NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2014/2015
Calcolo 2, Esame scritto del 01.09.2015

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2\,y'' + 9\,y' - 18\,y = 10\,e^x\,. \qquad (*)$$

b) Si trovi la soluzione dell'equazione (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y'(0) = 3\,, \\ y''(0) = 0\,. \end{cases}$$

2) Si calcoli l'area della superficie definita dalle relazioni

$$(x+y)^2 + z = 1\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,, z \geq 0\,,$$

3) Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove S è il solido limitato dal cono

$$x^2+y^2=z^2$$

ed il piano $z=1$, cioè il solido descritto dalle disequazioni

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\,.$$

Suggerimento: È conveniente passare alle coordinate cilindriche.

4) a) Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π, definita tramite la formula

$$f(x)=x\sin x\,,\qquad x\in[-\pi\,,\pi]\,.$$

Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,,k\in\mathbb{Z}$ (oppure $a_k(f)\,,k\geq 0$, e $b_k(f)\,,k\geq 1$, a piacimento) di f, e si studi la convergenza puntuale della sua serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}$$

$$\left(\text{rispettivamente }\frac{a_o(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx)\Big)\right).$$

Soluzioni:

1) **:** a) Abbiano da risolvere una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'equazione omogenea :

Il polinomio caratteristico $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda - 18 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 9)$ ha tre zeri semplici:

$$\lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = 3\,i\,, \quad \lambda_3 = -\,3\,i\,.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} e^{2x}&\,, \\ e^{3xi} &= \cos(3x) + i\sin(3x)\,, \\ e^{-3xi} &= \cos(3x) - i\sin(3x)\,, \end{aligned}$$

quindi anche

$$e^{2x}\,, \quad \cos(3x)\,, \quad \sin(3x)$$

sono tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0\,,$$

di cui la soluzione generale è

$$c_1 e^{2x} + c_2\cos(3x) + c_3\sin(3x)\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti.}$$

Per trovare velocemente una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (*) possiamo usare il metodo degli annichilatori. Infatti, il termine noto dell'equazione non omogenea è $10\,e^x$ ed il coefficiente 1 di x nell'esponente non è un zero del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea, perciò l'equazione non omogenea deve avere una soluzione della forma $c\,e^x$. Sostituendo $y(x) = c\,e^x$ nell'equazione non omogenea otteniamo

$$\begin{aligned} (c\,e^x)''' - 2(c\,e^x)'' + 9(c\,e^x)' - 18(c\,e^x) &= 10\,e^x\,, \\ \big(c - 2c + 9c - 18c\big)e^x &= 10\,e^x\,, \\ -10\,c\,e^x &= 10\,e^x\,, \\ c &= -\,1\,. \end{aligned}$$

Cosicché $-\,e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione (*), di cui la soluzione generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos(3x) + c_3 \sin(3x) - e^x \,,$$

dove $c_1\,, c_2\,, c_3$ sono costanti arbitrari.

b) Poiché la soluzione generale dell'equazione differenziale (*) è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos(3x) + c_3 \sin(3x) - e^x$$

e le sue prime due derivate sono

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1 e^{2x} - 3c_2 \sin(3x) + 3c_3 \cos(3x) - e^x \,, \\ y''(x) &= 4c_1 e^{2x} - 9c_2 \cos(3x) - 9c_3 \sin(3x) - e^x \,, \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - 1 \,, \\ y'(0) &= 2c_1 + 3c_3 - 1 \,, \\ y''(0) &= 4c_1 - 9c_2 - 1 \,. \end{aligned}$$

Perciò la condizione iniziale

$$\begin{cases} y(0) = 0 \,, \\ y'(0) = 3 \,, \\ y''(0) = 0 \end{cases} \tag{**}$$

è equivalente al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 1 = 0 \,, \\ 2c_1 + 3c_3 - 1 = 3 \,, \\ 4c_1 - 9c_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione unica

$$c_1 = \frac{10}{13}\,, \quad c_2 = \frac{3}{13}\,, \quad c_3 = \frac{32}{39}\,.$$

Risulta che la soluzione dell'equazione differenziale (*) che soddisfa la condizione iniziale (**) è

$$y(x) = \frac{10}{13} e^{2x} + \frac{3}{13} \cos(3x) + \frac{32}{39} \sin(3x) - e^x \,.$$

2) **:** Siccome

$$\begin{aligned} & (x+y)^2 + z = 1\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,, z \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x \geq 0\,, y \geq 0\,, x+y \leq 1\,, z = 1-(x+y)^2\,, \end{aligned}$$

la superficie E definita dalle relazioni

$$(x+y)^2 + z = 1\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,, z \geq 0$$

è il grafico della funzione

$$f(x\,,y) = 1-(x+y)^2$$

definita sul triangolo

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0\,, y \geq 0\,, x+y \leq 1 \right\}.$$

Applicando la formula nota per l'area del grafico di f otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Area}\,(E) &= \iint\limits_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_T \sqrt{1+\big(2\,(x+y)\big)^2+\big(2\,(x+y)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_T \sqrt{1+8\,(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Per il calcolo di quest'integrale ci conviene fare il cambio di variabili

$$\begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array}\,, \qquad \begin{array}{l} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{array}\,,$$

Poiché

$$\begin{aligned} x \geq 0 \Longleftrightarrow u+v \geq 0 \Longleftrightarrow v \geq -u\,, \\ y \geq 0 \Longleftrightarrow u-v \geq 0 \Longleftrightarrow v \leq -u\,, \\ 0 \leq x+y \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq u \leq 1\,, \end{aligned}$$

il cambio di variabili di cui sopra trasforma il triangolo T in il triangolo

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \leq u \leq 1 \,, -u \leq v \leq u \right\}.$$

Ora, siccome

$$\left| \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}\,(E) &= \iint\limits_{T'} \sqrt{1+8\,u^2}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{-u}^{u} \frac{1}{2}\,\sqrt{1+8\,u^2}\,\mathrm{d}v \Big) \mathrm{d}u \\ &= \int\limits_0^1 u\,\sqrt{1+8\,u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16} \int\limits_0^1 \sqrt{1+8\,u^2}\,\mathrm{d}(1+8\,u^2) \\ &= \frac{1}{16}\,\frac{(1+8\,u^2)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{24}\big(9^{3/2}-1\big) = \frac{26}{24} \\ &= \frac{13}{12}\,. \end{aligned}$$

3) : Calcoleremo l'integrale più generale

$$I_\lambda := \iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+\lambda^2 z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove λ è un parametro reale.

Ci conviene passare alle coordinate cilindriche

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right. \quad , \quad \rho \geq 0\,,\, 0 \leq \varphi < 2\pi\,,\, z \in \mathbb{R},.$$

Il determinate funzionale del cambio di variabile è

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{array}\right| = \rho\,,$$

quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora, poiché le disequazioni $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ che definiscono il solido S significano per le coordinate cilindriche $0 \leq \rho \leq z \leq 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \iiint\limits_{0\leq\rho\leq z\leq 1} \sqrt{\rho^2+\lambda^2 z^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2+\lambda^2 z^2}\,\rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \sqrt{\rho^2+\lambda^2 z^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \pi \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \sqrt{\rho^2+\lambda^2 z^2}\,\mathrm{d}\big(\rho^2+\lambda^2 z^2\big) \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\left(\rho^2+\lambda^2 z^2\right)^{3/2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=z} \right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \Big((1+\lambda^2)^{3/2} z^3 - \lambda^3 z^3 \Big)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi}{3} \Big((1+\lambda^2)^{3/2} - \lambda^3 \Big) \underbrace{\int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z}_{=1/4} \\ &= \frac{\pi}{6} \Big((1+\lambda^2)^{3/2} - \lambda^3 \Big)\,. \end{aligned}$$

Nel nostro caso, per $\lambda = 1$ abbiamo

$$\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}\big(2^{3/2}-1\big) = \frac{\pi}{6}\big(2\sqrt{2}-1\big)\,.$$

4) : Poiché f è una funzione pari, sappiamo fin dall'inizio che $b_k(f) = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Per calcolare i coefficienti

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad k \geq 0$$

ci serve l'identità trigonometrica nota

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big)\,, \qquad \alpha\,,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Ecco una verifica veloce basata sull'identità di Eulero:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cdot\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\\ &= \frac{e^{i\alpha+i\beta}+e^{i\alpha-i\beta}-e^{-i\alpha+i\beta}-e^{-i\alpha-i\beta}}{4i}\\ &= \frac{1}{2}\bigg(\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}+\frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\bigg)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big)\,.\end{aligned}$$

Risultano

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\,,$$

$$a_1(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\begin{aligned}a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin\big((k+1)x\big)\mathrm{d}x - \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin\big((k-1)x\big)\mathrm{d}x\bigg),\ k\geq 2\,.\end{aligned}$$

Adesso ci serve la primitiva

$$\int x\,\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -\,\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2}\,, \qquad \alpha > 0\ :$$

Infatti, tramite integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int x\,\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x &= -\,\frac{1}{\alpha}\int x\,\mathrm{d}\cos(\alpha x)\\ &= -\,\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int \cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\,\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2}\,.\end{aligned}$$

Per $k = 0$ e $k = 1$ otteniamo

$$\begin{aligned}a_o(f) &= \frac{1}{\pi}\Big(-\,x\cos x + \sin x\Big)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\,,\\ a_1(f) &= \frac{1}{2\pi}\Big(-\,\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\Big)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = -\,\frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

mentre per $k \geq 2$ risulta

$$\begin{aligned}a_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\Bigg[\Bigg(-\,\frac{x\cos\big((k+1)x\big)}{k+1} + \frac{\sin\big((k+1)x\big)}{(k+1)^2}\Bigg)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}\\ &\qquad -\Bigg(-\,\frac{x\cos\big((k-1)x\big)}{k-1} + \frac{\sin\big((k-1)x\big)}{(k-1)^2}\Bigg)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}\Bigg]\\ &= \frac{1}{2\pi}\Bigg[-\,\frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{2\pi(-1)^{k-1}}{k-1}\Bigg]\\ &= (-1)^{k+1}\,\frac{2}{k^2-1}\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che la serie di Fourier (in forma reale) della funzione f è

$$\begin{aligned}&\frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\Big)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{2}{k^2-1}\cos(kx)\,.\end{aligned}$$

Poiché f è regolare a tratti (i punti di non derivabilità sono i multipli dispari di π e la derivata di f è limitata su ogni intervallo limitato) e continua, la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f. In particolare

$$1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k^2-1} \cos(kx) = x \sin x\,, \qquad -\pi \le x \le \pi\,.$$