Approfondimenti al compito 4) dell'esame scritto al primo appello della sessione estiva anticipata 2008-2009.

$\boxed{1}$

Nel compito 4) abbiamo visto che $(2,4)$ è un punto di massimo locale per la funzione

$$f(x,y) = \log \frac{x\,y}{(1+x)\,(x+y)\,(y+8)}$$

definita sul quadrato $(1,8)\times(1,8)$. Di fatto $(2,4)$ è un punto di massimo assoluto per f. Più generalmente, abbiamo :

Per qualsiasi numeri reali $0<a<b$ il punto (a_1,a_2) con

$$a_1 = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,,\ a_2 = a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2$$

è l'unico punto di massimo assoluto per la funzione

$$f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

definita da

$$f(x,y) = \log \frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)}\ ,$$

quindi anche per

$$g(x,y) = e^{f(x,y)} = \frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)}\ .$$

Poiché

$$g\left(a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2\right) = \frac{1}{a\left(1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3}\ ,$$

risulta la disuguaglianza

$$\frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)} \leq \frac{1}{a\left(1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3}\,, \qquad x,y>0$$

con ugualità solo per

$$x = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,,\ y = a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2 .$$

Vale addirittura :

Per qualsiasi numeri reali $0 < a < b$ *e qualsiasi intero* $n \geq 2$ *, il punto* $(a_1, \ldots, a_n)$ *con*

$$a_j = a \left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \right)^j , \qquad 1 \leq j \leq n$$

è l'unico punto di massimo assoluto per la funzione

$$f : \underbrace{(0, +\infty) \times \ \ldots \ \times (0, +\infty)}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \log \frac{x_1 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)} ,$$

quindi anche per

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n) &= e^{f(x_1, \ldots, x_n)} \\ &= \frac{x_1 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)} . \end{aligned}$$

Poiché

$$g\left(a \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}, \ldots, a \left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \right)^n \right) = \frac{1}{a \left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \right)^{n+1}} ,$$

risulta la disuguaglianza (*di Christiaan Huygens*)

$$\frac{x_1 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \ldots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)} \leq \frac{1}{a \left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \right)^{n+1}} \qquad x_1, \ldots, x_n > 0$$

con ugualità solo per

$$a_j = a \left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \right)^j , \qquad 1 \leq j \leq n .$$

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $n = 2$, perché la discussione del caso generale è completamente simile.

Anzitutto, ponendo

$$g(0,y) = g(x,0) = 0\,, \qquad x,y \geq 0$$

si ottiene una estensione continua di g su $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, che sarà indicata con la stessa lettera g :

Ovviamente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_o)} g(x,y) = 0 \text{ per ogni } y_o > 0\,,$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_o,0)} g(x,y) = 0 \text{ per ogni } x_o > 0\,.$$

Poi, poiché

$$0 < g(x,y) = \underbrace{\frac{1}{a+x}}_{<\frac{1}{a}}\, x\, \underbrace{\frac{y}{x+y}}_{<1}\, \underbrace{\frac{1}{y+b}}_{<\frac{1}{b}} < \frac{x}{a\,b}\,, \qquad x,y > 0\,,$$

abbiamo anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0\,,$$

D'altro canto,

$$g(x,y) < \min\left(\frac{1}{a+x}\,,\frac{1}{y+b}\right), \qquad x,y > 0 \qquad (*)$$

ove $\min\big(\alpha,\beta\big)$ indica il più piccolo fra α e β .

Infatti,

$$g(x,y) = \frac{1}{a+x}\, \underbrace{\frac{x}{x+y}}_{<1}\, \underbrace{\frac{y}{y+b}}_{<1} < \frac{1}{a+x}$$

e

$$g(x,y) = \underbrace{\frac{x}{a+x}}_{<1}\, \underbrace{\frac{y}{x+y}}_{<1}\, \frac{1}{y+b} < \frac{1}{y+b}\,.$$

Scegliamo ora un punto (x_o, y_o) in $[a\,,b] \times [a\,,b]$, per esempio

$$x_o = y_o = \sqrt{ab}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}
g(x_o, y_o) &= \frac{\big(\sqrt{ab}\big)^2}{\big(a+\sqrt{ab}\big)\,2\sqrt{ab}\,\big(\sqrt{ab}+b\big)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ab}}{\big(a+\sqrt{ab}\big)\big(\sqrt{ab}+b\big)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}\,\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}\big)\sqrt{b}\,\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}\big)} \\
&= \frac{1}{2\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}\big)^2}
\end{aligned}$$

ed usando (*) risulta

$$g(x_o, y_o) > \frac{1}{2\big(2\sqrt{b}\big)^2} = \frac{1}{8b} \geq \min\left(\frac{1}{a+x}\,,\,\frac{1}{y+b}\right) > g(x, y)$$

per $x \geq 8b$ oppure $y \geq 7b$.

Ora, per il teorema di Weierstrass, la restrizione della funzione continua g sul rettangolo chiuso e limitato $[0\,,8\,b] \times [0\,,7b]$ ha almeno un punto di massimo assoluto.

Poi, i punti di massimo assoluto di g sul rettangolo aperto

$$(0\,,8\,b) \times (0\,,7b)$$

coincidono con i punti di massimo assoluto di g sull'intero

$$[0\,,+\infty) \times [0\,,+\infty)\,.$$

Infatti, se $(x_{\max}\,,y_{\max})$ è un punto di massimo assoluto di g su $(0\,,8\,b) \times (0\,,7b)$, allora

$$g(x\,,y) < g(x_o, y_o) \leq g(x_{\max}\,,y_{\max})$$

per $x \geq 8\,b$ oppure $y \geq 7b$ e

$$g(x\,,y) = 0 < g(x_o, y_o) \leq g(x_{\max}\,,y_{\max})$$

per $x = 0$ oppure $y = 0$. Perciò $(x_{\max}\,,y_{\max})$ è necessariamente punto di massimo assoluto su $[0\,,+\infty) \times [0\,,+\infty)$.

Viceversa, se $(x_{\max}\,, y_{\max})$ è un punto di massimo assoluto di g su $[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)$, allora

$$g(x\,,y) < g(x_o, y_o) \le g(x_{\max}\,, y_{\max})$$

per $x \ge 8\,b$ oppure $y \ge 7b$ implica che $x_{\max} < 8\,b$ e $y_{\max} < 7b$, mentre

$$g(0\,,y) = g(x\,,0) = 0 < g(x_o, y_o) \le g(x_{\max}\,, y_{\max})$$

implica che $x_{\max} > 0$ e $y_{\max} > 0$. In altre parole $(x_{\max}\,, y_{\max})$ si trova in $(0\,,8\,b)\times(0\,,7b)$.

Concludiamo che g ha almeno un punto di massimo assoluto sul quadrante $[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)$ ed ogni tale punto è un punto di massimo locale in $(0\,,8\,b)\times(0\,,7b)$, in particolare un punto stazionario di g . Ma l'unico punto stazionario di g è

$$\left(a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}, a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2\right) .$$

Poiché $g(x\,,y) = e^{f(x\,,y)}$ e

$$f(x,y) = \log x + \log y - \log(a+x) - \log(x+y) - \log(y+b)\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= e^{f(x\,,y)}\,\frac{\partial f}{\partial x} = e^{f(x\,,y)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} - \frac{1}{x+y}\right) \\
&= e^{f(x\,,y)}\,\frac{a\,y - x^2}{x(a+x)(x+y)}\,, \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= e^{f(x\,,y)}\,\frac{\partial f}{\partial y} = e^{f(x\,,y)}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+b}\right) \\
&= e^{f(x\,,y)}\,\frac{b\,x - y^2}{y(x+y)(y+b)}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

è equivalente a

$$a\,y - x^2 = 0\,, \quad b\,x - y^2 = 0\,,$$

cioè a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x}\,, \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{y}\,.$$

Risultano successivamente :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{x}{a}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{b}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,,$$

$$x = a\,\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,, \quad y = x\,\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = a\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^2,$$

Finalmente, indicando $q = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, l'unico punto di massimo assoluto di g è $(aq\,,aq^2)$, perciò il suo valore massimale è uguale a

$$\begin{aligned} g(aq\,,aq^2) &= \frac{aq\,aq^2}{(a+aq)\,(aq+aq^2)\,(aq^2+q^3)} \\ &= \frac{a^2\,q^3}{a\,(1+q)\,a\,q\,(1+q)\,a\,q^2\,(1+q)} \\ &= \frac{1}{a\,(1+q)^3}\,. \end{aligned}$$

■

$\boxed{2}$

Calcoliamo adesso, per i numeri reali $0 < a < b$ dati, i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f(x,y) = \log\frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)}\,,$$

quindi anche di

$$g(x,y) = e^{f(x,y)} = \frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)}$$

sulla frontiera del quadrato $[a,b]\times[a,b]$.

Soluzione. La frontiera del rettangolo $[a,b] \times [a,b]$ consiste da quattro pezzi:

- il segmento $\big[(a,a)\,,(a,b)\big] = \{(a,y)\,;\, a \leq y \leq b\}\,,$
- il segmento $\big[(a,b)\,,(b,b)\big] = \{(x,b)\,;\, a \leq x \leq b\}\,,$
- il segmento $\big[(b,b)\,,(b,a)\big] = \{(b,y)\,;\, a \leq y \leq b\}\,,$
- il segmento $\big[(b,a)\,,(a,a)\big] = \{(x,a)\,;\, a \leq x \leq b\}\,.$

Sul segmento $\big[(a,a)\,,(a,b)\big]$:

Troviamo i punti di massimo e minimo di f su $\big[(a,a)\,,(a,b)\big]$, cioè della funzione

$$\begin{aligned}[a,b] \ni y \longmapsto f(a,y) &= \log \frac{ay}{2\,a\,(a+y)(y+b)} \\ &= \log y - \log 2 - \log(a+y) - \log(y+b)\,.\end{aligned}$$

Poiché la derivata $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{y+b} = \dfrac{ab-y^2}{y\,(a+y)(y+b)}$ si annulla in $y = \sqrt{ab}$, è > 0 prima e < 0 dopo, la funzione di cui sopra cresce strettamente da a a $\sqrt{ab}$ e decresce strettamente da $\sqrt{ab}$ a b. Trovando che $f(a,a) = \log \dfrac{1}{4\,(a+b)} = f(a,b)$, deduciamo che $y = \sqrt{ab}$ è il solo punto di massimo, mentre $y = a$ e $y = b$ sono i due punti di minimo. Il valore minimo ed il valore massimo sono

$$f(a\,,a) = f(a\,,b) = \log \frac{1}{4\,(a+b)}$$

rispettivamente

$$f\big(a\,,\sqrt{ab}\big) = \log \frac{1}{2\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}\big)^2}\,.$$

Sul segmento $\big[(a,b)\,,(b,b)\big]$:

Abbiamo da trovare i punti di massimo e minimo di

$$\begin{aligned}[a,b] \ni x \longmapsto f(x,b) &= \log \frac{xb}{(a+x)(x+b)\,2\,b} \\ &= \log x - \log 2 - \log(a+x) - \log(x+b)\end{aligned}$$

ed abbiamo già visto che c'è il solo punto di massimo $x = \sqrt{ab}$, mentre abbiamo due punti di minimo: $x = a$ e $x = b$. Il valore minimo ed il valore massimo sono

$$f(a\,,b) = f(b\,,b) = \log \frac{1}{4\,(a+b)}$$

rispettivamente

$$f\big(\sqrt{ab}\,,b\big) = \log \frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\,.$$

Sul segmento $\big[(b,b)\,,(b,a)\big]$:

Dobbiamo trovare i punti di massimo e minimo di

$$\begin{aligned}[a,b] \ni y \longmapsto f(b,y) &= \log \frac{by}{(a+b)(b+y)(y+b)} \\ &= \log \frac{b}{a+b} + \log y - 2\,\log(y+b)\,.\end{aligned}$$

La derivata $\dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{y+b} = \dfrac{b-y}{y\,(y+b)}$ è > 0 per $a \leq y < b$ e risulta che la funzione di cui sopra è strettamente crescente. Cosiché c'è il solo punto di minimo $y = a$ e il solo punto di massimo $y = b$. Il valore minimo ed il valore massimo sono

$$f(b\,,a) = \log \frac{ab}{(a+b)^3}$$

rispettivamente

$$f(b\,,b) = \log \frac{1}{4\,(a+b)}\,.$$

Sul segmento $\big[(b,a)\,,(a,a)\big]$:

A trovare sono i punti di massimo e minimo della funzione

$$\begin{aligned}[a,b] \ni x \longmapsto f(x,a) &= \log \frac{xa}{(a+x)(x+a)(a+b)} \\ &= \log \frac{a}{a+b} + \log x - 2\,\log(a+x)\,.\end{aligned}$$

Ora la derivata $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{a+x} = \dfrac{a-x}{x\,(a+x)}$ è < 0 per $a < x \leq b$ e risulta che la funzione di cui sopra è strettamente decrescente. Cosiché c'è il solo punto di massimo $y = a$ e il solo punto di minimo $y = b$. Il valore minimo ed il valore massimo sono quindi

$$f(b\,,a) = \log \frac{ab}{(a+b)^3}$$

rispettivamente

$$f(a\,,a) = \log \frac{1}{4\,(a+b)}\,.$$

Si verifica facilmente che

$$\frac{ab}{(a+b)^3} < \frac{1}{4\,(a+b)} < \frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$$

e concludiamo che il valore massimale ed il valore minimale di f sulla fromtiera del quadrato $[a,b] \times [a,b]$ sono

$$\log \frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \quad \text{rispettivamente} \quad \log \frac{ab}{(a+b)^3}\,.$$

Inoltre, abbiamo due punti di massimo, $\left(a\,,\sqrt{ab}\,\right)$ e $\left(\sqrt{ab}\,,b\right)$, ed un solo punto di minimo, $(b\,,a)$.

$\blacksquare$

$\boxed{3}$

Per qualsiasi numeri reali $0 < a < b$, poiché il valore massimo della funzione

$$g(x,y) = \frac{x\,y}{(a+x)\,(x+y)\,(y+b)}$$

sulla frontiera del quadrato $[a,b] \times [a,b]$ è

$$\frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\,,$$

mentre il valore massimale della stessa g nel quadrato $[a,b]\times[a,b]$ $\big($ e addirittura nel quadrante $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ $\big)$, preso solo nel'interno del quadrato, è

$$\frac{1}{a\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^3}\,,$$

dobbiamo avere

$$\frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} < \frac{1}{a\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^3} \, .$$

Tenendo conto che

$$\frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} = \frac{1}{2\,a\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2} \, ,$$

questa disuguaglianza è equivalente a

$$\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2} < \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^3} \, ,$$

cioè a

$$2\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 > \left(1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3 \, .$$

Per semplificare, poniamo $p = \sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}$ ottenendo

$$2\left(1+p^3\right)^2 > \left(1+p^2\right)^3 \, , \qquad (**)$$

che vale per tutti i reali $p > 1$ perché l'insieme di tutti i $\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}$ con $0 < a < b$ è $(1, +\infty)$.

Qui ci proponiamo, quale esercizio di calcolo, di trovare una deduzione diretta della disuguaglianza (**) e di stabilire precisamente per quali numeri reali p è vera. In altre parole, vogliamo sapere per quali $p \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$2\left(1+p^3\right)^2 - \left(1+p^2\right)^3 > 0 \, .$$

Guardando lo sviluppo

$$2\left(1+p^3\right)^2 - \left(1+p^2\right)^3 = p^6 - 3p^4 + 4p^3 - 3p^2 + 1 \, .$$

ce ne accorgiamo che questo polinomio si annulla in $p = 1$, perciò è divisibile con $p-1$. Dividendolo con $p-1$, troviamo che il quoziente è $p^5 + p^4 - 2p^3 + 2p^2 - p - 1$, quindi

$$2\left(1+p^3\right)^2 - \left(1+p^2\right)^3 = (p-1)(p^5 + p^4 - 2p^3 + 2p^2 - p - 1) \, .$$

Ora anche il polinomio $p^5 + p^4 - 2\,p^3 + 2\,p^2 - p - 1$ si annulla in $p = 1$ e dividendolo con $p - 1$ deduciamo

$$2\left(1 + p^3\right)^2 - \left(1 + p^2\right)^3 = (p-1)^2(p^4 + 2p^3 + 2p + 1)\ .$$

Da qui si vede ciò che abbiamo già saputo indirettamente, cioè che $2\left(1 + p^3\right)^2 - \left(1 + p^2\right)^3 > 0$ vale per tutti i $p > 1$. Ma si vede di più : $2\left(1 + p^3\right)^2 - \left(1 + p^2\right)^3 > 0$ vale di fatto per ogni $p \geq 0$ tranne $p = 1$, quando abbiamo eguaglianza. Resta quindi da vedere, per quali $p < 0$ abbiamo ancora $2\left(1 + p^3\right)^2 - \left(1 + p^2\right)^3 > 0$ ossia $p^4 + 2p^3 + 2p + 1 > 0$.

Ora, un polinomio $c_o + c_1 p + \ldots + c_{n-1}p^{n-1} + c_n p^n$ con la proprietà di simmetria

$$c_o = c_n\,,\ c_1 = c_{n-1}\ \text{ e così via}$$

si chiama *polinomio reciproco* ed il suo studio può essere ridotto allo studio di un polinomio di grado minore usando la sostituzione

$$t = p + \frac{1}{p}$$

tramite quale

$$t^2 = p^2 + \frac{1}{p^2} + 2\,, \quad t^3 = p^3 + 3p + 3\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} = p^3 + \frac{1}{p^3} + 3t\,, \quad \ldots$$

cioè

$$p^2 + \frac{1}{p^2} = t^2 - 2\,, \quad p^3 + \frac{1}{p^3} = t^3 - 3t\,, \quad \ldots.$$

Nel nostro caso possiamo scrivere

$$p^4 + 2p^3 + 2p + 1 = p^2\left(p^2 + \frac{1}{p^2} + 2\left(p + \frac{1}{p}\right)\right) = p^2\big(t^2 + 2t - 2\big)$$

e quindi per un $p < 0$

$$p^4 + 2p^3 + 2p + 1 > 0 \iff t^2 + 2t - 2 > 0\,.$$

Poiché le radici di $t^2 + 2t - 2 = 0$ sono $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, risulta

$$t^2 + 2t - 2 > 0 \iff t < -1 - \sqrt{3}\ \text{ oppure }\ t > -1 + \sqrt{3}\,.$$

Ma per $p < 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} t = &\ -\left(|p| + \frac{1}{|p|}\right) = -\left(\left(\sqrt{|p|} - \frac{1}{\sqrt{|p|}}\right)^2 + 2\right) \\ = &\ -2 - \left(\sqrt{|p|} - \frac{1}{\sqrt{|p|}}\right)^2 \leq -2 \end{aligned}$$

con uguaglianza solo per $|p| = 1$, cioè per $p = -1$. Perciò $t > -1 + \sqrt{3}$ non può accadere.

Risulta che per $p < 0$

$$p^4 + 2p^3 + 2p + 1 > 0 \iff t < -1 - \sqrt{3}\,.$$

Ora, sempre per $p < 0$, $p + \dfrac{1}{p} < -1 - \sqrt{3}$ è equivalente a

$$p^2 + (1 + \sqrt{3})\,p + 1 > 0$$

e, poiché i radici di $p^2 + (1 + \sqrt{3})\,p + 1 = 0$ sono

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} \mp \sqrt[4]{12}\right),$$

anche a

$$p < -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt[4]{12}\right) \text{ oppure } p > -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12}\right),$$

Tutto sommato:

La disuguaglianza (**) *vale se e soltanto se*

$$p < -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt[4]{12}\right)$$

oppure

$$1 \neq p > -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12}\right).$$

$\boxed{4}$

Il metodo usato nella dimostrazione della disuguaglianza di Huygens, discussa nella prima parte di questi approfondimenti, può essere usato per dimostrare il cosiddetto "teorema fondamentale dell'algebra" :

Ogni polinomio a coefficienti complessi e di grado maggiore o uguale ad 1 (*cioè non costante*) *ha almeno un zero complesso.*

Dimostrazione. Sia

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, z^j$$

un polinomio a coefficienti conplessi e di grado $n \geq 1$. Allora

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto |P(z)| \in [0, +\infty)$$

è una funzione positiva continua. Dimostriamo anzitutto che questa funzione ammette un punto di minimo assoluto.

Poiché

$$P(z) = z^n \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{z^{n-j}} = z^n \left(c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{z^{n-j}} \right) ,$$

$$|P(z)| = |z|^n \left| c_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{z^{n-j}} \right| \geq |z|^n \left(|c_n| - \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{z^{n-j}} \right| \right)$$

$$\geq |z|^n \left(|c_n| - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|c_j|}{|z|^{n-j}} \right) ,$$

vediamo che

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty ,$$

ossia per ogni $L > 0$ si può trovare un $M > 0$ tale che $|P(z)| \geq L$ appena $|z| \geq M$. In particolare esiste un $r > 0$ tale che

$$|P(z)| \geq |a_o| = |P(0)| \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} , |z| \geq r .$$

Ora, per il teorema di Weierstrass, la funzione positiva continua $|P(z)|$ ha (almeno) un punto di minimo z_o nel disco chiuso

$$\big\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r \big\} .$$

Un tale punto è automaticamente un punto di minimo assoluto di $|P(z)|$ sull'intero piano complesso $\mathbb{C}$. Infatti, oltre ad avere

$$|P(z)| \geq |P(z_o)| , \qquad z \in \mathbb{C} , |z| \leq r$$

per la sceltà di z_o , abbiamo anche

$$|P(z)| \geq |P(0)| \geq |P(z_o)| , \qquad z \in \mathbb{C} , |z| \geq r$$

per come abbiamo scelto r .

Ora finiamo la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra mostrando – come l'ha fatto per la prima volta l'enciclopedista Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) – che z_o può essere punto di minimo locale per $|P(z)|$ solo se $P(z_o) = 0$.

Supponiamo infatti che fosse $c = |P(z_o)| > 0$. Alora $Q(z) = P(z + z_o)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado n , cioè di forma

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j \ \text{ con } \ a_n \neq 0 \ ,$$

ed ha le seguente due proprietà :

- 0 è un punto di minimo locale di $|Q(z)|$, ossia
  esiste un $r_o > 0$, che possiamo assumere essere ≤ 1 ,
  tale che $|Q(z)| \geq |Q(0)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < r_o$,
- $|Q(0)| = |P(z_o)| = c > 0$.

Poiché $a_n \neq 0$, esistono indici $1 \leq j \leq n$ con $a_j \neq 0$ e sia k il più piccolo di loro. Allora

$$Q(z) = a_o + a_k z^k + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} a_j\, z^j}_{=\,0 \text{ se } k=n} = a_o\left(1 + \frac{a_k}{a_o}\, z^k + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{a_o}\, z^j\right) \ ,$$

ove $|a_o| = |Q(0)| = c$, e risulta per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |Q(z)| &\leq |a_o| \left(\left| 1 + \frac{a_k}{a_o}\, z^k \right| + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_j|}{|a_o|}\, |z|^j \right) \\ &\leq c \left(\left| 1 + \frac{a_k}{a_o}\, z^k \right| + |z|^{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_j|}{|a_o|} \right) \end{aligned}$$

Ora sia $\dfrac{a_k}{a_o} = \rho\ e^{i\theta}$ la forma trigonometrica di $\dfrac{a_k}{a_o} \neq 0$. Per ogni $0 < \delta < r_o$ abbiamo

$$1 + \frac{a_k}{a_o} \left(\delta e^{\,i\,\frac{\pi-\theta}{k}} \right)^k = 1 - \rho e^{i\theta}\, \delta^k e^{i\,(\pi-\theta)} = 1 - \rho\, \delta^k$$

e quindi

$$\left| Q\!\left(\delta e^{\,i\,\frac{\pi-\theta}{k}} \right) \right| \leq c \left(\left| 1 - \rho\, \delta^k \right| + \delta^{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_j|}{|a_o|} \right) \ .$$

Se scegliamo un $0 < \delta < r_o$ soddisfacente anche le condizioni

$$\rho\, \delta^k \leq 1 \ , \qquad \delta \sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_j|}{|a_o|} \leq \frac{\rho}{2} \ ,$$

allora abbiamo

$$\left|1-\rho\,\delta^k\right| = 1-\rho\,\delta^k\,, \qquad \delta^{k+1}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{|a_j|}{|a_o|} \le \frac{\rho}{2}\,\delta^k$$

e risulta

$$\left|Q\Big(\delta e^{\,i\,\frac{\pi-\theta}{k}}\Big)\right| \le c\Big(1-\rho\,\delta^k+\frac{\rho}{2}\,\delta^k\Big) = c\Big(1-\frac{\rho}{2}\,\delta^k\Big) < c\,,$$

in contradizione con

$$|Q(z)| \ge |Q(0)| = c\,, \qquad z\in\mathbb{C}\,, |z|\le r_o\,.$$