partial D_R} f\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta, \tag{82}$$

dove s è l'ascissa curvilinea su ∂D.

Dimostrazione. Si applica la formula di Cauchy (79) con D_R al posto di Ω. Sostituendo $\zeta = z_0 + Re^{i\theta}$ otteniamo $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta$. □

Osserviamo che l'argomento della dimostrazione precedente applicato alla formula delle derivate (81) dá piú in generale

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi R^k}\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta, \tag{83}$$

da cui deriva la possibilità di stimare le derivate di una funzione olomorfa limitata con la funzione stessa perché, prendendo i moduli, otteniamo le importantissime
DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k}\sup_D |f|, \quad 0 \le k. \tag{84}$$

Si noti che queste continuano a valere *anche se f non è supposta continua al bordo di D*. Basti osservare che in questo caso f è continua in $\overline{D(z_0, r)}$, $\forall r < R$, e dunque (84) vale se al posto di R mettiamo $\forall r < R$. Allora si passa al limite per $r \uparrow R$.

Immediata conseguenza sono i due seguenti teoremi.

TEOREMA 0.4. (Liouville). *Una funzione olomorfa in tutto il piano complesso e limitata è costante.*

Dimostrazione. Se $|f| \le M$, dalla (84) si ha $|f'(z_0)| \le M/R, \forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall R > 0$. Passando al limite per $R \to \infty$, otteniamo $f' \equiv 0$. □

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA *Ogni polinomio a coefficienti complessi non costante ha almeno una radice complessa.*

Dimostrazione. Sia $p(z)$ un polinomio non costante. Se, per assurdo, p non si annulla per alcun $z \in \mathbb{C}$, allora $1/p$ è una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$. Poiché $\lim_{z\to\infty} |p(z)| = \infty$, possiamo scegliere $R > 0$ tale che sia $|p(z)| \ge 1$ per $|z| \ge R$. Inoltre $m \equiv \min_{|z|\le R} |p(z)| > 0$. Pertanto vale $|1/p| \le \sup\{1, 1/m\}$ in tutto $\mathbb{C}$. $1/p$, e dunque p, sarebbe allora costante in contraddizione con l'ipotesi iniziale. □

Un'altra utile conseguenza della (84) è la seguente, fondamentale disuguaglianza.

Se K è un compatto contenuto nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$, si ha

$$\sup_K |f^{(k)}| \le C_k \sup_A |f|, \quad \forall f \in \mathcal{O}(A). \tag{85}$$

La costante C_k dipende solo da k, K ed A.

Dimostrazione. Ogni punto $z_0 \in K$ è centro di un disco aperto D di raggio $\operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\backslash A)$ contenuto in A. Allora, posto $C_k \equiv k!/[\operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\backslash A)]^k$, da $\sup_D |f| \le \sup_A |f|$ e dalla (84) si ha la tesi. □

La disuguaglianza test è dimostrata permette di ottenere un utile risultato di convergenza.

TEOREMA 0.5. (Weierstrass) *Sia f_n una successione di funzioni olomorfe nell'aperto $A \subset \mathbb{C}$ convergente uniformemente sui compatti ad una funzione f. Allora f è olomorfa in A e tutte le derivate delle f_n convergono, uniformemente sui compatti di A, alle omonime derivate di f.*

Dimostrazione. Sia K un compatto in A e $\Delta \subset\subset A$ un aperto contenente K. Per la (75) a pagina 79 e la (85) qui sopra, per ogni p,q si ha

$$\sup_K |D_x^p D_y^q\, f_n \;-\; D_x^p D_y^q\, f_m)| \;=\; \sup_K |D_z^{p+q}\,(f_n - f_m)| \;\le C_{p+q} \sup_{\overline{\Delta}} |f_n - f_m|.$$

Se $n, m \to \infty$, per la necessitá del criterio di Cauchy, l'ultimo termine di questa disuguaglianza tende a 0. Dunque $\sup_K |D_x^p D_y^q\, f_n \;-\; D_x^p D_y^q\, f_m)| \to 0$ e la tesi discende dalla sufficienza del criterio di Cauchy. In particolare il limite è C^∞ e la sua olomorfia si ottiene passando l'operatore $\partial/\partial\bar{z}$ sotto il segno di limite. □

Terminiamo il paragrafo con due osservazioni, molto semplici ma un pó meno terra terra.

a) Diamo un *Teorema di compattezza* che ci sará utile nel seguito. Così si chiama un risultato che stabilisce l'esistenza di una sottosuccessione convergente per una successione di funzioni che soddisfa opportune ipotesi. Il piú noto teorema di compattezza concerne una successione f_n equilimitata di funzioni continue su un compatto $K \subset \mathbb{R}^m$. La f_n dicesi *equicontinua* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che da $|x - y| \le \delta$ segua $|f_n(x) - f_n(y)| \le \varepsilon, \forall n$. Vale allora il seguente *Teorema di Ascoli–Arzelá* per la cui dimostrazione rimandiamo ai libri di analisi reale elementare.

Se la successione f_n è equilimitata ed equicontinua sul compatto K, allora essa ammette una sottosuccessione uniformemente convergente in K.

Nel caso di f_n olomorfe le diseguaglianze di Cauchy rendono l'equicontinuità conseguenza dell'equilimitatezza: vale il seguente risultato di compattezza.

TEOREMA 0.6. (Montel). *Sia f_n una successione di funzioni olomorfe in un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se le f_n sono equilimitate sui compatti contenuti in A, allora f_n possiede una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti di A ad una funzione olomorfa.*

Dimostrazione. La (85) assicura che su ogni compatto $K \subset A$ si ha $|f_n'| < C$. Se K è anche convesso dalla (76) a pag 81 segue allora $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \le C\,|z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in K, \forall n$. f_n è pertanto equicontinua su K e per Ascoli-Arzelá ha una sottosuccessione convergente uniformemente in K.
Se K non è convesso, si ha $K \subset C_1 \cup \cdots \cup C_m$ con $C_j \subset A$ compatti e convessi. Estratta allora una sottosuccessione che converge uniformemente su C_1, *da questa* se ne estrae una che converge uniformemente su C_2 e quindi anche su $C_1 \cup C_2$ e cosí via. La sottosuccessione finale converge uniformemente su K ma dipende da K. Per trovarne una buona per tutti i K poniamo $K_n = \{|z| \le n\} \cap \{z \in A \,|\, \mathrm{dist}(z, \complement A) \le \frac{1}{n}\}$. I K_n sono compatti, soddisfano $K_n \subset K_{n+1}$ e $\cup K_n = A$. Prendiamo una sottosuccessione s_1 convergente uniformemente su K_1. Da questa possiamo estrarre una s_2 convergente uniformemente su K_2 e cosí via. La sottosuccessione s che cerchiamo si costruisce prendendo il primo elemento di s_1, il secondo di s_2 eccetera. Ora, ogni compatto $K \subset A$ è contenuto in un K_{n_0}, su di esso converge dunque uniformemente s_{n_0}. Ma dal suo termine n_0-mo in poi, s diventa una sottosuccessione di s_{n_0} e quindi anche lei converge uniformemente su K. $\square$

b) Mostriamo ora una generalizzazione della formula di Cauchy e una sua applicazione.
Dalla (77), con la stessa dimostrazione della formula di Cauchy otteniamo

$$(86)\quad f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{f_{\bar z}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta, \qquad \forall f \in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}), \quad \forall z \in \Omega,$$

con $\zeta = \xi + i\eta$. Questa restituisce la solita formula di Cauchy se f è olomorfa. Questa utilissima formula permette, per esempio, di rappresentare f quando questa sia C^1 e a supporto compatto in $\mathbb{C}$ (scriviamo $f \in C_0^1(\mathbb{C})$) mediante la sua sola derivata $f_{\bar z}$. Difatti in questo caso se scegliamo Ω contenente $\mathrm{supp}\, f$, dimodoché $f = 0$ su $\partial\Omega$, otteniamo

$$(87)\qquad f(z) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int\frac{f_{\bar z}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta, \qquad \forall f \in C_0^1(\mathbb{C}), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

dove l'integrale si intende esteso a tutto il piano complesso. Questa permette di risolvere esplicitamente l'equazione di Cauchy Riemann

$$(88)\qquad f_{\bar z} = g$$

nell'incognita f quando il secondo membro g sia a supporto compatto e di classe C^k, $k = 1, 2 \ldots \infty$ e la soluzione sará della stessa classe.

Mostriamo che

$$(89)\qquad f(z) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\, d\eta$$

è una soluzione. Con la sostituzione $w = u + iv = \zeta - z$ la precedente diventa

$$(90)\qquad f(z) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int\frac{g(z + w)}{w}\,du\, dv$$

e questa si puó derivare sotto il segno perché, se z varia in un disco fissato, l'integrando e le sue derivate prime sono a supporto compatto e maggiorate da $C/|w|$ che è integrabile sui compatti. Derivando dunque rispetto a $\bar{z}$ ed applicando la (87) a g abbiamo

$$f_{\bar{z}}(z) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{g_{\bar{z}}(z+w)}{w}\, du\, dv = -\frac{1}{\pi} \int \frac{g_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta = g(z). \qquad \square$$

Naturalmente la totalitá delle soluzioni è $\{g + h\}$ dove h è un'arbitraria funzione olomorfa in $\mathbb{C}$.

In realtá si puó dimostrare che l'ipotesi che g sia a supporto compatto non serve perché l'equazione $f_{\bar{z}} = g$ è anche risolubile in un aperto Ω dando $g \in C^\infty(\Omega)$, con soluzione $f \in C^\infty(\Omega)$. Questa è una delle formulazioni del classico Teorema di Mittag Leffler.

Tornando al caso in cui g è a supporto compatto, *non è detto che la* (88) *abbia una soluzione f anch'essa a supporto compatto.* In questo caso infatti, applicando Green a f in un aperto che ne contiene il supporto avremmo $\int f_{\bar{z}}\, dx\, dy = 0$ perché f è nulla al bordo dell'aperto, e quindi per g avremmo la condizione $\int g\, dx\, dy = 0$ che non è a priori verificata: prendere ad esempio g reale ≥ 0 non $\equiv 0$.

Invece in $\mathbb{C}^n$ con $n > 1$ l'equazione di Cauchy Riemann

$$f_{\bar{z}_j} = g_j, \qquad j = 1, \dots n$$

ha una soluzione f a supporto compatto se lo sono le g_j, ma naturalmente queste dovranno soddisfare $D_{\bar{z}_j} g_k = D_{\bar{z}_k} g_j$ perché possa essere $D_{\bar{z}_j \bar{z}_k} f = D_{\bar{z}_k \bar{z}_j} f$ come decenza vuole. A questa differenza tra i casi $n = 1$ e $n > 1$ è dovuta la profonda diversitá tra l'analisi complessa in una e in piú variabili. La distinzione sta nel fatto che mentre una funzione olomorfa di una variabile è definita dalla sola equazione differenziale $f_{\bar{z}} = 0$, quella in $n > 1$ variabili è data dal sistema $f_{\bar{z}_1} = \cdots = f_{\bar{z}_n} = 0$ che è sovradeterminato: n equazioni in una sola incognita.

1. Esercizi

1 Dimostrare che le funzioni olomorfe godono della proprietá della media non solo rispetto ai cerchi ma anche rispetto ai dischi. Cioè: se f è olomorfa in un disco D di centro a e continua in $\overline{D}$, allora si ha

$$f(a) = \frac{1}{\text{area}\, D} \int_D f(z)\, dxdy.$$

2 Scopo di questo esercizio è di mostrare che una funzione olomorfa nel disco unitario che mandi 0 in p ma la cui immagine eviti una retta a distanza d da p, ha derivata in 0 che è in modulo $\leq 2d$. Noi ci riferiremo a f/d.
Sia f olomorfa nel disco unitario D, continua in $\overline{D}$ e si abbia $f(0) = 1$. Si calcoli l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} [2 + e^{ia} z + \frac{e^{-ia}}{z}]\, f(z) \frac{dz}{z}, \quad a \in \mathbb{R},$$

con la formula di Cauchy per le derivate (81) di pag.84 e direttamente in coordinate polari e eguagliando i risultati si deduca l'identitá

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{a+\theta}{2}\,d\theta = 2 + e^{-ia}f'(0).$$

Usare questo risultato per dimostrare che se inoltre $\Re f \geq 0$, allora $|f'(0)| \leq 2$.

3 Di nuovo con la formula di Cauchy per le derivate, provare che se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ soddisfa $|f(z)| \leq C(1+|z|^n)$ con n intero positivo, allora f è un polinomio di grado $\leq n$.

4 Dimostrare che la somma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(z-n)^2}$$

rappresenta una funzione olomorfa in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. (Usare il Teorema di Weierstrass, pag.86.)

5 Dimostrare che la serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

definisce una funzione olomorfa in $\{x > 1\}$. Si tratta della famigerata ζ di Riemann che tante pene dá ai matematici.

CHAPTER 8

Sviluppo in serie di potenze e sue applicazioni.

1. Sviluppo in serie di potenze

Siano z_0 e $a_0, a_1, \dots$ numeri complessi.

Una serie del tipo

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{91}$$

si chiama *serie di potenze di centro* z_0.

Nel caso reale sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge in (x_0-R, x_0+R) e diverge fuori di $[x_0-R, x_0+R]$, dove

$$R \overset{def}{=} \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}} \quad [1] \tag{92}$$

si chiama *raggio di convergenza* di (91), e che la serie data è proprio la serie di Taylor della funzione che ne è la somma. Con la stessa dimostrazione vediamo ora che, analogamente, si ha convergenza nel disco $D_R = \{|z-z_0| < R\}$ che si chiama *disco di convergenza di* (91).

Per esempio la serie geometrica

$$\frac{1}{1-Z} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n, \qquad |Z| < 1 \tag{93}$$

ha raggio di convergenza uguale ad 1. (La (93) deriva dalla ben nota identitá $\sum_{n=0}^{m} Z^n = \frac{1-Z^{m+1}}{1-Z}$ che si ottiene per ricorrenza).

Il Teorema che segue mostra che le funzioni olomorfe in $D(z_0, R)$ e le serie di centro z_0 e raggio di convergenza $\geq R$ sono la stessa cosa.

TEOREMA 1.1. (Cauchy–Hadamard). (i) *La serie* (91) *converge uniformemente sui compatti e assolutamente, con tutte le derivate, nel suo disco di convergenza D_R a una funzione olomorfa f e si ha*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \forall n \geq 0.\text{[2]} \tag{94}$$

[1]Se $\overline{\lim} = 0$ si intende $R = \infty$ e se $\overline{\lim} = \infty$ si intende $R = 0$. In questo caso (91) converge solo in z_0.

[2]Qui, come sempre nel seguito, si intende $f^{(0)} = f$.

Inoltre essa non converge in alcun punto di $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_R$.
(ii) *Viceversa, se* f *è olomorfa in* D_R *si ha*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \qquad \forall z \in D_R. \tag{95}$$

Dimostrazione. (i) Fissiamo r, con $0 \leq r < R$. In $\{|z-z_0| \leq r\}$ la serie è maggiorata dalla serie numerica $\sum |a_n| r^n$ e quest'ultima converge per il criterio della radice perché si ha $\overline{\lim}_{n\to\infty}(|a_n|r^n)^{\frac{1}{n}} = r\,\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = r/R < 1$.

Dunque (91) converge uniformemente sui compatti in D_R. Poiché le sue somme parziali sono funzioni olomorfe, dal Teorema di Weierstrass a pag 86 seguono l'olomorfia di f, la convergenza delle derivate e quindi la derivabilità sotto il segno di serie.
La (94) si ottiene allora derivando n volte sotto il segno $a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots a_n(z-z_0)^n + \cdots$ e ponendo poi $z = z_0$. All'n-ma derivata non contribuiscono i termini di grado $< n$. Quelli di grado $> n$, derivati n volte dánno monomi che hanno $(z-z_0)$ a fattore e quindi si annullano quando poniamo $z = z_0$. Resta solo $a_n(z-z_0)^n$ la cui derivata n-ma è appunto $n!\,a_n$.

Se poi $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}_R$, cioè $|z-z_0| > R$, allora, per le proprietá del $\overline{\lim}$, esiste una sottosuccessione a_{n_k} tale che $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 1$. Non si puó allora avere $a_n(z-z_0)^n \to 0$ come invece occorrerebbe per la convergenza di (91).
(i) è dimostrato. In particolare possiamo ora dire che la serie geometrica (93) converge uniformemente nei compatti contenuti in $\{|Z| < 1\}$.

Per provare (ii) useremo il seguente Lemma che dimostreremo dopo.

LEMMA 1.1. (Integrali di Cauchy) *Sia* g *continua sul cerchio* $\Gamma_\rho = \{|z-z_0| = \rho\}$ *e sia* $D_\rho = \{|z-z_0| < \rho\}$. *Le due funzioni*

$$g^+(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in D_\rho, \tag{96}$$

$$g^-(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}_\rho \tag{97}$$

sono olomorfe in D_ρ *e in* $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_\rho$ *rispettivamente e si ha*

$$g^+(z) \;=\; \sum_{0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n, \qquad z \in D_\rho, \tag{98}$$

con

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \tag{99}$$

e

$$g^-(z) \;=\; -\sum_1^\infty \frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \qquad\qquad z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\rho, \tag{100}$$

con

$$b_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} g(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta. \tag{101}$$

g^+ e g^- si chiamano *integrali di Cauchy*, interno e esterno rispettivamente, della funzione g continua sul cerchio. [3]

Dimostrazione di (ii). Fissiamo $z \in D_R$ e prendiamo ρ con $|z - z_0| < \rho < R$. La formula di Cauchy dá

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dunque se applichiamo il lemma con $f_{|\Gamma_\rho}$ al posto di g, g^+ corrisponderá ad f. Da (98) e (99) segue allora $f(z) \;=\; \sum_0^\infty a_n\,(z-z_0)^n$ con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{-n-1}\,d\zeta, \qquad\qquad n = 0, 1, \ldots \tag{102}$$

Confrontando con la formula di Cauchy per le derivate di pagina 84 otteniamo $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ e quindi la (95). □

Dimostrazione del Lemma 1.1 Non è restrittivo prendere $z_0 = 0$ e $\rho = 1$. Fissiamo z, con $|z| < 1$. Posto $Z = z/\zeta$ si ha $|Z| < 1$ e quindi l'integrando della (96) diventa

$$\frac{g(\zeta)}{\zeta}\,\frac{1}{Z-1} = \frac{g(\zeta)}{\zeta}\sum_0^\infty Z^n = \sum_0^\infty z^n\,\frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}}.$$

Mentre ζ varia in $\{|\zeta| = 1\}$, Z varia nel cerchio di raggio $|z| < 1$ che è un compatto. Dunque si ha convergenza uniforme della serie e conseguente possibilità di integrare sotto il segno di serie. Ne seguono immediatamente (98) e (99).

Simile è la dimostrazione di (100) e (101):
Questa volta fissiamo invece z con $|z| > 1$ e poniamo $Z = \zeta/z$ cosicché l'integrando di (97) è

$$-\frac{g(\zeta)}{z}\,\frac{1}{1-Z} = -\frac{1}{z}g(\zeta)\sum_0^\infty \frac{\zeta^n}{z^n} = \sum_1^\infty \frac{1}{z^n}\,g(\zeta)\,\zeta^{n-1}.$$

Poiché adesso Z varia sul cerchio di raggio $1/|z| < 1$, si puó di nuovo integrare sotto il segno di serie e si ottengono (100) e (101). □

---

[3]Non bisogna farsi fregare dal fatto che g^+ e g^- sono apparentemente rappresentate dallo stesso integrale perché questo è discontinuo proprio su Γ_ρ e la discontinuità è proprio g. Vedi esercizio 2.3 a pag 97.

Esercizi

1 Nelle ipotesi del teorema, parte (ii), provare che il raggio di convergenza di (95) è $\geq R$.

2 (Teorema di Abel) Dimostrare che se (91) converge in z allora converge uniformemente nei compatti di $D(z_0, |z - z_0|)$.

3 Sia g olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, $g(0) \neq 0$. Trovare il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(z) = g(z)/z$ con centro in $z_0 = 3 + 4i$.

Il Teorema di Cauchy–Hadamard non dá informazioni sul comportamento delle serie di potenze sul bordo del cerchio di convergenza.
Si considerino le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Esse hanno tutte raggio di convergenza uguale ad 1.

Tuttavia, mentre la prima non converge in nessun punto di $\{|z| = 1\}$ perché il termine generico non tende a zero, la seconda notoriamente non converge per $z = 1$ ma converge per $z = -1$ (vedremo anzi che essa converge per ogni $z \neq 1$ che abbia modulo 1).

La terza infine converge uniformemente su $\{|z| \leq 1\}$ dove è maggiorata da $\sum 1/n^2$.

Oltre agli sviluppi in serie (45) a pagina 54 e ai successivi (46) e (47) aventi raggio di convergenza ∞ ed a (93) pag 91, valgono i seguenti sviluppi

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, z^{2n}, \qquad |z| < 1$$

che si ottiene da (93) ponendo $Z = -z^2$.

Integrando quest'ultima otteniamo

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \, z^{2n+1}, \qquad |z| < 1.$$

Se con $\sqrt{w}$ indichiamo quella delle radici di w che ha parte reale non negativa (radice principale), abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \, z^{2n}, \qquad |z| < 1$$

ed integrando

$$\arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \, (2n+1)} \, z^{2n+1}, \qquad |z| < 1.$$

Come prima applicazione dello sviluppo in serie vogliamo dimostrare questo fatto: se due funzioni f_1 e f_2 sono olomorfe in un aperto connesso A e in un punto esse e tutte le loro derivate hanno lo stesso valore, allora le due funzioni sono identicamente uguali in A.

Ció accade in particolare se le due funzioni coincidono in un sottoinsieme aperto di A.

Riferendoci alla differenza $f \equiv f_1 - f_2$, si tratta del seguente

TEOREMA 1.2. (Principio dell'unicitá del prolungamento analitico). *Se f è olomorfa in un aperto connesso A e in un punto $a \in A$ si ha $f^{(n)}(a) = 0, \forall n \geq 0$, allora è $f \equiv 0$ in A.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$E \equiv \{z \in A, \text{ t. c. } f^{(n)} = 0, \ \forall n \geq 0\}.$$

E è non vuoto perché contiene a.

Data la connessione di A è sufficiente provare che E è simultaneamente aperto e chiuso in A per avere $E = A$ e quindi la tesi.

E è chiuso perché si ha $E = \cap_{n=0}^{\infty}\{z \in A, \text{ t. c. } f^{(n)}(z) = 0\}$ e gli insiemi tra le graffe sono chiusi per la continuità delle $f^{(n)}$.

Se poi è $z_0 \in E$ e $D \subset A$ è un disco di centro z_0, allora in D la funzione f ammette lo sviluppo di Taylor (95), ma tutti i coefficienti si annullano. Si ha pertanto $f \equiv 0$ in D e dunque $D \subset E$. Ció prova che E è aperto quindi il teorema. □

Si noti che le funzioni C^∞ non hanno una simile proprietá. Ad esempio la funzione $e^{-\frac{1}{t^2}}$ o, se preferiamo la variabile complessa, $e^{-\frac{1}{|z|^2}}$, a cui imponiamo il valore 0 nell'origine, è C^∞, ha tutte le derivate nulle in 0 ma si annulla solo lì.

Esercizio Sia A un aperto connesso, f e g olomorfe in A. provare che da $f(z)g(z) = 0, \forall z \in A$, discende che o f o g è identicamente nulla.

2. Molteplicitá

Abbiamo visto che la derivata di una funzione olomorfa è anch'essa olomorfa.

Vediamo ora che anche il rapporto incrementale ha questa proprietá.

Nel caso dei polinomi si tratta insomma del Teorema di Ruffini.

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia f olomorfa, non costante nell'aperto connesso A e sia z_0 un punto di A. Esistono un'unica funzione $u \in \mathcal{O}(A)$, con $u(z_0) \neq 0$, ed un unico intero $m > 0$ tali che sia*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m u(z), \qquad z \in A. \tag{103}$$

m è l'ordine della prima derivata di f che non s'annulla in z_0 e si chiama molteplicitá di f in z_0.

Dimostrazione. Sia $D \subset A$ un disco di centro z_0 e sia $f^{(m)}(z_0)$ la prima derivata di f che non s'annulla in z_0. Per il principio del prolungamento analitico deve essere $m > 0$ altrimenti f sarebbe costante.

Poniamo al solito $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ sicché, per $z \in D$, la serie di Taylor dá

$$f(z) \;=\; f(z_0) \;+\; \sum_{n=m}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \;=\; f(z_0) \;+\; (z-z_0)^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{m+j}\,(z-z_0)^j .$$

Pertanto la funzione

$$u(z) \;=\; \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m+j}\,(z-z_0)^j & \text{in } D, \\[2ex] (f(z)-f(z_0))/(z-z_0)^m & \text{in } A\backslash\{z_0\} \end{cases}$$

è ben definita perché le due espressioni coincidono in $D \cap (A\backslash\{z_0\})$. Essa è olomorfa in A, soddisfa la (103) e si ha $u(z_0) = a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$.

Veniamo all'unicitá. Dalla (103) e da $u(z_0) \neq 0$ segue che m è l'ordine della prime derivata di f che non si annulla in z_0. Quinde m è unico. Allora la (103) dá che in $A\backslash\{z_0\}$ u è dato dalla seconda delle equazioni qui sopra. Quindi è unico perché è continuo in z_0. □

Dall'ultima proposizione ricaviamo immediatamente che
se A è connesso, allora l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa in A è un insieme discreto. [4]

Difatti, se si ha $f(z_0) = 0$, e, con riferimento alla (103), prendiamo un intorno $U \subset A$ dove è $u \neq 0$, ovviamente z_0 è l'unico zero di f in U.

Da questo fatto si ricava facilmente che se f_1 e f_2 sono olomorfe in A e nei punti di una successione $a_n \in A$ convergente ad un punto di A le funzioni coincidono, allora $f_1 \equiv f_2$ in A. Dimostrare per esercizio.

Una funzione olomorfa non puó avere in un punto isolato una discontinuità di prima specie. Vale infatti il seguente fondamentale teorema.

TEOREMA 2.1. (di prolungamento di Riemann). *Sia A un aperto e a un suo punto. Se f è olomorfa e limitata in $A\backslash\{a\}$, allora essa è olomorfa in A.* [5]

Dimostrazione. La funzione $g(z) \equiv (z-a)^2 f(z)$ è olomorfa in $A\backslash\{a\}$. Vediamo ora che, se le assegnamo il valore zero in a, essa è olomorfa in A ed ha derivata nulla in a.

Difatti, per ipotesi $|f| \leq M$ in $A\backslash\{a\}$. Dunque si ha

$$\lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} \;=\; \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \;=\; 0.$$

Per la Proposizione 2.1 si ha allora $g(z) = (z-a)^2 h(z)$ per $z \in A$, con $h \in \mathcal{O}(A)$. Confrontando con la definizione stessa di g otteniamo $f \equiv h$ in $A\backslash\{a\}$. Quindi $f \in \mathcal{O}(A)$. □

---

[4] Lo stesso puó dirsi ovviamente di qualunque insieme di livello di una funzione olomorfa.

[5] Dovremmo dire: "allora si puó assegnare ad f un valore in a in modo che essa divenga olomorfa in A."

Esercizio 2.1. *Sia* $f \in \mathcal{O}(|z| > R)$ Dimostrare che $f(\frac{1}{z})$ è olomorfa in $0 \Leftrightarrow f$ è limitata in $\{|z| \geq r\}$ per qualche (o, equivalentemente, tutti gli) $r > R \ \Leftrightarrow$ ***esiste il limite*** $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2.2. Sia $f \in \mathcal{O}(|z| > R) \cap C^0(|z| \geq R)$ e si abbia $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Dimostrare che, per $|z| < R$, si ha

$$\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

(Prendiamo per semplicitá $R = 1$. Per Riemann $f(1/z)$ è olomorfa in $\{|z| < 1\}$ e, per ipotesi, è nulla in 0. Per il Teorema della molteplicitá si ha $f(1/z) = zg(z)$ con $g \in \mathcal{O}(|z| < 1)$. Con la trasformazione $\zeta = 1/Z$ l'integrale dato diventa $-\int_{|Z|=1} \frac{g(Z)dZ}{Z(1-zZ)}$ che si annulla grazie alla (78) pag 83 perché l'integrando è olmorfo in $\{|Z| < 1\}$).

Esercizio 2.3. *(Teorema di Plemelij)* Come accennato nella nota a pié di pagina 93, l'integrale di Cauchy è discontinuo attraverso Γ_ρ e la discontinuità è proprio g. In relazione al Lemma 1.1, pag 92, ponendovi $z_0 = 0$ e $\rho = 1$, provare che si ha infatti

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(g^+[(1-\varepsilon)e^{i\theta}] - g^-[(1+\varepsilon)e^{i\theta}]\right) = g(e^{i\theta}).$$

È un facile calcolo diretto.

Esercizio 2.4. *(Teorema di Morera-Walsh)* Provare che, data g continua sul cerchio $\Gamma = \{|z| = 1\}$, questa si estende olomorfa nel disco D se e solo se $g^- \equiv 0$, cioè se e solo se

$$\int_\Gamma g(z)\, z^k\, dz = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se g si estende l'ultima relazione segue da Green e quindi anche $g^- \equiv 0$. Se viceversa $g^- \equiv 0$, allora dall'esercizio precedente segue che g^+ è l'estensione.

Esercizio 2.5. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto con frontiera C^1 a tratti, Si consideri l'integrale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

a) Valutare $f(z)$ nel caso in cui g sia olomorfa in un intorno di $\overline{A}$ e sia $z \notin \overline{A}$.
b) Dimostrare che se g è continua su ∂A allora f è olomorfa in $\mathbb{C}\backslash\partial A$.
c) Nel caso precedente provare la possibilità che f sia discontinua su ∂A.
Soluzione: a) Per $z \notin \overline{A}$, $h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}$ è olomorfa in un intorno di $\overline{A}$ e dunque $f(z) = 0$ per Green. Per b) basta controllare la derivabilità sotto il segno come già fatto molte volte e derivare rispetto a $\bar{z}$. Quanto a c) si puó prendere $A = \{|z| < 1\}$ e $g(z) = 1$. Con Cauchy si ha subito che $f(z) = 1$ in A, ma $f(z) = 0$ in $\mathbb{C}\backslash\overline{A}$ per la (78) pag 83.

3. Principio del massimo e sue conseguenze

Il modulo di una funzione olomorfa non puó assumere massimi relativi in un aperto.
Vale infatti il seguente

TEOREMA 3.1. (Principio del massimo) *Sia f olomorfa in un aperto connesso A. Se vi è un punto $a \in A$ tale che si abbia $|f(z)| \leq |f(a)|$ per ogni $z \in A$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Possiamo evidentemente supporre $f(a) \neq 0$. Sia $D \subset A$ un disco di raggio R con centro in a. Fissiamo ad arbitrio r con $0 < r < R$. Dal teorema della media si ha $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$.

Ne segue

$$\int_0^{2\pi} (1 - \frac{f(a + re^{i\theta})}{f(a)}) d\theta \ = \ 0.$$

Ora, la frazione nell'integrale ha per ipotesi modulo ≤ 1 e quindi anche la sua parte reale è ≤ 1.
In conclusione la parte reale dell'integrando è non negativa ma allora, avendo essa integrale nullo ed essendo continua deve essere identicamente nulla. Cioè

$$\Re \frac{f(a + re^{i\theta})}{f(a)} \ = \ 1.$$

Ma allora dall'ipotesi

$$|\frac{f(a + re^{i\theta})}{f(a)}| \ \leq \ 1$$

segue immediatamente che la frazione è uguale ad 1. Concludiamo cioè

$$f(a + re^{i\theta}) = f(a), \quad \forall \theta, \text{ con } 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \forall r, \text{ con } 0 < r < R.$$

Dunque $f \equiv f(a)$ è costante in D. Per il Principio del prolungamento analitico deve allora essere $f \equiv f(a)$ nel connesso A. $\square$

Esercizio: Vale il *principio del minimo*? (con analoga formulazione).

Lasciamo al lettore di vedere che il Teorema precedente si puó riformulare così:

SECONDA FORMULAZIONE DEL PRINCIPIO DEL MASSIMO *Sia $f \in \mathcal{O}(A) \cap C^0(\overline{A})$ non costante e A limitato. Allora il massimo di f in $\overline{A}$ è assunto solo alla frontiera di A*

Questa formulazione del Principio del massimo cessa di valere se A non è limitato.
Consideriamo infatti il settore $|\theta| \leq \pi/2\alpha$ di ampiezza π/α e usiamo coordinate polari (r, θ).
La funzione olomorfa e^{z^α} ha modulo 1 sulle due semirette che costituiscono il bordo del settore ma non è limitata nel settore [6] .

[6] Per z^α si intende $r^\alpha(\cos(\alpha\theta) + i \sin(\alpha\theta))$.

Questa funzione *cresce il minimo possibile* all'∞ perché il modulo di una funzione olomorfa in un settore d'ampiezza α, continua e limitata sulle rette che delimitano il settore o ha una crescenza $\geq e^{r^\alpha}$ oppure non cresce affatto.
Per esempio (per $\alpha = 1$): una funzione olomorfa in un semipiano, limitata sulla retta che lo delimita, o è limitata oppure cresce all'infinito non meno di $e^{|z|}$.

Tutto ció è espresso dal seguente

TEOREMA 3.2. (Phragmén-Lindelöf). *Sia f olomorfa nel settore $|\theta| < \pi/2\alpha$, continua sulla chiusura.*

Se si ha

$$|f(re^{i\theta})| \leq Ce^{r^a}, \quad \text{per } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha},\ r > 0,$$

con $a < \alpha$ e, al bordo,

$$|f| \leq \ M, \quad \text{per } \theta = \pm\frac{\pi}{2\alpha},$$

allora si ha $|f| \leq M$ in tutto il settore $|\theta| \leq \pi/2\alpha$.

Dimostrazione. Fissato b, con $a < b < \alpha$, e $\varepsilon > 0$ arbitrario, poniamo

$$f_\varepsilon(z) \ = \ f(z)e^{-\varepsilon z^b}.$$

Poiché per $\theta = \pm\pi/2\alpha$ si ha $\Re z^b = r^b\cos(b\pi/2\alpha)$ e per ipotesi $\cos(b\pi/2\alpha) > 0$, abbiamo $|f_\varepsilon| < |f| \leq M$ al bordo $\{\theta = \pm\pi/2\alpha\}$.

Sull'arco Γ_r di raggio r nel settore abbiamo per ipotesi

$$|f_\varepsilon| \leq Ce^{r^a - \varepsilon r^b \cos(b\theta)}$$

e $\cos(b\theta) \geq \cos(\frac{b}{\alpha}\frac{\pi}{2}) > 0$.

L'esponente tende perció a $-\infty$ per $r \to \infty$. Abbiamo dunque $|f_\varepsilon| \leq M$ su Γ_r per $r \gg 1$.

Applichiamo a f_ε il Principio del Massimo nel settore limitato $S_r \equiv \{|z| \leq r,\ |\theta| \leq \pi/2\alpha\}$, $r \gg 1$. Per l'arbitrarietá di r otteniamo $|f_\varepsilon| \leq M$ nel settore infinito $|\theta| \leq \pi/2\alpha$.

Si ha dunque

$$|f| \leq M\ e^{\varepsilon\,\Re(z^b)}, \quad \text{in } |\theta| \leq \pi/2\alpha, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Per l'arbitrarietá di ε concludiamo che si ha $|f| \leq M$. □

Dalla seconda formulazione del Principio del Massimo segue anche un utile risultato di convergenza.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia f_n una successione di funzioni olomorfe nell'aperto limitato A, continue in $\overline{A}$. Se la successione converge uniformemente sulla frontiera di A, allora converge uniformemente in $\overline{A}$ e il suo limite è olomorfo in A.*

Dimostrazione. Dal principio del massimo segue

$$\sup_{\overline{A}} |f_n - f_m| \ = \ \sup_{\partial A} |f_n - f_m|.$$

Per la necessitá del criterio di Cauchy e l'ipotesi su f_n, la parte destra della uguaglianza tende a 0 quando n ed $m \to \infty$. Per la sufficienza dello stesso criterio f_n converge uniformemente in $\overline{A}$. L'olomorfia del limite segue dal Teorema di Weierstrass a pagina 86. $\square$

Tra le funzioni olomorfe g che mandano lo zero nello zero e sono in modulo $\leq M$ nel disco $D(0, R)$ ci sono le funzioni lineari $c\frac{M}{R}z$ ($|c| = 1$).

Il teorema che segue afferma che queste ultime sono le piú grandi di tutte e anche che sono quelle che hanno la piú grande derivata in a. Studiamo questo fenomeno:

TEOREMA 3.3. (Lemma di Schwartz.) *Sia f olomorfa, non identicamente nulla nel disco D di centro 0 e raggio R, nulla in 0 e limitata in D: $|f| \leq M$. Si ha*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \qquad \text{in } D, \tag{104}$$

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} \tag{105}$$

e, se per qualche $z \in D$, vale l'uguaglianza in (104) *o se vale l'uguaglianza in* (105)*, allora f è del tipo $c\frac{M}{R}z$, con $|c| = 1$.*

Dimostrazione. Per la (103) di pag 95 si ha $f(z) = z\, h(z)$ con $h \in \mathcal{O}(D)$.

Scelto ad arbitrio r, con $0 < r < R$, applichiamo il principio del massimo nella seconda forma alla funzione h nel disco di centro 0 e raggio r. Poiché al bordo è $|h| \leq M/r$ otteniamo $|f(z)| \leq M|z|/r$ in D, $\forall 0 < r < R$ da cui segue la (104), e la (105) se si pensa che è $f'(0) = h(0)$.

Per terminare la dimostrazione basterá provare che, se vale l'uguaglianza in (104) o in (105), allora h è una costante di modulo M/R.

Ma se in un punto di D vale la prima uguaglianza, ivi si ha $|h| = M/R$ e poiché $|h| \leq M/R$ questo è un massimo interno per h che è allora una costante di modulo M/R.

Per la (105) si ragiona nello stesso modo: se vale l'uguaglianza allora $|h|$ assume il massimo in 0. $\square$

4. Automorfismi del disco

Ci interessa studiare quelle funzioni olomorfe che mandano biunivocamente il disco unitario $D = \{|z| < 1\}$ in sé. Queste funzioni si chiamano *Automorfismi del disco*. Vedremo subito che l'inverso di un automorfismo è una funzione olomorfa. Dunque gli automorfismi formano un gruppo. Sono relativamente pochi perché dipendono da soli tre parametri reali, e semplici nella forma. Il prossimo teorema li descrive completamente.

TEOREMA 4.1. (Automorfismi del disco). *Gli automorfismi del disco sono le funzioni $w = f(z)$ del tipo*

$$w = c\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad a \in D, \quad |c| = 1, \tag{106}$$

con inversa olomorfa

$$z \;=\; c^{-1}\,\frac{w+ca}{1+\overline{ca}\,w}. \tag{107}$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che se $|z|=1$, allora anche $|w|=1$ perché si ha $|w| = |w|/|\bar z| = |c||z-a|/|\bar z - \overline{a}| = 1$. Allora dal principio del massimo segue $|z|<1 \Rightarrow |w|<1$ (oppure usare l'esercizio 3^* a pag 58).
Le funzioni definite da (106) sono certamente automorfismi del disco perché l'inversa l'abbiamo esplicitamente esibita (sostituire per credere). Essa è olomorfa in D perché $|\overline{ca}w|<1$.

Per provare che non ce ne sono altri occupiamoci dapprima di quelli che mandano lo zero nello zero. Sia $w=f(z)$ uno di questi. Per il Lemma di Schwartz, pag. 100, applicato con $R=M=1$ abbiamo $|w|\le|z|$. Ma $z=f^{-1}(w)$ manda anche lei lo zero nello zero e quindi $|z|\le|w|$ e quindi $|w|=|z|$. Vediamo dunque che la (104) del Lemma di Schwartz è verificata con il segno "$=$". Dal lemma stesso segue allora $f(z)=c\,z$ con $|c|=1$.

Sia ora invece $w=f(z)$ un automorfismo del tutto arbitrario, componiamolo con l'automorfismo $w \mapsto \frac{w-f(0)}{1-\overline{f(0)}w}$ che manda $f(0)$ in 0, ottenendo cosí l'automorfismo $z\mapsto \frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$ che, per costruzione, lascia fisso lo zero. Da quanto si è detto su questo tipo di automorfismi segue allora

$$\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)} \;=\; c\,z, \qquad |c|=1$$

e dunque, poiché $c^{-1}=\overline{c}$, abbiamo

$$f(z) \;=\; c\,\frac{z+\overline{c}f(0)}{1+c\overline{f(0)}z},$$

che è proprio del tipo (106): basta porre $-\overline{c}f(0)=a$. □

5. Esercizi

1 Sia f olomorfa nel disco $|z|<R$, non costante, sia $M_r=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. Provare che $M(r)$ è strettamente crescente in $(0,R)$. (Usare il principio del massimo).

2 Siano $P_1,\cdots,P_n$ punti del piano e sia P vincolato a restare in una regione limitata A. Provare che la funzione $f(P)=|P_1P|\cdot|P_2P|\cdots|P_nP|$ ha massimi solo alla frontiera di A.

3 Sia p un polinomio di grado $\le n$ e $C>0$ una costante. Provare che l'insieme

$$|p(z)|<C$$

ha al piú n componenti connesse. (Dimostrare per assurdo che ogni componente contiene almeno una radice. Altrimenti in essa p avrebbe anche un principio del minimo, ma $|p|$ è costante al bordo della componente e allora lo sarebbe anche dentro. Ma se $|p|$ è costante in un aperto connesso allora, Esercizio 5 pag.80, essa è ivi costante ma il principio del prolungamento analitico…)

4 Sia f olomorfa in $D = \{|z| < R\}$ e sia $|f(z)| \leq M$ in D. Dimostrare che si ha

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2M}{R}|z|, \qquad \forall z \in D,$$

(usare Schwartz). Servirsi di questa diseguaglianza per dare un'altra dimostrazione del Teorema di Liouville.

5 Sia f olomorfa nel disco unitario D e soddisfi $|f(z)| \leq 1$ in D. Dimostrare che per ogni $a \in D$ si hanno le disuguaglianze

$$|\frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}| \leq |\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}|,$$

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Che succede se in una di queste vale il segno "$=$"? (Indicando con $-S_a$ la funzione (106) di pag 100, con $c = 1$, applicare Schwartz a $g = S_{-f(a)} \circ f \circ S_a$ e, osservando che $S_a \circ S_a$ è l'identitá, dimostrare e poi usare la relazione $g \circ S_a = S_{f(a)} \circ f$.

6 Dimostrare che per $|z| < 1$ si ha

$$\frac{z}{(1 - z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

7 Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergano in $\{|z| < R\}$ a f e g rispettivamente. Dimostrare che allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, converge in $\{|z| < R\}$ e che la somma è fg.

8 Trovare la serie di potenze di $e^z \cos z$. (Usare l'espressione esponenziale del coseno).

9 Trovare il raggio di convergenza di $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ e mostrare che f è la sola soluzione dell'equazione $f(z) = (1 + z^2)\, f(z^2)$ con la condizione $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$.

10 Trovare la piú generale serie di potenze, coinvolgente due costanti complesse arbitrarie, la cui somma f soddisfa $f'' + f = 0$. Calcolare il raggio di convergenza R.

11 Sappiamo che f è olomorfa in un intorno di 0 e soddisfa l'equazione differenziale $zf''(z) + f'(z) + zf(z) = 0$. Trovare la serie di potenze di f con centro 0, provare che f si estende olomorfa a tutto $\mathbb{C}$ dove continua a soddisfare la stessa equazione.

12 Mostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza positivo, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ ha raggio di convergenza infinito.

13 Dire per quali valori reali di a è definita una funzione f, olomorfa in un intorno dell'origine tale che $f(1/n) = n^a$ e trovare la funzione.

14 Sia f olomorfa in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ limitato e connesso, continua in $\overline{A}$. Provare che, se D è un disco chiuso contenente $f(A)$, allora $f(\overline{A}) \cap \partial D \subset f(\partial A)$. (Applicare il principio del massimo a $f(z) - w_0$, dove w_0 è il centro del disco).

15 *Diseguaglianza di Lindelöf* (Caso particolare). Sia f olomorfa nel disco $D = \{|z| < 1\}$ dove è $|f| < 2$. Sia $|f| < 1$ sull'asse reale. Dimostrare che si ha $|f(a)| < \sqrt[4]{8}$ per $|a| < \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.
Consiglio Si provi dapprima che i punti a per i quali è $|a| < \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ sono centro di un quadrato $Q \subset D$ con un lato sull'asse reale. Si applichi poi il principio del massimo alla funzione $g(z) = f(z) \cdot f[a + e^{i\pi/2}(z-a)] \cdot f[a - (z-a)] \cdot f[a + e^{-i\pi/2}(z-a)]$ in Q. Si noti che è $g(a) = f(a)^4$.
Invece del quadrato si puó usare un generico poligono regolare e procedere in modo analogo. Cosí si ha la disuguaglianza di Lindelöf generale.

16 Una funzione $f(x)$ si chiama *analitica reale* in x_0 se in un intorno di x_0 essa è uguale a una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Questa è necessariamente la serie di Taylor di f in x_0. Le a_n saranno reali o complesse a seconda che f sia reale o complessa. Si intenda l'asse x come asse reale del piano complesso. Dimostrare i seguenti fatti:
a) f è analitica reale in x_0 se e solo se essa è la traccia sui reali di una funzione olomorfa in un disco di centro x_0. (usare Cauchy Hadamard).
b) f è analitica reale in ogni punto dell'intervallo I se e solo se essa è la traccia di una funzione olomorfa in un intorno di I in $\mathbb{C}$ (Usare il Teorema del prolungamento analitico).
c) Se la f di sopra è periodica di periodo 2π anche la sua estensione olomorfa è periodica dello stesso periodo.
d) Se f è analitica reale in tutto $\mathbb{R}$ e 2π-periodica, allora la funzione F sul cerchio $|z| = 1$ definita da $F(e^{it}) = f(t)$ si estende olomorfa a una corona circolare del tipo $1/c < |z| < c$ con $c > 1$. (usare b) e c)). Viceversa, se F è olomorfa in un intorno di $|z| = 1$, allora $f(t) = F(e^{it})$ definisce una funzione analitica reale 2π-periodica in $\mathbb{R}$.
e) Sia f lipscitziana e 2π-periodica su $\mathbb{R}$ cosicché la sua serie di Fourier $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ converge uniformemente ad f. I coefficienti sono

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt, \text{ per } n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt, \text{ per } n \geq 1.$$

Osservando che la serie si puó scrivere nella forma $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{int}$ con $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e $A_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $n > 0$, dimostrare che $f(t)$ lipscitziana e 2π-periodica in $\mathbb{R}$ è analitica reale se e solo se i suoi coefficienti di Fourier soddisfano la diseguaglianza asintotica

$$|a_n| \leq c^n, \quad |b_n| \leq c^n, \qquad \text{con } c < 1.$$

f) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ è analitica reale in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}$, c'è una costante C tale che sia $\sup_K |f^{(k)}| \leq C^k k!$ il che equivale a $\sup_K |f^{(k)}| \leq C(Ck)^k$ (perché $k/(k!)^{1/k} \to e$).

g) Data una $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, il raggio di convergenza della sua serie di Taylor in x è $r(x) = (\overline{\lim}(f^{(k)}(x)/k!)^{1/k})^{-1}$. Esso puó essere positivo senza che f sia analitica reale in x, fare un esempio. Tuttavia se $r(x) > c > 0$ per x in un intervallo, allora f è analitica reale in quell'intervallo, dimostrare.

Risposte

8: $\sum_0^\infty 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$. **10**: $\sum_0^\infty (-1)^n (\frac{a_0}{2n!} + \frac{a_1}{(2n+1)!})\, z^n$, $R = \infty$. **11**: $f(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\, z^{2n}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ perché il raggio di convergenza è ∞, infine $zf'' + f' + zf$ è $\equiv 0$ in tutto $\mathbb{C}$ perché è ivi olomorfa e nulla in un intorno di 0 (prolungamento analitico). **13**: Solo se $a = -m$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$ e in tal caso $f(z) = z^m$. Infatti se $a > 0$, $f(\frac{1}{n}) = n^a \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi f è discontinua in 0. Perció deve essere $a \leq 0$. Allora $z^{-a}\, f(z) - 1$ è nulla su $\{1/n\}$ e quindi (prolungamento analitico) $f(z) = z^a$ purché questa sia olomorfa vicino 0. z^a ha discontinuità $e^{a2\pi i}$ su $\mathbb{R}^-$, perció occorre $a\, 2\pi i = k\, 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè $a \in \mathbb{Z}$. **14**: Poniamo $g(z) = f(z) - w_0$ e sia R il raggio di D. $D \supset f(A)$ significa $|g| < R$ in A. $w \in f(\overline{A}) \cap \partial D$ vuol dire $w = f(a) = g(a) + w_0$ con $a \in \overline{A}$ e $|g(a)| = R$. Da questo, per il principio del massimo, segue $a \in \partial A$, quindi $w \in f(\partial A)$.

CHAPTER 9

Serie bilatere, Singolarità

1. Lo sviluppo di Laurent

Abbiamo visto come il Teorema di Cauchy Hadamard a pag 91 identifica le funzioni olomorfe in un disco D di centro z_0 con le serie di potenze centrate in z_0 e convergenti in D.

La stessa cosa vogliamo fare adesso identificando le funzioni olomorfe in una corona $L = \{r < |z - z_0| < R\} = D_R \backslash \overline{D}_r$ con le serie del tipo

$$\Sigma = \underbrace{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}}_{\Sigma^-} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\Sigma^+}$$

che scriviamo nella forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dette serie *bilatere* o *di Laurent*.

Σ^+ si chiama parte *regolare* di Σ perché rappresenta una funzione olomorfa vicino z_0 e Σ^- parte *singolare* perché non converge in z_0. Anche si dicono, impropriamente, parte positiva e negativa.

Si intende che Σ è convergente se convergono separatamente Σ^+ e Σ^-.

Con D_R indichiamo al solito il disco $\{|z - z_0| < R\}$ e con Γ_R la sua frontiera.

Lo schema della situazione è questo:

(i) Sia data Σ. Allora

$$\begin{cases} \Sigma^+ \text{ converge } \textit{dentro} \text{ il disco aperto } D_R, \\ \Sigma^- \text{ converge } \textit{fuori} \text{ del disco chiuso } \overline{D}_r, \end{cases}$$

dove R ed r sono dati da

(108) $$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}, \qquad r = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}}.$$

Se $r < R$ allora, ovviamente, Σ converge nella corona

$$L = \{r < |z - z_0| < R\} = D_R \backslash \overline{D}_r.$$

r ed R si chiamano rispettivamente *raggio di convergenza interno ed esterno* di Σ.

(ii) Sia assegnata invece $f \in \mathcal{O}(L)$. Supponiamo per ora che f è continua nella chiusura $\overline{L}$. La formula di Cauchy dá

$$f(z) \;=\; \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{f^+(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{f^-(z)}.$$

Ebbene, dimostreremo che si ha

$$\begin{cases} f^+ \;=\; \Sigma^+, \\ -f^- \;=\; \Sigma^-, \end{cases}$$

dove i coefficienti di $\Sigma = \Sigma^+ + \Sigma^-$ sono individuati da f tramite la

(109) $$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{-n-1}\,d\zeta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

È la stessa espressione dei coefficienti di (102) a pag 93. Peró adesso n puó assumere valori negativi. Prima no.

Gran parte di tutto ció è già stato dimostrato. Riassumiamo e completiamo ora questa questione con un enunciato preciso.

TEOREMA 1.1. (i) *Data Σ, se $r < R$ allora Σ converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa in L.*
(ii) *Viceversa, data f olomorfa in L, si ha*

(110) $$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad \forall z \in L,$$

e i coefficienti a_n sono dati dalla (109)*, e non dipendono da $\rho \in (r, R)$.*
(iii) *Se inoltre f è anche continua nella chiusura $\overline{L}$, allora si ha $f^+ = \Sigma^+$ in D_R e $-f^- = \Sigma^-$ in $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_r$.*

Dimostrazione. (i) La convergenza di Σ^+ in D_R risulta dal Teorema di Cauchy Hadamard. Quanto a Σ^-, sostituendovi $Z = 1/(z - z_0)$ essa diventa $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}Z^n$ che, sempre per Cauchy Hadamard, converge per $|Z| < 1/\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_{-n}|^{1/n}$ ad una $g(Z)$ olomorfa. Ripristinando la variabile z otteniamo $\Sigma^- = g(\frac{1}{z-z_0})$ che è olomorfa in $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_r$. Rimandiamo per ora (ii).
(iii) f^- e f^+ sono definite come gli integrali di Cauchy del Lemma 1.1 di pag 92. Precisamente f^+ corrisponde a g^+ per $\rho = R$ e f^- a g^- per $\rho = r$. Usando il lemma abbiamo allora per $z \in L$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n(z - z_0) + \sum_{1}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{-n-1}\,d\zeta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta.$$

Osserviamo che entrambi gli integrandi sono olomorfi in L e quindi le integrazioni possono essere spostate su Γ_ρ con $r < \rho < R$.
Introducendo ora indici negativi col porre $a_{-n} = b_n$, $(n = 1, 2, \dots)$, otteniamo precisamente la (110) con i coefficienti (109) come desideravamo.
(ii) È ora immediato. Fissato $z \in L$, restringiamo L ma in modo che continui a contenere z, scegliamo cioè r' e R' tali che sia $r < r' < |z - z_0| < R' < R$ e applichiamo (iii) nella corrispondente corona L'. Questo è possibile perché f è continua in $\overline{L}'$. Otteniamo cosí nuovamente la (110) con i coefficienti (109). □

Esercizio Dimostrare che se f è olomorfa in L allora si ha $f^-(\infty) = 0$.

2. Classificazione delle singolarità

Se una funzione f è olomorfa in un intorno $D_\varepsilon \equiv \{|z - z_0| < \varepsilon\}$ di z_0 ma non in z_0 stesso allora si dice che z_0 è una *singolarità isolata per* f.

Ad esempio le funzioni $1/z$ e $e^{1/z}$ hanno una sigolarità isolata in $z = 0$.

Per ogni r, $0 < r < \varepsilon$, f è olomorfa nella corona $r < |z - z_0| < \varepsilon$ e otteniamo perció dalla (110) a pagina 106

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{111}$$

e le a_n sono date dalla (109) con $0 < \rho < \varepsilon$.

La serie (111) si chiama *sviluppo bilatero o di Laurent* di f vicino z_0.
Ora, dal Teorema di Riemann 2.1 a pagina 96 segue che f non puó essere limitata vicino z_0. Abbiamo dunque soltanto due tipi di singolarità:

- Se $f(z_0) = \infty$, allora z_0 si chiama *polo o singolarità polare*.
- Se $\lim_{z \to z_0} f(z)$ non esiste, allora z_0 è detto *singolarità essenziale*.

La proposizione che segue mostra, tra l'altro, che i *poli* sono precisamente quelle singolarità isolate che hanno uno sviluppo di Laurent la cui parte singolare è tronca (ha solo un numero finito di termini).

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia z_0 una singolarità isolata di f.*
Sono equivalenti i seguenti enunciati

- (i) z_0 *è un polo,*
- (ii) $\frac{1}{f}$ *è olomorfa vicino z_0, nulla in z_0,*
- (iii) $\exists\, m \geq 1$ *tale che $(z - z_0)^m f(z)$ sia olomorfa vicino z_0, non nulla in z_0,*
- (iv) $\exists\, m \geq 1$ *tale che si abbia $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, in un intorno di z_0 e* $a_{-m} \neq 0$.

Dimostrazione. (i)⇒(ii). Da $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ segue $|f| > c > 0$ in $D_\delta\backslash\{z_0\}$ per $0 < \delta \ll 1$.

In particolare $f \neq 0$ in $D_\delta\backslash\{z_0\}$ e dunque $1/f$ è ivi olomorfa e limitata ($|1/f| < 1/c$). $1/f$ è allora olomorfa in D_δ per il Teorema di Riemann 2.1 a pagina 96. Si ha $\frac{1}{f}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$.

(ii)⇒(iii). La (103) di pag 95 applicata a $\frac{1}{f}$ dá $\frac{1}{f}(z) = (z-z_0)^m u(z)$ vicino z_0, con $m \geq 1$ e $u(z_0) \neq 0$. $(z-z_0)^m f(z) = 1/u(z)$ ha dunque le proprietá richieste.

(iii)⇒(iv). Sia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ la serie di Laurent di f vicino z_0.
Si ha

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-m-1} a_n (z-z_0)^{n+m} \;+\; \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}$$

dove si è seperato le parti singolare e regolare della somma.

Poiché $(z-z_0)^m f(z)$ è olomorfa, la parte singolare deve annullarsi identicamente. Perció $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \cdots = 0$ e la serie di f è dunque tronca a sinistra. Ponendo poi a primo membro $z = z_0$ questo non deve, per ipotesi, annullarsi mentre il secondo membro dá proprio a_{-m}. Dunque $a_{-m} \neq 0$.

(iv)⇒(i). Vicino z_0 si ha

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-z_0)^n.$$

Poiché la serie è continua in z_0 dove vale $a_{-m} \neq 0$ e $m \geq 1$ otteniamo $f(z_0) = \infty$. □

Consideriamo ora una funzione f che sia olomorfa in A con l'eccezione d'un insieme Σ di singolarità isolate. Sia $\Omega \subset\subset A$ un un aperto la cui frontiera è C^1 a tratti e non contiene nessun punto di Σ.

$\Omega \cap \Sigma$ è necessariamente un'insieme finito $\{z_1, \cdots z_n\}$.

Se non vi fossero singolarità in Ω, si avrebbe $\int_{\partial\Omega} f dz = 0$.

La responsabilità della consistenza dell'integrale è dunque da attribuirsi al comportamento di f nelle vicinanze dei punti $z_1, \cdots z_n$. Del resto, in accordo con l'esercizio 2.2 di pag 66, l'integrale deve dipendere esclusivamente dai valori di f vicino alle singolarità contenute in Ω.

Il teorema che segue precisa in che modo questo fenomeno avviene.

DEFINIZIONE 2.1. Il *residuo* di f nella singolarità z_* è il coefficiente di $\frac{1}{z-z_*}$ nello sviluppo di Laurent di f in z_*.

Dunque se $\Gamma = \partial\Delta$ è un contorno che gira attorno alla sola singolarità z_* (cioè $\Delta \cap \Sigma = \{z_*\}$) e non vi sono singolarità su Γ si ha

$$\mathrm{Res}_{z^*} f \;\stackrel{def}{=}\; a_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} f(z)dz.$$

Difatti esiste $\rho > 0$ tale che $\overline{D}(z_*, \rho) \subset \Delta$ e la (109) dá $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_*,\rho)} f(z)dz$ e dalla formula di Green (58) applicata a $\Delta \backslash \overline{D}(z_*, \rho)$ si ha $\int_{\partial\Delta} = \int_{\partial D(z_*,\rho)}$.

Si noti che $\text{Res}_{z_*} f$ non dipende dalla scelta dell'intorno Δ purché $\Delta \cap \Sigma = \{z_*\}$.

Useremo talvolta la notazione $\text{Res}_f z_*$ in luogo di $\text{Res}_{z_*} f$.

TEOREMA 2.1. (Teorema dei Residui). *Nelle condizioni sopra precisate si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(z)dz \;=\; \sum_{k=1}^{n} \text{Res}_{z_k} f. \tag{112}$$

Dimostrazione. Si scelgano intorni Δ_k di ciascun z_k a due a due disgiunti come in figura. f è olomorfa in $\Omega' \equiv \Omega \backslash \cup_{k=1}^{n} \overline{\Delta_k}$, che ha frontiera $\partial\Omega' = \partial\Omega - \sum_{k=1}^{n} \partial\Delta_k$.

Per Green si ha $0 = \int_{\partial\Omega'} f dz = \int_{\partial\Omega} f dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Delta_k} f dz$.
Per la definizione di residuo, la somma $\sum_1^n$ è pari a $2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}_{z_k} f$. Questo dimostra la (112).
□

I residui sono spesso facili da calcolare.

Nel caso di un polo di moltelicitá m si ha

$$\text{Res}_{z_0} f \;=\; \frac{1}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(z_0), \quad \text{con } g(z) = (z - z_0)^m f(z). \tag{113}$$

Difatti è

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \ldots,$$

derivando $m - 1$ volte e ponendo poi $z = z_0$ si ha la (113).

Se il polo è semplice otteniamo

$$\text{Res}_{z_0} f \;=\; \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]. \tag{114}$$

Se p e q sono polinomi primi tra loro e z_0 è uno zero semplice di q, otteniamo infine

$$\mathrm{Res}_{z_0}\frac{p}{q} \;=\; \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \tag{115}$$

Esercizio 2.1. *Sia a un polo semplice di f e γ_r l'arco $\{a + re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \alpha\}$. Dimostrare che si ha*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f dz = i\alpha \mathrm{Res}_a f.$$

(Scrivere $f(z) = g(z)/(z-a)$ con $g(a) \neq 0$ e passare a coordinate polari).

Si noti che il teorema dei residui include ovviamente la formula di Green (quando non vi sono singolarità) ma anche quella di Cauchy. Infatti se $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, ponendo $g(z) = f(z)/(z-a)$, con $a \in \Omega$, si ha $f(a) = \mathrm{Res}_a g$.

Esercizio 2.2. Sia A un aperto limitato contenente 0, con frontiera C^1 a tratti. f e g olomorfe in A, continue sulla chiusura. Supponiamo che g non si annulli su ∂A ed abbia $a_1, \cdots, a_n$, tutti $\neq 0$, come unici zeri in A e che siano semplici. Sia $f(0) = g(0)$, $f(a_k) = g'(a_k)$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{zg(z)}dz$$

in termini di $a_1, \cdots, a_n$.
Con i residui. Viene $1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

3. Calcolo di integrali col metodo dei residui

3.1. Funzioni razionali e oscillanti smorzate. UNO

Niente di piú palloso che integrare funzioni razionali. Con i residui invece è una pacchia.

Per esempio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

si puó calcolare cosí.
Sia $f(x)$ l'integrando. Integriamo $f(z)dz$ sul bordo del semidisco $S_r = \{|z| \le r,\ y \ge 0\}$. Sia C_r il semicerchio $\{|z| = r,\ y \ge 0\}$. Se $r > 1$, S_r contiene il polo i di f dove questa ha residuo $\frac{1}{2i}$. Verificare. Il Teorema dei residui dá

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{C_r} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_i f = \pi.$$

Ma $|\int_{C_r}| \le \pi r\,\frac{1}{|r^2-1|} \to 0$ per $r \to \infty$ e passando al limite abbiamo fatto.

Esercizio Dimostrare questo fatto. Sia $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, dove $R = p/q$ e i polinomi p e q non hanno zeri comuni e soddisfano le relazioni $\mathrm{grado}\, q \geq \mathrm{grado}\, p + 2$ e $q(x) \neq 0$, perché altrimenti I non esiste. Si ha

$$I = 2\pi i \sum\nolimits_{+} \mathrm{Res} R,$$

dove $\sum_{+}$ indica che la somma è estesa ai soli poli con parte immaginaria positiva. Si procede come nell'esercizio precedente.

DUE
Se $R = p/q$ è come sopra ma $\operatorname{grado} q = \operatorname{grado} p + 1$, gli integrali

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx$$

non esistono (dimostrare). Per dimostrare che i due integrali esistono in senso improprio e calcolarli si applica il metodo precedente a $f(z) = R(z)e^{iz}$. Peró per provare $|\int_{C_r}| \to 0$ si usa il Lemma di Jordan 10 pag 72. Si ottiene $I_1 + iI_2 = 2\pi i \sum_+ \mathrm{Res} f$ che dá gli integrali richiesti.

Esercizi Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\cos x}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1).$$

TRE
Gli integrali I_1 e I_2 in DUE convergono anche se R ha poli semplici su $\mathbb{R}$ purché siano in punti dove si annulla $\cos x$ o $\sin x$ rispettivamente in modo che l'integrando resti continuo. Allora si isolano questi poli con semidischetti di raggio ε e poi si manda ε a 0 usando l'Esercizio 2.1 a pag 110.

Per esempio per calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi,$$

si pone $f(z) = e^{iz}/z$ e si integra $f(z)dz$ sul bordo della semicorona $\{\varepsilon \le |z| \le r,\, y \ge 0\}$. Come prescrive l'esercizio citato, quando $\varepsilon \to 0$, il semicerchietto interno dá un contributo pari a $-\pi i\,\mathrm{Res}_0 f = \pi$. Per il semicerchio superiore si applica Jordan come nell'esercizio precedente. E qui è finito perché non ci sono altre singolarità.

Esercizi Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \pi\,(1 - 1/e), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\,dx = \pi.$$

QUATTRO
Sia R razionale in due variabili, continua quando queste variano in $[-1,1]$. Con la sostituzione $w = e^{iz}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\cos x, \sin x)\,dx = \int_{|w|=1} \tilde{R}(w)\ dw$$

dove $\tilde{R}$ è un'altra funzione razionale e il secondo integrale si calcola con i residui. Ecco un esempio

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+\sin x}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \qquad a > 1.$$

Si ha

$$I = \int_{|w|=1} \frac{1}{a + \frac{w-w^{-1}}{2i}} \frac{dw}{iw} = 2 \int_{|w|=1} \frac{1}{w^2 + 2iaw - 1} \, dw.$$

L'ultimo integrando ha due poli semplici: $-i(a \pm \sqrt{a^2-1})$ ma solo $-i(a - \sqrt{a^2-1})$ è nel disco $|w| < 1$ e lí il residuo è $\frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}$. Dunque $I = 2 \cdot 2\pi i \, \frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}$.

Esercizi Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x} \, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x} \, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

3.2. Funzioni di e^x e simili. CINQUE

Come già detto, la formula di Green è, a modo suo, un caso particolare del Teorema dei residui. Adesso la usiamo per il calcolo degli integrali di Fresnel che provengono dallo studio della diffrazione.

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Posto $f(z) = e^{iz^2}$, si applica Green a $f(z)dz$ al settore $\{|z| \le r,\, 0 \le y \le x\}$. Sia γ_r l'arco $\{|z| = r,\, 0 \le y \le x\}$. Si ha

$$\int_0^r e^{ix^2} \, dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^r e^{-x^2} \, dx - \int_{\gamma_r} e^{iz^2} \, dz.$$

Volendo passare al limite si stima $\int_{\gamma_r}$ con la sostituzione $z = \sqrt{w}$ (radice principale), w varia nel semipiano superiore e si ha

$$\int_{\gamma_r} e^{iz^2} \, dz = \int_{\Gamma_{r^2}} \frac{e^{iw}}{2\sqrt{w}} \, dw,$$

con $\Gamma_{r^2} = \{|w| = r^2,\, \Im w \ge 0\}$ e questo va a zero per Jordan. Ora, non tutti sanno che $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ [1], ma noi sí.

Per $r \to \infty$ otteniamo gli integrali di questo Fresnel.

SEI

Simile è la situazione in cui si esprima l'integrale incognito mediante uno noto integrando su due rette anziché su due semirette.

Esercizi

1 Dimostrare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx - x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(bx) = \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{b^2}{4}}.$$

[1] $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \frac{d\rho^2}{2} = -\pi[e^{-\rho^2}]_0^{\infty} = \pi.$

(La prima eguaglianza segue dal fatto che la parte immaginaria del primo integrando è una funzione dispari.) Consiglio: Usare la striscia $0 \leq y \leq b/2$.
2 Con lo stesso sistema dimostrare per $0 < a < 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

Usare il rettangolo $\{|x| \leq r,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$ badando al fatto che i due integrali sui tratti verticali vanno a zero per ragioni diverse.
3 Dimostrare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh x}\, dx = \pi.$$

Qui si integra $\frac{zdz}{\cosh z}$ sul bordo del rettangolo di prima. Per $r \to \infty$ i tratti verticali non contribuiscono.

SETTE
Esercizio Ispirandosi all'esercizio precedente si provi che se R è razionale, senza poli sull'asse reale, e se $R(0) = R(+\infty) = 0$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(e^x)\, dx = -\sum{}' \operatorname{Res} f,$$

dove $f(z) = zR(e^z)$ e $\sum'$ indica la somma estesa ai soli poli contenuti in $\{0 < y < 2\pi\}$. Nelle stesse ipotesi si possono calcolare per ricorrenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, R(e^x)\, dx, \qquad m = 0, 1, 2 \ldots.$$

Esercizio Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh x}\, dx = \frac{\pi^2}{2} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sinh^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+\pi^2)\cosh x}\, dx \quad = \quad \frac{4}{\pi} - 1.$$

3.3. Il metodo della fessura.

OTTO
Calcoliamo

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Si usa la discontinuità di $2\pi i$ che ha $\log z = \log|z| + i \arg z$ quando si attraversa $\mathbb{R}^+$ scendendo, con $0 \leq \arg z < 2\pi$. Scriviamo $\log(x - i0) - \log x = 2\pi i$, per $x > 0$.

Sia $f(x)$ l'integrando e $g(z) = f(z)\log z$. Si integra $g(z)dz$ sulla frontiera del disco $\{|z| \leq r\}$ con una fessura come in figura. Sia F_r la fessura. Si ha

$$\int_{F_r} g(z)\,dz = \int_r^0 g(x - i0)\,dx + \int_0^r g(x)\,dx.$$

Da $g(x - i0) - g(x) = 2\pi i\, f(x)$, per $r \gg 1$ segue

$$-2\pi i \int_0^r f(x)\,dx + \int_{C_r} g(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} g,$$

con $C_r = \{|z| = r\}$. Poiché $|\int_{C_r}| \leq C/r$, passando al limite si ottiene l'integrale.

Esercizio
Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \log\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

NOVE
Su $\mathbb{R}^+$ $\log^2 z$ ha discontinuità $-4\pi i\,\log z + 4\pi^2$, verificare. Servirsene come sopra per provare

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,\log 2$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+9}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{6}\,\log 3.$$

DIECI
Su $\mathbb{R}^+$ la funzione $z^c = e^{c\log z}$ ha discontinuità pari a $(e^{c\,2\pi i} - 1)\,x^c$. Servirsene per provare che per $0 < c < 1$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{x^c}{(1+x)^2}\,dx = \frac{c\pi}{\sin c\pi}.$$

UNDICI

Usando la determinazione della radice che è discontinua su $\mathbb{R}^+$ e la conseguente discontinuità di $\sqrt{(z-1)(2-z)}$ sul segmento $(1,2)$ (vedi Esercizio 19 pag 73), si dimostri che si ha

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)(2-x)}}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}.$$

3.4. Impiego dei residui per sommare certe serie. Il Teorema dei residui permette lo studio di serie talvolta difficili da trattare diversamente e di particolare interesse specie in Teoria dei Numeri. Lo mostra per esempio la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia f olomorfa in $\mathbb{C}$ all'infuori di un insieme finito Π di singolarità non intere, cioè $\Pi \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, e si abbia $|f(z)| \leq C/(1+|z|^2)$. Allora si ha*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{a\in\Pi} \cot\pi a \,\mathrm{Res}_a f.$$

Dimostrazione La serie converge perché è $|f(n)| \leq C/n^2$ per $n \neq 0$. Poniamo $g(z) = f(z)\cot\pi z$, cosicché $\mathrm{Res}_n g = f(n)/\pi$. Verificare. Per N ed r grandi, il rettangolo $R(N,r) = \{|x| \leq N + \frac{1}{2},\ |y| \leq r\}$ contiene tutte le singolarità di f. Dal Teorema dei residui si ha

$$I_N \overset{def}{=} \int_{\partial R(N,r)} g(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{1}{\pi} \sum_{|n|\leq N} f(n) + \sum_{a\in\Pi} \cot\pi a \,\mathrm{Res}_a f \right).$$

In particolare l'integrale non dipende da r per $N, r \gg 1$.

Resta da provare $I_N \to 0$ per $N \to \infty$.

Sui tratti orizzontali di $\partial R(N,r)$ si ha $|\cot\pi z| \leq \coth\pi r \leq C$ pe $r \gg 1$, nonché $|f| \leq C/r^2$. Perció questi non contribuiscono al limite. Posto $x_N = \pi(N + \frac{1}{2})$, dall'identitá $\cot(\pm x_N + i\pi y) = \mp \tanh\pi y$ che il lettore è gentilmente pregato di verificare, si ha

$$I_N = -\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x_N + iy) + f(-x_N + iy)]\, \tanh y\, dy + O.$$

O indica una quantitá che va a zero quando $N \to \infty$. Poiché $|[\,\cdot\,]| \leq 2C/(1+y^2)$ che è integrabile, per Lebesgue si puó passare al limite sotto l'integrale. Poiché è anche $|[\,\cdot\,]| \leq 2C/(1+x_N^2)$ che va a zero per $N \to \infty$, $I_N \to 0$ come volevamo. □

DODICI

Esercizi

1 Dimostrare che per $a \neq 0$ si ha

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a.$$

Ricavarne

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2}.$$

Usando $\coth z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}z + \ldots$ ricavare $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2 Dimostrare che per $a \notin \mathbb{Z}$ si ha

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

TREDICI

Quello che si è fatto per le funzioni razionali in DUE e TRE vale in realtá, con le stesse dimostrazioni, per qualunque funzione olomorfa che abbia un comportamento analogo a quelle. Mostriamolo per DUE.

Sia f olomorfa in un in un intorno del semipiano $y \geq 0$ con eccezione di un insieme discreto di singolarità nessuna delle quali sia sull'asse reale. Siano $z_1, \cdots, z_n$ quelle nel semipiano superiore, ordinate in modo che sia $|z_n| \leq |z_{n+1}|$.

Si abbia

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ y\geq 0}} |zf(z)| \;=\; 0.$$

Allora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \;=\; 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Res}_{z_n} f.$$

Dimostrazione. Si integra fdz sulla frontiera $[-r, r] - \Gamma_r$ del semidisco $\{|z| \leq r,\, y \geq 0\}$ (Γ_r è un semicerchio) evitando per r i valori $|z_n|$.

Per le ipotesi fatte $\int_{\Gamma_r} fdz \to 0$ per $r \to \infty$. (Verificare). Dunque

$$\int_{-r}^{r} fdz \;=\; 2\pi i \sum_{|z_k|<r} \mathrm{Res}_{z_k} f \;+\; O,$$

con $O \to 0$ per $R \to \infty$. Si passa al limite per $r \to \infty$. □

Se ad esempio è $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ con $a \neq 0$, b, c reali e $b^2 - 4ac < 0$, applicando la (115) per $z_0 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, otteniamo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

4. Trasformata di Laplace

Di frequente uso nelle applicazioni, specie in elettronica, la Trasformata di Laplace permette uno studio rapido di equazioni differenziali lineari ordinarie o a derivate parziali (del tipo dell'equazione del calore) con dati iniziali. Daremo appena un cenno su questo metodo. Per saperne di piú rimandiamo a qualche manuale di elettronica

A farsi trasformare sono funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle in $(-\infty, 0)$, che abbiano al piú un numero finito di discontinuità in ogni segmento, e soddisfacenti una disuguaglianza del tipo

$$|f(t)| \leq C_\alpha e^{\alpha t}, \tag{116}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'estremo inferiore delle α per cui vale (116) si chiama *indice* di f. Lo spazio vettoriale delle f che hanno indice a si indica con $\mathcal{F}_a$.

Si verifichi che, se $f \in \mathcal{F}_a$ e p è un polinomio, allora $pf \in \mathcal{F}_a$, che se f è nulla in $(-\infty, 0)$ e la derivata n-sima è in $\mathcal{F}_a$, allora $f \in \mathcal{F}_a$, si faccia anche un esempio di $f \in \mathcal{F}_a$ che non soddisfa (116) con a al posto di α.

Definizione:
La *Trasformata di Laplace* di $f \in \mathcal{F}_a$ è la seguente funzione della variabile complessa $z = x + iy$

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt. \tag{117}$$

PROPOSIZIONE 4.1. *Per ogni $\alpha > a$, l'integrale* (117) *converge assolutamente e uniformemente rispetto a z nel semipiano destro $x > \alpha$ dove soddisfa*

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{C_\alpha}{x - \alpha}, \tag{118}$$

per qualunque $\alpha > a$; è derivabile sotto il segno e $\tilde{f}$ è olomorfa nel semipiano $x > a$.

Dimostrazione. Per $x > \alpha$ la disuguaglianza (116) comporta che l'integrando in (117) è maggiorato in modulo da $C_\alpha e^{-(x-\alpha)t}$. Ne segue l'integrabilità e la (118). Fissamo ora β con $a < \beta < \alpha$. Se $x > \alpha$, l'integrando e la sua derivata rispetto a z sono maggiorati rispettivamente da $C_\beta e^{-(\alpha-\beta)t}$ e $t\, C_\beta e^{-(\alpha-\beta)t}$ che sono integrabili in $[0, \infty)$ e indipendenti da z. Si applica dunque il Teorema della convergenza dominata. Derivando sotto il segno rispetto a $\bar{z}$ si ottiene l'olomorfia di f. $\square$

Puó benissimo accadere che $\tilde{f}$ si estenda olomorfa a un aperto piú grande di $x > a$ come vedremo già nel prossimo esempio.

Esempi. 1) La funzione di Heavyside H è definita nulla in $(-\infty, 0)$, e uguale a 1 nel resto di $\mathbb{R}$, dunque $H \in \mathcal{F}_0$. Siamo perció nel semipiano $x > 0$ e si ha $\tilde{H}(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z}$, che è olomorfa in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Per semplificare la notazione, *sempre intenderemo che alla funzione al disotto della tilda è imposto il valore* 0 *sulla semiretta* $(-\infty, 0)$. Ad esempio $\widetilde{\cos t}$ indica la trasformata di quella funzione che è uguale a $\cos t$ per $t \geq 0$ e a 0 per $t < 0$.

2) Calcoliamo la trasformata della funzione $f(t) = t^n$, per $t \geq 0$, $= 0$, per $t < 0$. Poiché $t^n \in \mathcal{F}_0$, dobbiamo lavorare nel semipiano $x > 0$. Integrando per parti la (117) con t^n al posto di $f(t)$, poiché $x > 0$ abbiamo $\widetilde{t^n} = \frac{n}{z}\,\widetilde{t^{n-1}}$. Ma la funzione di Heavyside corrisponde a $n = 0$. Dunque si ha

$$\widetilde{t^n} = \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

La Trasformata di Laplace deve la sua popolarità al garbato comportamento che ha rispetto all'operazione di derivazione, la quale viene tramutata nella moltiplicazione per la variabile indipendente, dando cosí l'illusione di ricondurre ardite equazioni differenziali ad equazioni algebriche inoffensive. Difatti valgono le formule

$$\widetilde{f'}\,(z) = -f(0) + z\tilde{f}(z), \tag{119}$$

$$\tilde{f}'(z) = -\widetilde{tf(t)}(z). \tag{120}$$

Piú precisamente si ha

PROPOSIZIONE 4.2. *Se* $f' \in \mathcal{F}_a$ *e* f *è nulla in* $(-\infty, 0)$, *allora vale la* (119). *Viceversa, se* $f \in \mathcal{F}_a$, *allora la derivata complessa della sua trasformata è la trasformata di* $t \mapsto -tf(t)$.

Dimostrazione. Sia $f' \in \mathcal{F}_a$. Abbiamo già visto che si ha $f \in \mathcal{F}_a$. Restiamo dunque nel semipiano $x > a$. Integrando per parti abbiamo $\widetilde{f'}\,(z) = \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}dt = [f(t)e^{-zt}]_0^\infty + z\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = -f(0) + z\tilde{f}(z)$, cioè la (119). Invece la (120) si ottiene derivando direttamente la (117) sotto il segno. $\square$

Naturalmente le (119) e (120), se iterate, dánno

$$\widetilde{f^{(n)}}\,(z) = z^n\tilde{f}(z) - f(0)\,z^{n-1} - f'(0)z^{n-2}\cdots - f^{(n-2)}(0)\,z - f^{(n-1)}(0), \tag{121}$$

$$\tilde{f}^{(n)}(z) = (-1)^n\,\widetilde{t^n f(t)}(z). \tag{122}$$

Il lettore puó ricavare di nuovo la $\widetilde{t^n} = \frac{n!}{z^{n+1}}$ per ricorrenza da $\tilde{H}(z) = \frac{1}{z}$ e dalla (119).

Esercizi

1. Sia $Z \in \mathbb{C}$ fissato. Si dimostri che si ha

$$\widetilde{e^{Zt}}(z) = \frac{1}{z - Z}, \qquad x > X.$$

2. *Metodo del ritardo.* Siano $f \in \mathcal{F}_a$ e $T \geq 0$ dati. Si consideri la funzione $f_T(t) = f(t - T)$ detta *funzione ritardata*. Il grafico di f_T si ottiene spostando a destra quello di f di una lunghezza pari a T. In particolare è $f_T(t) = 0$, per $t < T$. Si provi che si ha

$$\widetilde{f_T}(z) = e^{-Tz}\,\tilde{f}(z).$$

3. *Funzioni periodiche.* Sia f nulla in $(-\infty, 0)$, continua a tratti e periodica di periodo $T > 0$ in $[0, +\infty)$, f^0 sia la funzione uguale ad f in $[0, T)$, nulla fuori di $[0, T)$. Provare che è $f \in \mathcal{F}_0$ e che si ha

$$\tilde{f}(z) = \frac{\widetilde{f^0}(z)}{1 - e^{-Tz}}.$$

(Usare la relazione $f_T + f^0 = f$ dovuta alla periodicitá).

4. Si calcoli la trasformata di $f(t) = \sin \omega t$ per $t \geq 0$, $= 0$, per $t < 0$.
(Si puó usare l'esercizio 1, oppure osservare che da $f'' = -\omega^2 f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \omega$ segue $-\omega + z^2 \tilde{f}(z) = -\omega^2 \tilde{f}(z)$). Stessa cosa per il coseno. Le due trasformate sono $\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$ e $\frac{z}{z^2+\omega^2}$.

5. Si calcoli la trasformata della funzione g uguale a $\sin \omega t$ in $[0, \pi/\omega]$, nulla altrimenti.
(Si puó usare il Teorema del ritardo osservando che, se f è la funzione dell'esercizio precedente, si ha $g = f + f_{\pi/\omega}$). Viene $\tilde{g}(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}(1 + e^{-\frac{\pi}{\omega} z})$.

Applichiamo ora la Trasformata alla soluzione di qualche problema differenziale.

Un problema differenziale del tipo $a_n f^{(n)} + \ldots a_1 f' + a_0 f = g$, $f(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ viene ricondotto mediante le (121) e (122) a risolvere $\tilde{f} = \tilde{g}/p$ con $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, verificare. Per questo serve di saper *antitrasformare*.

C'è da trovare insomma la f che abbia per trasformata una funzione u assegnata, olomorfa in un semipiano destro e soddisfacente una condizione del tipo (118).

Ci limiteremo ad un caso molto semplice.

TEOREMA 4.1. *Sia u una funzione olomorfa in $\{|z| > R\}$, nulla all'infinito. Cioè del tipo*

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},$$

con $\overline{\lim} |c_n|^{1/n} \leq R$ (vedi (i) pag 105).
u è la trasformata di Laplace di

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \tag{123}$$

f è la restrizione a $\mathbb{R}^+$ di una funzione intera, ed ha indice $\leq R$.

Dimostrazione La funzione $\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{(n-1)!} \zeta^{n-1}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, è intera perché $\overline{\lim} |c_n|^{1/n} \leq R$ e $\lim((n-1)!)^{1/n} = \infty$. f ne è la restrizione per $\zeta = t \in \mathbb{R}^+$.

Mostriamo ora che per ogni $r > R$ esiste un polinomio $p_r(t)$ tale che l'N-sima somma parziale f_N della serie che definisce f, e quindi f stessa, soddisfi la diseguaglianza

$$|f_N(t)| \leq |p_r(t)| + e^{r|t|}.$$

Difatti, per le proprietá del $\overline{\lim}$, esiste ν dipendente da r tale che si abbia $|c_n| \leq r^n$ per $n \geq \nu$. Suddividiamo la somma che definisce f_N cosí: $\sum_1^N = \sum_1^\nu + \sum_{\nu+1}^N$. La prima somma è il polinomio p_r mentre la seconda è maggiorata in modulo da $\sum_{\nu+1}^N \frac{r^n}{(n-1)!}|t|^{n-1} \leq \sum_1^\infty \frac{r^n}{(n-1)!}|t|^{n-1} = re^{r|t|}$. Questo prova la diseguaglianza.
Poiché $|p_r(t)| + e^{r|t|}$ ha indice r (verificare) ed $r > R$ è arbitrario, f ha indice $\leq R$.

Resta da provare $u = \tilde{f}$.
Abbiamo visto che, per $n \geq 1$ si ha $\frac{(n-1)!}{z^n} = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-zt}dt$ e dunque

$$\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{z^n} = \int_0^\infty (\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1})e^{-zt}dt.$$

È sufficiente provare che, per z fissato con $x > R$, si puó effettuare $\lim_{N\to\infty}$ sotto l'integrale perché la parentesi tonda è f_N, e quindi tende ad f, e il primo membro tende a $u(z)$.
Fissiamo r con $x > r > R$. Dalla diseguaglianza che abbiamo dimostrato segue che l'integrando è maggiorato in modulo da $|p_r(t)|e^{-xt} + e^{-(x-r)t}$ che è in L^1 perché x e $x - r$ sono positivi, e non dipende da N. Per il Teorema della convergenza dominata lo scambio tra $\lim_{N\to\infty}$ e $\int_0^\infty$ si puó dunque effettuare. $\square$

Esempio Cerchiamo $f \in \mathcal{F}_a$ tale che sia $\tilde{f}(z) = u(z) \equiv \frac{3z+1}{z^2-1}$.
Integrando in dz la relazione $u(z)\,z^n = c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n + \frac{c_{n+1}}{z} + \cdots$ si ha $c_{n+1} = \Sigma\,\mathrm{Residui}(uz^n) = 2 + (-1)^n$. Da (123) segue allora $f(t) = \sum_0^\infty \frac{2+(-1)^n}{n!} t^n = 2e^t + e^{-t}$, come si puó verificare anche osservando che è $\frac{3z+1}{z^2-1} = \frac{2}{z-1} + \frac{1}{1+z}$ ed applicando l'esercizio 1.

Ma in queste situazioni conviene servirsi del fatto seguente

Osservazione 4.1. *Se u è olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne un numero finito di singolarità a_j e se si ha $u(\infty) = 0$, allora vale la semplice formula*

$$f(t) = \Sigma_j\, \textit{Res}_{a_j}(u\,e^{tz}), \quad t \geq 0.$$

Difatti, scelto R in modo che tutte le a_j siano in D_R, per le proprietá sopra viste di queste serie, si ha $\Sigma_j\,\mathrm{Res}_{a_j}(u\,e^{tz}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} u(z)e^{tz}dz$=
=$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 1} c_n \int_{|z|=R} z^{-n}e^{tz}dz = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(n-1)!} D_z^{n-1}(e^{tz})_{z=0} = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n t^{n-1}}{(n-1)!} = f(t)$, per ogni $t \geq 0$. Quest'ultima deriva dalla (123).

Esercizi.
1. Dimostrare che nelle ipotesi dell'osservazione precedente si ha $f \in \mathcal{F}_a$, con $a = \sup(\Re a_j)$.
2. Trovare la funzione $f \in \mathcal{F}_a$ che ha per trasformata $\frac{1}{z(z-1)(z^2+4)}$ e calcolare anche a. ($f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}cos2t - \frac{1}{10}\sin 2t$ per $t \geq 0$, $= 0$ per $t < 0$, $a = 1$).
3. Trovare la funzione $f \in \mathcal{F}_a$ che ha per trasformata $\frac{1}{(z^2+1)^2}$. ($\frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, $a = 0$).
4. Risolvere l'equazione differenziale $f'(t) + f(t) = e^{-t}$ con la condizione iniziale $f(0) = 0$, usando la trasformata di Laplace.

Soluzione: Passsando alle trasformate si ha $z\tilde{f}(z) + \tilde{f}(z) = \frac{1}{z+1}$, donde $\tilde{f}(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Dunque $f(t) = \text{Res}_{-1}\frac{e^{tz}}{(z+1)^2} = (\frac{\partial e^{tz}}{\partial z})_{z=-1} = t\,e^{-t}$ per $t \geq 0$, $= 0$ per $t < 0$.

5. Risolvere l'equazione differenziale $f'''(t) + f'(t) = t$ con la condizione iniziale $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 0$ usando la trasformata di Laplace.

Soluzione: Passsando alle trasformate si ha $z^3\tilde{f}(z) + z + z\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}$. Perció $f(t) = \Sigma\text{Res}[e^{tz}\frac{1-z^3}{z^3(z^2+1)}] = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t - \sin t$.

6. Risolvere le seguenti equazioni differenziali con i dati iniziali indicati
$f'' + 2f' - 3f = e^{-t},\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$ Sol. $(3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t})/8.$
$f''' + f'' = \sin t,\ f(0) = f'(0) = 1,\ f''(0) = 0.$ Sol. $2t + (e^{-t} + \cos t - \sin t)/2.$
$f'' + f' = t,\ f(1) = f'(1) = 1.$ (Porre $g(t) = f(t+1)$, trovare g e poi sostituire). Sol. $1 + (t-1)^2/2.$

5. Funzioni meromorfe, Principio dell'argomento

Una funzione olomorfa f in un aperto $A \subset \mathbb{C}$, con l'eccezione di un insieme discreto di poli si chiama *funzione meromorfa*.

Ad esempio, poiché gli zeri di una funzione olomorfa $h \neq 0$ formano un insieme discreto, se anche g è olomorfa in A, allora g/h è una funzione meromorfa in A.

Anzi, si puó dinostrare che ogni funzione meromorfa in un aperto è di questo tipo.

Se f è meromorfa allora tale è anche $1/f$ (dimostrare). L'insieme delle funzioni meromorfe è un *corpo* (o *campo*) mentre $\mathcal{O}(A)$ è solo un anello. Si dimostri che anche f' è meromorfa ed ha gli stessi poli di f.
Si puó attribuire ad f il valore ∞ nei poli. Allora $f(a) = \infty$ significa che a è un polo di f.

Poli e zeri di una funzione meromorfa possono essere infiniti perché possono accumularsi all'∞ o alla frontiera di A.
Ad esempio $1/\sin z$ è meromorfa in $\mathbb{C}$ ma ha infiniti poli. $\sin z/z^n$ ha infiniti zeri e un solo polo in 0 d'ordine $n-1$, se $n > 1$. Se $n = 1$ è olomorfa. (Dimostrare).

Per quanto si è detto anche f'/f è meromorfa e visto che in un aperto dove f ha un logaritmo, la derivata di questo è f'/f, è ragionevole che questa funzione si chiami *derivata logaritmica* di f.

La seguente proposizione mostra come lo studio di f'/f dia informazioni sulle singolarità di f.

PROPOSIZIONE 5.1. *Sia f è meromorfa.* (i) *I poli di f'/f sono tutti semplici e il loro insieme coincide con quello dei poli e degli zeri di f,*
(ii) *Se a è uno zero d'ordine m per f, allora f'/f ha un polo in a con residuo m,*
(iii) *Se a è un polo d'ordine m per f, allora f'/f ha un polo in a con residuo $-m$.*

Dimostrazione. Useremo costantemente la Proposizione 2.1 a pag. 107 e la Proposizione 2.1 a pag.95.

Ogni polo di f'/f è o uno zero o un polo di f perché dove $f \neq 0$ e f è olomorfa, anche f'/f è olomorfa.

Useremo l'identitá $\frac{(gh)'}{gh} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h}$. Per semplicitá supponiamo $a = 0$. Nel caso (ii) si ha $f = z^m u$ con $u(0) \neq 0$. Dunque $f'/f = m/z + u'/u$. u'/u è olomorfa perché $u(0) \neq 0$ e dunque f'/f ha un polo semplice in 0 con residuo m. Perfettamente analogo è il caso (iii) ma con $-m$ al posto di m. □

Poli, zeri e derivata logaritmica sono legati dalla relazione che ora stabiliamo.

Sia f meromorfa in A, la frontiera di $\Omega \subset\subset A$ sia C^1 a tratti e non contenga né zeri né poli di f.

Gli zeri di f in Ω siano $a_1, \dots, a_n$ di molteplicitá rispettive $m_1, \dots m_n$ e i poli in Ω siano invece $b_1, \dots, b_p$, di molteplicitá rispettive $\mu_1, \dots \mu_p$, cosicché, tenendo conto delle molteplicitá, gli zeri sono in numero di $N = \sum_{j=1}^n m_j$ e i poli in numero di $P = \sum_{h=1}^p \mu_h$.

TEOREMA 5.1. (Principio del'Argomento.) *Si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f} = N - P. \tag{124}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente abbiamo $m_j = \mathrm{Res}_{a_j}\frac{f'}{f}$, $-\mu_h = \mathrm{Res}_{b_h}\frac{f'}{f}$. Applicando il Teorema dei residui a f'/f abbiamo allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f} = \sum_{j=1}^{n} m_j - \sum_{h=1}^{p} \mu_h = N - P.$$

□

Nel caso in cui la frontiera di Ω consti di un solo contorno Γ, il significato geometrico d questo teorema è chiarito dal concetto di indice d'avvolgimento (60) pag.68: $N - P$ è il numero di giri (con segno) che compie $f(z)$ attorno a 0 mentre z percorre una volta Γ in verso positivo.

Per esempio nel caso in cui f sia olomorfa (dunque $P = 0$) in un aperto Ω limitato da un solo contorno Γ, continua fin su Γ. Se f non assume il valore a su Γ allora possiamo dire che *il numero $N(a)$ delle soluzioni dell'equazione*

$$f(z) = a, \qquad z \in \Omega$$

è pari al numero di giri che compie $f(z)$ attorno ad a quando z fa un giro di Γ.

Cioè

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{df}{f - a} = n_{f\Gamma}(a).$$

Lasciamo al lettore di dimostrare che nel teorema precedente ci si puó liberare dell'aperto A. Basta supporre $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e restringere poi di poco Ω in modo da ricondursi al caso già dimostrato. È un procedimento già usato mille volte in questi appunti.

Esercizio 5.1. Una funzione u meromorfa in $\mathbb{C}$ che ha limite non nullo all'∞ ($u(\infty) \neq 0$ e $\neq \infty$), ha lo stesso numero di zeri e di poli.
Consiglio. Per $|z| > R$, con $R \gg 1$, si ha $|u(z) - u(\infty)| < |u(\infty)|/2$. Dunque $u\Gamma_R$ non puó girare attorno all'origine. Del resto zeri e poli sono tutti all'interno di Γ_R.

Esercizio 5.2. Sia f meromorfa in un aperto limitato, con frontiera C^1 a tratti A, sia continua fin su ∂A ed abbia m poli in A. Sia a un numero complesso che soddisfa $|a| > \sup_{\partial A} |f|$. Dimostrare che la funzione meromorfa $f - a$ ha m zeri in A.

CHAPTER 10

Geometria delle funzioni olomorfe.

I risultati del paragrafo 5 che collegano la risolubilità di una equazione $f(z) = a$ a proprietá topologiche di f, possono permettere di deformare la f pur mantenendo immutato $N(a)$, per riportarsi ad un'equazione piú conveniente.

Per quanto visto, il numero delle soluzioni resta invariato.
Di questo metodo topologico, detto *tecnica d'omotopia*, è un esempio il prossimo teorema.

Un'*Omotopia di funzioni olomorfe in* A è una famiglia continua f_t, $t \in [0,1]$, di funzioni $f_t \in \mathcal{O}(A)$. Dunque l'applicazione $(z,t) \mapsto f_t(z)$, da $[0,1] \times A$ a $\mathbb{C}$, è supposta continua.

Supponiamo che per nessun $t \in [0,1]$ il punto a appartenga a $f_t\partial\Omega$. Cosicché le curve $f_0\partial\Omega$ e $f_1\partial\Omega$ sono omotope in $A\backslash\{a\}$. Per l'invarianza omotopica dell'indice d'avvolgimento stabilita con l'Osservazione 3.1 a pag 68 (ii), e per quanto visto appunto in 5, possiamo dunque enunciare il seguente

TEOREMA 0.2. (Teorema d'omotopia.) *L'aperto $\Omega \subset\subset A$ abbia frontiera C^1 a tratti. Sia f_t, $t \in [0,1]$, un'omotopia di funzioni olomorfe in A come sopra precisato.*

Se $a \notin f_t\partial\Omega, \forall t \in [0,1]$, allora le due equazioni

$$f_0(z) \;=\; a, \quad f_1(z) \;=\; a$$

hanno lo stesso numero di soluzioni in Ω.

Esercizio 0.3. Sia $w = f(z)$ olomorfa in A, continua in $\overline{A}$, e sia $a(t)$ una curva continua nel piano w che non incontra ∂A. Allora le equazioni $f(z) = a(0)$ e $f(z) = a(1)$ hanno lo stesso numero di soluzioni. (Applicare il teorema precedente a $f_t = f - a(t)$).

Mediante il Teorema d'omotopia si puó dimostrare di nuovo il Teorema fondamentale dell'Algebra ottenendo anche immediatamente l'esistenza di n radici per un polinomio di grado n, senza far ricorso al Teorema di Ruffini.
Si puó pensare a un polinomio del tipo $p(z) = z^n + q(z)$ dove q ha grado $< n$.

Poiché

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|q(z)|}{|z|^n} \;=\; 0,$$

si ha $|q(z)| < \frac{1}{2}|z|^n$ per $|z| \geq R$, se si sceglie $R \gg 1$.

Applichiamo il Teorema d'omotopia nel disco $D_R \equiv \{|z| < R\}$ a $p_t(z) = z^n + tq(z)$, osservando che, per $|z| = R$, si ha $|p_t(z)| \geq R^n - |q(z)| \geq \frac{1}{2}R^n > 0$.

Si ha dunque $0 \notin p_t\Gamma_R, \; \forall t \in [0,1]$. Siamo perció nelle ipotesi del Teorema d'omotopia.

Poiché $p_0(z) \equiv z^n = 0$ ha n soluzioni, allora anche $p_1(z) \equiv p(z) = 0$ ne ha n. $\square$

Un altro utile strumento fornito dal Teorema d'omotopia è il seguente teorema.

TEOREMA 0.3. (Teorema di Rouché) *Siano A e Ω come nel teorema precedente, g ed h siano olomorfe in A e si abbia $|g| > |h|$ su $\partial\Omega$. Allora g e $g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω.*

Dimostrazione. $f_t(z) \stackrel{def}{=} g(z) + th(z)$ non si annulla per $z \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$ perché $f_t = 0 \Rightarrow |g| = t|h| \leq |h|$.

Concludiamo che si ha $0 \notin f_t\partial\Omega,\ \forall t \in [0, 1]$. Per il Teorema d'omotopia $f_0 = g$ e $f_1 = g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in Ω. $\square$

Esempio 0.1. Le cinque radici del polinomio $p(z) = z^5 + 15z + 1$ hanno modulo < 2 ma una sola di esse ha modulo < 1.

Difatti, per $|z| = 2$ si ha $|15z + 1| \leq 31$, $|z|^5 = 32$ perció $p(z) = (z^5) + (15z + 1)$ ha in $|z| < 2$ lo stesso numero di radici di z^5 e quindi tutte le radici di p hanno modulo < 2.

Una sola di esse ha modulo < 1. Difatti, per $|z| = 1$ è $|15z| = 15$, $|z^5 + 1| \leq 2$ allora $p(z) = (15z) + (z^5 + 1)$ ha, per $|z| < 1$, tante radici quante ne ha $15z$, cioè una.

Osservazione. Al teorema di omotopia e a quello di Rouché si puó dare una formulazione piú semplice e generale usando il fatto che per ogni compatto $K \subset A$, esiste un aperto Ω con frontiera C^1 a tratti tale che $K \subset \Omega \subset\subset A$, cioè l'esercizio 1.1 a pag 61. Il Teorema d'omotopia diventa:
Se A è limitato, le f_t sono in $\mathcal{O}(A) \cap C^0(\overline{A})$, $f_t(z)$ è continua per $(z, t) \in \overline{A} \times [0, 1]$ e f_t non si annulla in nessun punto di ∂A per nessun $t \in [0, 1]$, allora $f_0(z) = a$ e $f_1(z) = a$ hanno lo stesso numero di soluzioni in A.

Invece il Teorema di Rouché diventa: *Se A è limitato, g ed h sono in $\mathcal{O}(A) \cap C^0(\overline{A})$ e si ha $|g| > |h|$ su ∂A, allora g e $g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in A.* In entrambi i casi non importa come è fatta la frontiera di A.

Lasciamo al lettore di perfezionare i due teoremi in questo modo.

Un'applicazione di un certo rilievo del Teorema di Rouché è il prossimo Teorema. Con esso si intende evidenziare che la collocazione e l'esistenza degli zeri di una funzione olomorfa dipende con continuità dalla funzione stessa.

Questo non accade nel caso reale: per esempio le funzioni $x^2 + y^2 + 1/n$ tendono uniformemente a $x^2 + y^2$ ma questa ha uno zero mentre quelle no.
Invece nel caso olomorfo questo non puó accadere a meno che la funzione limite non sia identicamente nulla come nel caso $f_n = 1/n$.

TEOREMA 0.4. (Hurwitz) *Sia f_n una successione di funzioni olomorfe nello aperto A, convergente uniformemente sui compatti a $f \in \mathcal{O}(A)$ non identicamente nulla. Se f si annulla in un punto $a \in A$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$, f_n si annulla in un punto di $|z - a| < \varepsilon$ per $n \gg 1$.*

Dimostrazione a è necessariamente uno zero isolato di f. Dunque $f(z) \neq 0$ per $0 < |z-a| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. Pertanto $m \equiv \min_{|z-a|=\varepsilon} |f| > 0$. Ma $f_n \to f$ uniformemente in $\{|z-a| = \varepsilon\}$, quindi $\max_{|z-a|=\varepsilon} |f_n - f| < m$ per $n \gg 1$. Applichiamo Rouché alle due funzioni f e $f - f_n$. In $\{|z-a| = \varepsilon\}$ è $|f| \geq m > |f_n - f|$ e dunque $f_n = f + (f_n - f)$ ed f hanno lo stesso numero di zeri in $|z-a| < \varepsilon$. □

Esercizio Sia A connesso e $\mathcal{O}(A) \ni g_n \to g$ uniformemente sui compatti. Se le g_n sono iniettive allora anche g è iniettiva oppure costante. Usare Hurwitz.

Mediante il Teorema di Rouché si puó dare una descrizione completa del comportamento locale di una funzione olomorfa.

TEOREMA 0.5. *Sia a un punto dell'aperto A nel quale f è olomorfa ed ha molteplicitá m. Sia $b = f(a)$ la sua immagine. I punti a e b sono centri di dischi $D \subset A$ e $D' \subset fA$ con queste proprietá:*

- (i) *Il valore b non è assunto da f in punti di D diversi da a.*
- (ii) *Ogni valore $w \in D'$ diverso da b è assunto in D esattamente in m punti distinti, con molteplicitá 1.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $b = 0$. Per la (103) a pagina 95 abbiamo

$$f(z) \; = \; (z-a)^m \, u(z), \tag{125}$$

con $u \in \mathcal{O}(A)$, $u(a) \neq 0$ e $m \geq 1$.
Dobbiamo scegliere opportunamente i raggi r di D e R di D'.

Poiché u è continua e gli zeri di f' sono isolati, possiamo scegliere $r > 0$ tale che in D si abbia $|u(z)| > |u(a)|/2$ e $f' \neq 0$ in $D \backslash \{a\}$.

Poniamo $R = r^m \frac{|u(a)|}{2}$.

(i) segue immediatamente dalla (125) perché è $u \neq 0$ in D.

Per $z \in \partial D$ e $w \in D' \backslash \{0\}$ si ha $|f(z)| \geq r^n \frac{|u(a)|}{2} = R > |-w|$. Applicando il Teorema di Rouché a $f(z)$ e alla funzione costante $-w$, concludiamo che $f(z) - w$ e $f(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in D e poiché $f(z)$ ha solo uno zero m-plo, $f(z) - w$ ha m zeri.

Questi ultimi sono semplici perché $f' \neq 0$ in $D \backslash \{a\}$ e pertanto essi son in numero di m. □

COROLLARIO 0.1. *Le funzioni olomorfe mandano aperti in aperti.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema precedente. Infatti ogni $b = f(a) \in fA$ è centro di un disco $D' \subset fA$. □

1. Esercizi

1 Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$f(z) = z^3 + 3z + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} = 0$$

in ciascuna delle corone $n \leq |z| < n+1$.
Soluzione $g(z) = zf(z)$ non si annulla in 0, e in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ è $z \neq 0$. Quindi $f = 0$ ha tante soluzioni quante ne ha $g(z) = z^4 + 3z^2 + \frac{z}{2} + 1 = 0$. Per $|z| = 2$ domina z^4. Quindi le quattro radici sono in $|z| < 2$. Per $|z| = 1$ domina $3z^2$. Dunque due delle quattro radici sono in $|z| < 1$.

2 Dire quante soluzioni con parte reale positiva ha l'equazione

$$p(z) = z^7 - 2z + 5 = 0.$$

Soluzione Per $R \gg 1$ il semidisco $S_R = \{|z| \leq R,\, x \geq 0\}$ contiene tutte le radici con parte reale positiva. Si applica il principio dell'argomento a p in questo semidisco, mandando poi R all'infinito. Il numero cercato è pari al numero di giri compiuto da $w = p(z)$ mentre z percorre ∂S_R. Lungo il segmento abbiamo $w = 5 - i(t^7 + 2t)$ e t va da $+\infty$ a $-\infty$. La retta verticale $\Re w = 5$ è dunque percorsa in senso ascendente è fa perció $1/2$ giro attorno a 0. Lungo il semicerchio è $w = R^7 e^{i7t} - 2Re^{it} + 5$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Se $R \gg 1$ questa è omotopa a $w = R^7 e^{i7t}$ che fa $7/2$ giri. In conclusione le radici cercate sono in numero di $1/2 + 7/2 = 4$.

3 Dire quante soluzioni con parte reale positiva ha l'equazione

$$z = r - e^{-z}, \qquad r > 1$$

e dire quante di esse sono reali.
Soluzione Procedendo come prima, si applica il Teoreme di Rouché nel semidisco $S_R = \{|z| \leq R,\, x \geq 0\}$ alle due funzioni $z-r$ e e^{-z}. Su ∂S_R è $|z-r| \geq r$ se $R > 2r$. Invece sul semicerchio è $|e^{-z}| = e^{-x}e^{-R\cos\theta} \leq 1 < r$, perché $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, e sul tratto verticale $|e^{-z}| = e^{-iy} = 1 < r$. Dunque $|z-r| > |e^{-z}|$ su ∂S_R. Le soluzioni cercate sono allora tante quante quelle di $z - r = 0$ cioè una. Chiamiamola a. Poiché $\overline{a} - r + e^{-\overline{a}} = \overline{a - r + e^{-a}} = 0$, anche $\overline{a}$ è soluzione con $\Re a > 0$. Dovendocene essere una sola si ha $\overline{a} = a$, cioè $a \in \mathbb{R}$. C'è dunque una sola soluzione con parte reale positiva ed essa è reale.

CHAPTER 11

L'operatore di Laplace

1. Funzioni armoniche

1.1. Generalitá. Siano u una funzione reale, C^1 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset\subset \Omega$ un aperto liscio, ν il versore normale alla frontiera ∂A in un suo punto p, uscente da A.

La derivata direzionale

$$u_\nu = \mathrm{grad} u \, \cdot \, \nu$$

in p rappresenta la voglia di crescere che ha $u(x)$ quando x esce da A passando per p. La media su ∂A di questa voglia è

$$\frac{1}{\mathrm{mis}\, \partial A} \int (\mathrm{grad} u \, \cdot \, \nu) \, d\sigma. \tag{126}$$

Armoniche sono quelle funzioni u per le quali questa *voglia media* è zero per ogni A del tipo considerato.

Ci aspettiamo che queste funzioni non possano assumere un massimo relativo in alcun punto a di Ω perché lí vicino $u(x)$ avrebbe voglia di calare quando x si allontana da a in qualunque direzione e dunque l'integrale (126) sarebbe < 0 se esteso a una sferetta centrata in a. Lo stesso per i minimi. Ma questa non è una dimostrazione.

Se u è C^2 l'integrale (126) si puó trasformare in un integrale esteso ad A mediante il Teorema della Divergenza: poniamo $\Delta u = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad} u)$ cioè

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

La condizione di armonicitá diventa allora $\int_A \Delta u \, dx_1 \cdots dx_n = 0$ per ogni A del nostro tipo, e dunque

$$\Delta u = 0 \tag{127}$$

in tutto Ω.

Definizione: u dicesi *armonica* se è C^2 e soddisfa l'equazione differenziale (127).L'equazione (127) si chiame *equazione di Laplace*, e l'operatore Δ *Laplaciano*.

Veniamo ora al caso di due variabili identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, cosicché si ha $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 4u_{z\bar{z}}$, verificare la seconda eguaglianza.
Pertanto u *è armonica se e solo se* u_z *è olomorfa*. Ne deriva che

Una funzione armonica non è soltanto C^2 ma addirittura C^∞

perché $u_x/2$ e $-u_y/2$, in quanto parti reale e immaginaria di u_z, sono C^∞.

Inoltre

Se u è armonica e f è olomorfa, allora anche $u \circ f$ è armonica.

Difatti, ricordando che si ha $(\overline{g})_z = \overline{g_{\bar{z}}}$, abbiamo $(u \circ f)_z = u_z f_z + u_{\bar{z}}(\overline{f})_z = u_z f'$ che è il prodotto di due funzioni olomorfe.

Sia v un'altra funzione reale C^2. La condizione che $u + iv$ sia una funzione olomorfa è data dall'equazione di Cauchy-Riemann

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_x & = v_y \\ u_y & = -v_x \end{array} \right. . \tag{CR}$$

Derivando la prima rispetto ad x, la seconda rispetto a y e sommando otteniamo che u è armonica. Lo stesso per v. Due funzioni armoniche legate da (CR) si dicono coniugate. Peró se v è coniugata di u, allora u è coniugata non di v ma di $-v$. Insomma, dire che v è coniugata di u è come dire che $u + iv$ è olomorfa. Se Ω è connesso allora due coniugate di una stessa funzione differiscono per una costante (verificare). In tutti i modi abbiamo:

Parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche coniugate.

Per $u \in C^1$ definiamo

$$d^c u = -u_y \, dx + u_x \, dy = \frac{1}{i} (u_z \, dz - u_{\bar{z}} \, d\bar{z})$$

(verificare la seconda uguaglianza), cosicché (CR) è equivalente a

$$d^c u = dv. \tag{CR$'$}$$

Quindi, data $u \in C^2(\Omega)$, abbiamo

$$\begin{array}{lll} d^c u \text{ chiusa} & \Leftrightarrow & \text{u armonica} \\ d^c u \text{ esatta} & \Leftrightarrow & \text{u= p. reale di f. olomorfa.} \end{array} \tag{128}$$

La prima deriva dal fatto che, se α e β sono C^1, $\alpha dx + \beta dy$ è chiusa se e solo se $\alpha_y = \beta_x$, e la seconda da $(\mathrm{CR})'$.
Da (128) si possono ricavare un sacco di cose. Ecco intanto la prima.

Ogni funzione armonica in un aperto semplicemente connesso Ω ha un'armonica coniugata in Ω, cioè essa è la parte reale di una funzione olomorfa.

Difatti la semplice connessione permette di affermare $d^c u$ chiusa $\Rightarrow$ $d^c u$ esatta.
Eccone un'altra:

1.2. Principio del minimax. *Se u è armonica in Ω connesso e c'è un punto $a \in \Omega$ tale da aversi $u \leq u(a)$ (oppure $u \geq u(a)$) in un intorno di a, allora u è costante.*

Come nel caso delle funzioni olomorfe questo si puó enunciare anche cosí:
Se Ω è connesso e limitato e u, oltre che armonica e non costante in Ω è anche continua in $\overline{\Omega}$, allora $\max_{\overline{\Omega}} u$ e $\min_{\overline{\Omega}} u$ sono assunti solo alla frontiera $\partial\Omega$.

Dimostri il lettore l'equivalenza di questi due ultimi enunciati e anche questo fatto: "Se Ω è connesso allora per ogni a e b in Ω, c'è un aperto $A \subset \Omega$ semplicemente connesso che li contiene entrambi" (congiungere a e b con un cammino e poi incicciottirlo poco poco).

Dimostrazione del minimax. Proviamo solo il primo enunciato. Basta occuparsi del solo caso '$\leq$' perché tanto anche $-u$ è armonica.
Scelgo $b \in \Omega$ arbitrario. Devo dimostrare che se $u \leq u(a)$ vicino ad a, allora $u(a) = u(b)$. Prendiamo un aperto semplicemente connesso $A \subset \Omega$ che contiene sia a che b. Per quanto visto nel precedente paragrafo, in A ho $u = \Re f$, con $f \in \mathcal{O}(A)$. Per ogni z in un intorno di a ho $|e^{f(z)}| = e^{u(z)} \leq e^{u(a)} = |e^{f(a)}|$. Per il principio del massimo modulo applicato a $e^f \in \mathcal{O}(A)$ ho che e^f è costante in A, e quindi f è costante (mod $2\pi i$), perció è costante perché è continua ed A è connesso. Ne segue $u(a) = \Re f(a) = \Re f(b) = u(b)$ come volevasi. $\square$

Teorema della media per le funzioni armoniche.

Lasciamo al lettore di dimostrare il seguente fatto:
Se u è armonica nel disco di centro a e raggio R, allora per ogni $0 < r < R$ si ha

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|<r} u(z)\, dx\, dy.$$

(basta usare la semplice connessione del disco e poi il Teorema della media per le funzioni olomorfe).

La regolarità C^∞ delle funzioni armoniche, come anche il minimax e il teorema della media sono validi in qualunque dimensione. Interessante è il fatto che il Teorema della media *caratterizza* le funzioni armoniche, cioè: se u è continua in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e la media di u su ogni sfera (o, a scelta, ogni palla) contenuta in Ω, è uguale al valore di u nel centro, allora u è armonica in Ω. Non solo, mi voglio rovinare, si puó rinunciare perfino alla continuità e supporre che u sia L^1_{loc} (cioè misurabile e $\int_K |u| < +\infty$, $\forall K \subset \Omega$ compatto).

Invece dimostriamo, come promesso, questo fatto:

Se ogni funzione armonica in Ω è la parte reale di una funzione olomorfa in Ω, allora Ω è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che Ω abbia un buco B. Per la (128) basterá trovare una $u \in C^2(\Omega)$ tale che $d^c u$ sia chiusa ma non esatta in Ω. Per comoditá supponiamo che lo zero stia nel buco. Allora scegliamo $u = \mathrm{Log}|z|^2$. Questa va bene perchè si ha

$$d^c(\mathrm{Log}|z|^2) = 2\, d\theta$$

che è chiusa. L'ultima relazione si ottiene sostituendo $u = |z|^2$ e $dz = \frac{z}{|z|} d|z| + iz\, d\theta$ nella seconda espressione di $d^c u$. Ció dá $d^c|z|^2 = 2\,|z|^2\, d\theta$. Inoltre, per ipotesi, Ω contiene un contorno Γ che gira attorno a 0 perché 0 sta in un buco. Perció $\int_\Gamma d\,\theta = 2\pi \neq 0$. Pertanto $d\theta$, che sappiamo essere chiusa in tutto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, non è esatta in Ω. $\square$

2. Formula di Poisson, problema di Dirichlet per Δ

Adesso troveremo una formula (Formula di Poisson) che esprime una funzione armonica nel disco D continua fino al bordo Γ mediante un integrale che coinvolge soltanto la traccia su Γ della funzione. Successivamente proveremo (Teorema di Schwartz) che, viceversa, introducendo in quell'integrale una funzione continua su Γ, lui produce una funzione che è armonica in D e su Γ coincide con la funzione assegnata in origine.

Per comoditá ci riferiremo al disco unitario $D = \{|z| < 1\}$. Useremo gli automorfismi di D. Fissiamo $z \in D$ e prendiamo un automorfismo $w = T(\zeta)$ che mandi z in 0:

$$T(\zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}.$$

Ricordiamo che T manda il cerchio unitario in se stesso. Sia $\zeta = S(w)$ il suo inverso, dunque $S(0) = z$. $u \circ S$ è armonica perché S è olomorfa. Dal teorema della media delle funzioni armoniche applicato a $u \circ S$ abbiamo

$$u(z) = (u \circ S)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (u \circ S)(w)\, \frac{dw}{iw} = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u(\zeta) \left(\frac{T'(\zeta)}{T(\zeta)}\, \zeta \right)\, d\theta.$$

L'ultima uguaglianza è ottenuta con la sostituzione $w = T(\zeta)$ nell'integrale, e poi si è posto $\zeta = e^{i\theta}$ e quindi $d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$, verificare. Dall'espressione di T si ha allora con un facile calcolo la *Formula di Poisson*

(129) $$u(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) u(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = e^{i\theta}$$

(verificare che si ha $\Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$, per $|\zeta| = 1$, vedi esercizio 2 pag 58).

Lasciamo al lettore di dimostrare che con un'omotetia $z \mapsto Rz$ si ottiene l'analoga formula per il disco di raggio R che è

$$u(z) = \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\zeta - z|^2} u(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = Re^{i\theta}.$$

Ricordiamo che l'integrale di Poisson (129) coinvolge soltanto i valori di u sulla circonferenza. La formula di Poisson si puó rovesciare. Questo è il senso del seguente fondamentale teorema.

TEOREMA 2.1. (di Schwartz) *Ogni funzione continua sulla circonferenza* Γ *è la traccia di una funzione che è armonica in* D *e continua sulla chiusura* $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Dimostrazione Se $\varphi \in C^0(\Gamma)$ indica la funzione data, allora per la formula di Poisson la funzione armonica corrispondente deve essere

$$u(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta - z|^2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, \varphi(\zeta)\, d\theta, \quad \zeta = e^{i\theta} \tag{130}$$

che è armonica perché parte reale di

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, \varphi(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = e^{i\theta}, \tag{131}$$

la quale è visibilmente olomorfa (derivare f rispetto a $\bar{z}$ sotto il segno come già fatto cento volte). Resta dunque soltanto da verificarne il valore al bordo e cioè che $u(z)$ tende a $\varphi(z_0)$ quando $D \ni z \to z_0 \in \Gamma$. Fissiamo dunque $z_0 \in \Gamma$.

Mostriamo prima che non è restrittivo supporre che la funzione data su Γ si annulli in z_0. Supponiamo allora di aver provato il teorema per questo tipo di funzioni e indichiamo con $P_\varphi(z)$ il secondo membro di (130) cosicché $P_{\varphi_1 + \varphi_2} = P_{\varphi_1} + P_{\varphi_2}$. Inoltre, se c è una costante, essendo essa armonica, Poisson dá $P_c = c$. Poiché $\varphi(z) - \varphi(z_0)$ si annulla in z_0, per ipotesi quando $z \to z_0$, $P_{\varphi - \varphi(z_0)} \to 0$. Ma allora $P_\varphi = P_{\varphi - \varphi(z_0)} + \varphi(z_0) \to 0 + \varphi(z_0) = \varphi(z_0)$. Siamo ora autorizzati a porre $\varphi(z_0) = 0$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Proveremo che il limite in questione è in modulo $< \varepsilon$. Per la continuità di φ esiste $\delta > 0$ tale che sia $|\varphi(\zeta)| < \varepsilon$ se $|\zeta - z_0| < \delta$. Decomponiamo u così:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| < \delta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta)\, d\theta + \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| \geq \delta} \frac{1}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta)\, d\theta.$$

Il primo addendo si maggiora con $\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| < \delta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\theta \leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\theta = \varepsilon$. Visto che z deve tendere a z_0, possiamo supporre $|z - z_0| < \delta/2$, cosicché nel secondo integrale è $|\zeta - z| > \delta/2$ e l'integrale è maggiorato dalla costante $2\pi\, 4\delta^{-2} \max|\varphi|$. Allora, quando $z \to z_0$, il secondo addendo tende a zero perché $|z| \to |z_0| = 1$. $\square$

Notiamo che la formula dá anche un'armonica coniugata v di u. Basta prendere la parte immaginaria in (131) e si ha

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \Im \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, \varphi(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = e^{i\theta}. \tag{132}$$

Si impone allora una domanda: se anche anche in quest'ultima formula mandiamo z verso un punto z_0 del bordo otteniamo il valore al bordo dell'armonica coniugata di u? La risposta è che in generale non avremo un limite perché non è detto che l'armonica coniugata di u abbia limite al bordo solo perché cellá u. Questo invece è vero se dall'ambito continuo passiamo a quello hölderiano.

Se φ è hölderiana, se soddisfa cioè $|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)| \leq C|\theta_1-\theta_2|^\alpha$ con opportune costanti $C > 0$ e $0 < \alpha < 1$, allora v definisce una funzione sulla circonferenza che si chiama *Trasformata di Hilbert* di φ. Questo è un importante Teorema di Privalov (Courant-Hilbert: "Methods of mathematical physic", vol II, Cap 4) e dice: *Se la parte reale u di una funzione olomorfa $f = u + iv$ è continua in $\overline{D}$ e $u_{|\Gamma}$ è hölderiana, allora tutta f (e quindi anche v) è hölderiana in tutto $\overline{D}$.*

Sia la formula di Poisson che il Teorema di Schwartz si presentano nello stesso modo anche in $\mathbb{R}^n$. Poniamo $x = (x_1, \dots x_n)$, $B_n = \{|x| < 1|\}$, $S_n = \{|x| = 1\}$, $d\sigma_y$ è l'elemento d'area di S_n e c_n indica l'area complessiva di S_n.
Allora (Poisson) ogni funzione u armonica in B_n e continua in $\overline{B}_n$ si rappresenta cosí:

$$u(x) = \frac{1-|x|^n}{c_n} \int_{S_n} \frac{u(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y.$$

Viceversa (Schwartz) per ogni φ continua su S_n l'integrale

$$u(x) = \frac{1-|x|^n}{c_n} \int_{S_n} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

definisce la funzione u armonica in B_n, continua in $\overline{B}_n$, tale che $u_{|S_n} = \varphi$.
Per dimostrare queste cose in $\mathbb{R}^n$ non si possono usare le funzioni olomorfe come noi abbiamo fatto in $\mathbb{R}^2$. Perció Poisson si ricava senza molta fatica direttamente da Green. Invece per il Teorema di Schwartz funziona la nostra dimostrazione senza cambiare una virgola.

3. Esercizi

1 Usando l'esercizio 11 a pagina 78 provare che in coordinate polari il laplaciano è

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

e dedurne che $\log(x^2 + y^2)$ è armonico in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

2 *Teoremi di Liouvulle e di Phragmén-Lindelöf per le funzioni armoniche* Usando gli omonimi Teoremi per le funzioni olomorfe e procedendo come nella dimostrazione del principio del minimax dimostrare quanto segue.
a) *Una funzionarmonica, limitata in tutto il piano è costante.*
b) *Sia u armonica in un settore infinito di ampiezza π/α continua fin sulle semirette sulle quali è limitata. Se, per un $a < \alpha$, $r^{-a}\, u$ è limitata, allora u è costante.*

3 Trovare la funzione olomorfa $f = u + iv$ sapendo che

$a)\ u = e^{-y}\cos x, v(0) = 1,$ $b)\ u = \frac{x}{x^2+y^2}, v(\pi) = 0,$
$c)\ v = \arctan\frac{y}{x}, v(1) = 0,$ $d)\ u = x^2 - y^2 + 2x, f(i) = 2i - 1,$
$e)\ v = 2(\cosh x \sin y - xy), u(0) = 0,$ $f)\ u = 2\sin x \cosh y - x, f(0) = 0.$

4 Dire quali delle seguenti funzioni è parte reale o immaginaria di una funzione olomorfa:

$$a)\ x^2 - y^2 + 2xy, \quad b)\ x^2, \quad c)\ \log(x^2 + y^2), \quad d)\ \frac{x^2+1}{2}y^2.$$

5 Trovare le funzioni armoniche del tipo $f(x^2 + y^2)$. Si consiglia l'uso del laplaciano in coordinate polari.

6 Sia u armonica nella corona $r < |z| < R$. Sia $\tilde{u}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta$, $r < \rho < R$, la sua media sul cerchio di raggio ρ. Dimostrare che $\tilde{u}$ è del tipo $\tilde{u}(\rho) = A\log\rho + B$. Usare il Laplaciano in coordinate polari.

7 Sia u armonica nel disco $\{|z| < R\}$. Dimostrare che per ogni r con $0 < r < R$ s ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\, d\theta = 0.$$

Risposte

3: a) $e^{iz} + i$, b) $1/z$, c) $\mathrm{Log}z$, d) $z^2 + 2i$, e) $2\sinh z - z^2$, f) $2\sin z - z$. 4: a) Sí, b) no, c) sí, d) no. 5: $a\log(x^2 + y^2) + b$ con a e b costanti.

CHAPTER 12

Appendici

1. Decomposizione e densitá delle curve generiche.

Scopo di questa parte è di dimostrare il seguente teorema come annunciato a pagina 65.

TEOREMA 1.1. *Sia ω continua in Ω. Se $\int_\Gamma \omega$ si annulla per ogni contorno $\Gamma \subset \Omega$ allora si annulla su qualunque curva chiusa e dunque ω è esatta.*

Un punto doppio $z(t) = z(t')$ di una curva C^1 si chiama *trasversale* se le velocitá $\dot{z}(t)$ e $\dot{z}(t')$ non sono parallele.

La curva C^1 $z(t)$ si dice *generica* se è formata da soli punti semplici o da punti doppi trasversali.

La linea della dimostrazione del teorema è questa:
1) Ogni curva chiusa generica è somma o differenza di contorni. Dunque $\int_\gamma \omega = 0, \forall \gamma$ generica.
2) Ogni curva chiusa C^1 è limite in senso C^1 di curve generiche (Teorema di trasversalitá). Dunque $\int_\gamma \omega = 0, \forall \gamma \in C^1$.
3) Per ogni curva chiusa γ c'è una successione γ_n di curve C^1 tali che $\int_{\gamma_n} \omega \to \int_\gamma \omega$. Dunque $\int_\gamma \omega = 0, \forall \gamma$.

Prima parte

LEMMA 1.1. *Una curva generica ha al piú un numero finito di punti doppi.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che per ogni curva C^1 $\gamma \equiv \{z(t),\ t \in [a,b]\}$ esistono ε e C positivi tali che sia

$$|z(t) - z(t')| \ \geq\ C\,|t - t'|, \quad \forall t, t' \in [a,b],\ \mathrm{con}\ |t - t'| \leq \varepsilon. \tag{133}$$

Se (133) fosse falsa, esisterebbero due successioni t_n e t'_n in $[a,b]$ tali da aversi $|t_n - t'_n| < \frac{1}{n}$ e $|z(t_n) - z(t'_n)| < \frac{1}{n}|t_n - t'_n|$.

Per la compattezza di $[a,b]$, a meno di passare ad una sottosuccessione, si ha $t_n \to t^* \in [a,b]$. Ma allora, per l'ipotesi fatta, anche $t'_n \to t^*$. Dal Teorema di Lagrange otteniamo l'esistenza tra t_n e t'_n di un punto ξ_n per il quale si ha $\dot{x}(\xi_n) = \frac{x(t_n) - x(t'_n)}{t_n - t'_n}$ e dunque $|\dot{x}(\xi_n)| < \frac{1}{n}$. Ovviamente $\xi_n \to t^*$.

Dalla continuità di $\dot{x}$ segue allora $\dot{x}(t^*) = 0$. Analogamente si ricava che in t^* s'annulla $\dot{y}$ e quindi $\dot{z}$ mentre, per definizione di curva, deve essere $\dot{z} \neq 0$. La (133) è così provata.

Osserviamo ora che, per (133), l'insieme E delle coppie (t_1, t_2) che dánno luogo a un punto doppio è contenuto nel compatto

$$\{(t_1, t_2) \in [a, b] \times [a, b],\ |t_1 - t_2| \geq \varepsilon\}.$$

Sia $z(t_1) = z(t_2)$ un punto doppio trasversale. Poiché $\dot{z}(t_1)$ e $\dot{z}(t_2)$ non sono paralleli, essi sono indipendenti su $\mathbb{R}$. Ne segue

$$m \ \equiv \inf_{|\rho|+|\sigma|=1} |\dot{z}(t_1)\rho + \dot{z}(t_2)\sigma| \ > \ 0.$$

Dalla formula di Taylor otteniamo d'altronde

$$z(t_1 + \lambda) - z(t_2 + \mu) \ = \ \dot{z}(t_1)\lambda - \dot{z}(t_2)\mu \ + \ o(|\lambda|) - o(|\mu|).$$

Esiste dunque $\delta > 0$ tale che, per $|\lambda|$ e $|\mu| < \delta$, si ha $o(|\lambda|) < m|\lambda|/4$ e $o(|\mu|) < m|\mu|/4$ sicché, ponendo $\rho = \frac{\lambda}{|\lambda|+|\mu|}$, $\sigma = \frac{\mu}{|\lambda|+|\mu|}$, abbiamo

$$|z(t_1 + \lambda) - z(t_2 + \mu)| \ > \ \frac{m}{2}(|\lambda| + |\mu|), \quad \text{per } 0 < |\lambda| + |\mu| < \delta.$$

Concludendo, si ha $E \cap \{|t - t_1| + |t - t_2| < \delta\} = \{(t_1, t_2)\}$. Allora E è un insieme finito perché è discreto e contenuto in un compatto. $\square$

Dimostriamo un risultato di decomposizione delle curve chiuse generiche illustrato dalla figura.

(i) *Ogni curva chiusa generica ha la forma*

$$\gamma \ = \ \sum_{j=1}^{m} \delta_j \partial\Omega_j, \quad \delta_j = \pm 1. \tag{133}$$

dove $\Omega_1, ..., \Omega_m$ *sono aperti limitati le cui frontiere* $\partial\Omega_1, ..., \partial\Omega_m$ *sono curve semplici* C^1 *a tratti ed hanno, a due a due, al piú un numero finito di punti in comune.*

Dimostrazione. Se γ è semplice, allora essa sconnette il piano in due parti [1] delle quali una sola, che indichiamo con Ω, è limitata ed abbiamo $\gamma = \pm\partial\Omega$. Procediamo allora per induzione sul numero d di punti doppi di $\gamma = \{z(t)\}_{a \le t \le b}$, ($d < \infty$ per il lemma precedente).

Basta provare che si ha $\gamma = \gamma_1 \pm \partial\Omega$ e γ_1 ha meno di d punti doppi, poi si conclude per ricorrenza. Siano dunque $p_1 = z(t_1) = z(t_1'), ..., p_d = z(t_d) = z(t_d')$ i punti doppi di γ. Possiamo supporre di averli ordinati in modo da avere $t_1 < ... < t_d$ e che, per ogni $1 \le j \le d$, si abbia $t_j < t_j'$.

La curva $\{z(t)\}_{t_d \le t \le t_d'}$ non ha punti doppi perché $[t_d, t_d']$ non puó contenere una coppia del tipo t_j, t_j', $1 \le j \le d-1$. Essa ha dunque la forma $\pm\partial\Omega$.

La curva $\gamma_1 = \{z'(t)\}$, con $z'(t) = z(t)$ per $a \le t \le t_d$, $z'(t) = z(t + t_d' - t_d)$ per $t_d \le t \le b - t_d' + t_d$ ha al piú $d-1$ punti doppi, perché p_d è semplice per γ_1. Si ha allora $\gamma = \gamma_1 \pm \partial\Omega$ come volevasi. □

Ogni curva generica è dunque somma o differenza di contorni.

Seconda parte

TEOREMA 1.2. (Teorema di trasversalitá) *Le curve chiuse generiche sono dense nelle curve chiuse di classe* C^1 *nella norma* C^1.

Dimostrazione . Conviene parametrizzare la curva su un arco del cerchio unitario Γ:

$$\gamma \equiv \{z(\sigma), \text{ con } \sigma = e^{i\theta}, \ |\theta| \le \pi\}.$$

Per la (133), γ ha un punto doppio $z(\sigma_1) = z(\sigma_2)$ solo se $|\theta_1 - \theta_2| > \varepsilon$ e dunque, maggiorando la corda con l'arco (prendiamo $\varepsilon < \pi$), se $|\sigma_1 - \sigma_2| > \varepsilon$.

Poniamo

$$U \equiv (\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma \times \Gamma, \ |\sigma_1 - \sigma_2| > \varepsilon$$

ed indichiamo con

$$R(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{z(\sigma_1) - z(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

il rapporto incrementale.

Vogliamo approssimare γ con la curva γ_{z^*} d'equazione

$$\zeta(\sigma) = z(\sigma) - (\sigma - 1)\, z^*, \qquad (\sigma = e^{i\theta}, \ |\theta| \le \pi),$$

scegliendo $z^* \in \mathbb{C}$ opportunamente.

Se $\zeta(\sigma_1) = \zeta(\sigma_2)$ è un punto doppio di γ_{z^*} si ha

$$z^* = R(\sigma_1, \sigma_2). \tag{133}$$

[1] Nel caso di una curva continua, semplice, chiusa questo è un non facile teorema di Jordan, ma, per curve di classe C^1 a tratti, dimostrare che il complementare ha esattamente due componenti connesse è cosa molto elementare che lasciamo al lettore.

Derivando otteniamo

$$\zeta_\theta \;=\; z_\theta \;-z^* \tag{133}$$

donde

$$\|\gamma_{z^*} \;-\; \gamma\|_1 \;\leq\; 3\,|z^*|.$$

Poiché $|z_\theta| > C$, dalla (1) segue anche $\zeta_\theta \neq 0$ non appena $|z^*| < C$. $\zeta(\theta)$ è perció una curva C^1

È allora sufficiente trovare z^* arbitrariamente piccolo in modo che γ_{z^*} sia generica e cioè che $\zeta(\sigma_1) = \zeta(\sigma_2)$ si possa avere solo se $\zeta_\theta(\sigma_1)$ e $\zeta_\theta(\sigma_2)$ *non* sono paralleli.

Proviamo ora che gli z^* per cui γ_{z^*} *non* è generica costiuiscono un insieme di misura nulla in $\mathbb{C}$. Con ció il teorema sará completamente dimostrato.

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} R_{\theta_1}(\sigma_1,\sigma_2) \quad &= \quad \frac{z_\theta(\sigma_1) \;-\; R(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2} \\ R_{\theta_2}(\sigma_1,\sigma_2) \quad &= \quad -\,\frac{z_\theta(\sigma_2) \;-\; R(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2}. \end{aligned}$$

Dunque, nel caso di un punto doppio, sostituendo qui la (1) e tenendo conto della (1) otteniamo

$$(\sigma_1-\sigma_2)\,R_{\theta_1}(\sigma_1,\sigma_2) \;=\; \zeta_\theta(\sigma_1), \quad (\sigma_1-\sigma_2)\,R_{\theta_2}(\sigma_1,\sigma_2) \;=\; -\,\zeta_\theta(\sigma_2).$$

Ne concludiamo che il punto doppio è *non* trasversale se e solo se si ha $z^* \;=\; R(\sigma_1,\sigma_2)$ in un punto $(\sigma_1,\sigma_2) \in U$ dove $R_{\theta_1}(\sigma_1,\sigma_2)$ e $R_{\theta_2}(\sigma_1,\sigma_2)$ sono paralleli e cioè dove si annulla il determinante jacobiano dell'applicazione $R : U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Per il Teorema di Sard [2] l'insieme di questi punti di $\mathbb{C}$ ha appunto misura nulla. $\square$

Parte terza

Per applicare il teorema di trasversalitá a curve C^1 a tratti serve il seguente risultato che permette di approssimare quest'ultime con curve C^1.

PROPOSIZIONE 1.1. *Per ogni curva chiusa γ, C^1 a tratti, esiste una famiglia γ^ε di curve C^1 chiuse tali che ogni intorno di γ contiene γ^ε per $\varepsilon \ll 1$ e, per ogni forma ω continua in un intorno di γ, si ha $\int_{\gamma^\varepsilon}\omega \to \int_\gamma \omega$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per un momento che $\gamma \;=\; \{z(t), t \;\in\; [0,a]\}$ sia già essa stessa C^1 ma non sia chiusa e che, fissato comunque un vettore $v \neq 0$ in $z(0)$, noi sappiamo trovare una famiglia γ^ε di curve con gli stessi estremi e che abbiano v come velocitá iniziale, la stessa velocitá finale di γ e soddisfi rispetto a questa nuova γ le proprietá richieste dalla tesi.

In tal caso la proposizione sarebbe dimostrata perché, scrivendo la curva inizialmente data come somma dei suoi tratti C^1, possiamo approssimare ciascun tratto con una curva che ha i suoi stessi estremi e la stessa velocitá finale ma la cui velocitá iniziale sia quella del tratto che

---

[2]"Un applicazione C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ manda l'insieme dove s'annulla il suo determinante jacobiano in un insieme di misura nulla."

la precede in modo che, congiungendo le approssimanti di ciascun tratto, si ottenga una curva C^1.

Sia dunque $\gamma \equiv \{z(t), t \in [0,a]\}$ la curva C^1 e $v \neq 0$ sia dato.

Prendiamo ora una funzione reale $f_\varepsilon \in C^1([0,\infty))$, nulla per $t \geq \varepsilon$, tale che

$$f'_\varepsilon(0) = 1,\ |f_\varepsilon| \leq \varepsilon,\ \ |f'_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Per esempio $f_\varepsilon(t) = t(t-\varepsilon)^2/\varepsilon^2$, per $0 \leq t \leq \varepsilon$, $f_\varepsilon(t) = 0$ per $\varepsilon < t < \infty$.

Allora $z^\varepsilon(t) \equiv z(t) + f_\varepsilon(t)[v - \dot{z}(0)]$ soddisfa le condizioni volute.

Difatti $\dot{z}^\varepsilon(0) = v$, $|z^\varepsilon(t) - z(t)| \leq |v - \dot{z}(0)|\varepsilon \to 0$ uniformemente in t e $|\dot{z}^\varepsilon(t)| \geq |\dot{z}(t)| - \varepsilon|v - \dot{z}(0)| > 0$, per $\varepsilon \ll 1$.

Infine, se $\omega = Adx + Bdy$ è una forma continua, si ha

$$|\int_{\gamma^\varepsilon} Adx - \int_\gamma Adx| \leq \int_0^\varepsilon |A[z^\varepsilon(t)] - A[z(t)]|\, |\dot{x}^\varepsilon(t)|dt + \int_0^\varepsilon |A[z(t)]|\, |\dot{x}^\varepsilon(t) - \dot{x}(t)|dt.$$

Per il primo integrale si osservi che la convergenza uniforme $z^\varepsilon(t) \to z(t)$ e il Teorema di Heine Cantor applicato ad A dánno $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[0,b]} |A[z^\varepsilon(t)] - A(t)| = 0$ e che si ha $|\dot{x}^\varepsilon| \leq \sup |\dot{z}| + |v - \dot{z}(0)|\varepsilon$. L'integrale tende dunque a zero.

Se poniamo $M = \sup_\gamma |A|$, il secondo integrale è maggiorato da $M\ \varepsilon^3\ |v - \dot{z}(0)|$ e perció tende anch'esso a zero.

Ugualmente si ragiona per la parte Bdy di ω. $\square$

2. Dimostrazione del Teorema di Goursat

Richiamiamo in Teorema di Goursat a pagina 78 nel testo.

TEOREMA DI GOURSAT. *Se la funzione f è olomorfa in un insieme aperto A allora f è di classe C^∞ in A.*

Dimostrazione. La dimostrazione consta di due parti.

Prima parte. Proviamo che per ogni quadrato $Q \subset\subset A$, si ha

$$\int_{\partial Q} f(\zeta)\, d\zeta\ =\ 0. \tag{131}$$

Questa formula va sotto il nome di *Teorema di Cauchy.*

Indichiamo con $I(Q)$ il primo membro della (2). Sia l il lato di Q. Dividiamo Q in quattro quadrati di lato $l/2$. $I(Q)$ è uguale alla somma dei quattro analoghi integrali estesi alle frontiere di questi quadrati perché i contributi dovuti ai segmenti interni a Q si elidono a due a due. Dei quattro quadrati deve esservene uno, il cui interno indichiamo con Q_1, tale da aversi $|I(Q_1)| \geq |I(Q)|/4$.

Dividendo in quattro Q_1 e così procedendo costruiamo una successione di quadrati aperti $Q_n \subset Q$ di lato $2^{-n}l$ tali che sia $I(Q) \leq 4^n I(Q_n)$. Sia $z^* = \cap_{n\geq 1}\overline{Q}_n$. [1] Poiché f è olomorfa in z^* si ha $f(\zeta) = f(z^*) + f'(z^*)(\zeta - z^*) + r(\zeta)$ con $\lim_{\zeta\to z^*} r(\zeta)/(\zeta - z^*) = 0$. Ma $\int_{\partial Q_n}[f(z^*) + f'(z^*)\,(\zeta - z^*)]\,d\zeta = 0$ perché $f(z^*)$ e $f'(z^*)$ sono costanti e dunque l'integrando è una forma esatta. Perció $I(Q_n) = \int_{\partial Q_n} r(\zeta)\,d\zeta$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per n sufficientemente grande e $\zeta \in \partial Q_n$ si ha $|\frac{r(\zeta)}{\zeta - z^*}| \leq \frac{\varepsilon}{4l^2}$ e dunque $|r(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{4l\,2^n}$. Abbiamo allora $|I(Q_n)| \leq \frac{\varepsilon}{4l\,2^n}\,\mathrm{lung}(\partial Q_n) \leq 4^{-n}\varepsilon$ e combinando questa disuguaglianza con quella test è ottenuta abbiamo $|I(Q)| \leq \varepsilon$. La (2) è dunque dimostrata dato che ε è arbitrario.

Seconda parte. Dimostriamo la formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad \forall z \in Q \tag{131}$$

che si chiama *Formula di Cauchy per il quadrato.* [2]

Ragionando come a pagina 84 del testo, vediamo che la (2) è indefinitamente derivabile sotto il segno. Possiamo dunque affermare che

Il secondo membro della (2) *rappresenta una funzione C^∞ di z in Q.*

---

[1] L'intersezione di una famiglia decrescente di compatti non vuoti è non vuota e se il loro diametro tende a 0 essa si riduce ovviamente a un solo punto.

[2] Attenzione: Questa non è altro che la formula di Cauchy di pag 83 ma non possiamo servircene perché essa è provata nell'ipotesi che f sia C^1 cosa che ora stiamo cercando di dimostrare.

Per avere il Teorema resta dunque soltanto da provare l'uguaglianza (2) per uno $z \in Q$ *fissato* arbitrariamente. La possiamo scrivere nella forma

$$f(z) = 2\pi i\, J(Q) \tag{131}$$

dove si è posto

$$J(R) = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

per ogni rettangolo $R \subset Q$, con $z \notin \partial R$. Se $z \notin R$, allora la funzione $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ è olomorfa in R

e le si applica perció la (2) ora dimostrata, ottenendosi $J(R) = 0$. Ma allora, se invece $z \in R$, abbiamo

$$J(R) = J(Q), \quad \text{se}\, z \in R$$

perché dalla figura abbiamo $J(Q) = J(R) + J(R_1) + J(R_2) + J(R_3) + J(R_4) = J(R) + 0 + 0 + 0 + 0$.

Del resto, sempre se $z \in R$, abbiamo $\int_{\partial R} d\zeta/(\zeta - z) = 2\pi i$ perché ζ gira una volta attorno a z, e $\int_{\partial R} d\zeta = 0$ perché $d\zeta$ è esatta.

Ora, l'olomorfia di f in z dá $f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + r(\zeta)$, con $\lim_{\zeta \to z} |r(\zeta)|/|\zeta - z| = 0$. Sostituendo otteniamo $J(Q) = J(R) = 2\pi i f(z) + \int_{\partial R} r(\zeta)/(\zeta - z)$ per ogni rettangolo $R \ni z$. Questo dá la (2) desiderata se dimostriamo che l'ultimo integrale puó essere reso arbitrariamente piccolo se scegliamo R molto vicino a z. A questo scopo prendiamo R tale da aversi $|r(\zeta)|/|\zeta - z| \leq \varepsilon$ per $\zeta \in \overline{R}$, cosicché l'integrale è maggiorato da $\varepsilon|\partial Q|$ dove $|\partial Q| \geq |\partial R|$ è il perimetro di Q. $\square$