NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2009/2010
Calcolo 1, Esame scritto del 02.02.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = 2\,x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = x\,\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \, .$$

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}\ .$$

4) Calcolare i massimi e minimi locali della funzione definita sul piano tramite la formula

$$f(x,y)=x^3+y^3-3\,x\,y\ .$$

5) Data la forma differenziale

$$\omega=\left(-\,\frac{\ln(x)}{y}\right)\mathrm{d}\,x+\left(\frac{x\ln(x)-x}{y^2}\right)\mathrm{d}\,y\ ,$$

trovare il dominio di definizione e calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y=e^x$ per $z\in[1\,,2]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\dfrac{x+1}{x-1}$ ha senso ed è > 0, cioè per $x+1>0$ & $x-1>0$ oppure $x+1<0$ & $x-1<0$. Perciò il dominio di f è

$$\big(-\infty,-1\big) \cup \big(1,+\infty\big) .$$

b) Per trovare gli asimtoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = -2 + \ln \frac{-0}{-2} = -\infty \ ,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 + \ln \frac{2}{+0} = +\infty \ .$$

Cosicché la retta $x=-1$ è un asintoto verticale di f da sinistra, mentre $x=1$ è un asintoto verticale da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1}\right) = 2 \, .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_\pm x + n_\pm = 2x + n_\pm \ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$$
$$= 0 \ .$$

Cosicché

$$y = 2x \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty \, ,$$
$$y = 2x \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to -\infty \, .$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = 2 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = 2\,\frac{x^2-2}{x^2-1} \ .$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$x_1 = -\sqrt{2}\,, \quad x_2 = \sqrt{2}\,.$$

Inoltre, f' è

$$> 0 \text{ in } \big(-\infty\,, -\sqrt{2}\big) \cup \big(\sqrt{2}\,, +\infty\big)$$

ed è

$$< 0 \text{ in } \big(-\sqrt{2}\,, -1\big) \cup \big(1, \sqrt{2}\big)\,,$$

perciò f risulta ad essere

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,, -\sqrt{2}\big)\,,\\
&\text{strettamente decrescente in } \big(-\sqrt{2}\,, -1\big)\,,\\
&\text{strettamente decrescente in } \big(1\,, \sqrt{2}\big)\,,\\
&\text{strettamente crescente in } \big(\sqrt{2}\,, +\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, $-\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale e $\sqrt{2}$ è un punto di minimo locale. Rimarchiamo che

$$\begin{gathered}
\sqrt{2} \approx 1,4142\,,\\
f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2} + 2\ln\big(\sqrt{2}+1\big) \approx 4,588\,,\\
-\sqrt{2} \approx -1,4142\,,\\
f(-\sqrt{2}) == -2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = -f(\sqrt{2}) \approx -4,588\,.
\end{gathered}$$

Possiamo inoltre trovare gli intervalli di convessità e di concavità di f, e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$f''(x) = 2\,\frac{2x\,(x^2-1) - 2x\,(x^2-2)}{(x^2-1)^2} = 4\,\frac{x}{(x^2-1)^2}\;.$$

Cosicché f'' non ha zeri (0 non si trova nel dominio di f !) e

$$\begin{aligned}
&f''(x) < 0 \;\text{ per }\; x \in \big(-\infty, -1\big)\,,\\
&f''(x) > 0 \;\text{ per }\; x \in \big(1, +\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza f

$$\begin{aligned} &\text{è concava in } \big(-\infty, -1\big)\,,\\ &\text{è convessa in } \big(1, +\infty\big) \end{aligned}$$

e non ha punti di flesso.

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$*$		$*$	$-$	0	$+$	
f''			$-$		$*$		$*$		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty\,*$	non def.	$*\,+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = 2\,x$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto $\Big(-\sqrt{2}\,, f\big(-\sqrt{2}\big)\Big)$, dove ha tangente orizzontale, poi scende a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a sinistra $x = -1$, restando sempre sotto l'asintoto :

> Infatti, per $x < -1$ abbiamo $f(x) = 2\,x + \ln\dfrac{x+1}{x-1} < 2\,x$ perché $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1} \in (0\,,1)$.

Poi il grafico di f scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 1$ fino al punto $\Big(\sqrt{2}\,, f\big(\sqrt{2}\big)\Big)$, dove ha tangente orizzontale, e sale successivamente a $+\infty$, avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = 2\,x$, restando però sopra l'asintoto:

> Infatti, per $x > 1$ abbiamo $f(x) = 2\,x + \ln\dfrac{x+1}{x-1} > 2\,x$ perché $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1} > 1$.

2) : Anzitutto rimarchiamo che il dominio di f è

$$\big\{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 > 1\big\} = \big(-\infty\,, -1\big) \cup \big(1\,, +\infty\big)$$

Tramite la sostituzione

$$t = x^2 \, , \, t \in \big(1 \, , +\infty\big) \, , \qquad \mathrm{d}t = 2\,x\,\mathrm{d}x$$

possiamo ridurre la complessità dell'integrando :

$$\int x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,\mathrm{d}t \; .$$

Per il calcolo di integrali di questo tipo si usa la sostituzione

$$s = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \, , \, s \in \big(1 \, , +\infty\big) \, , \qquad t = \frac{s^2+1}{s^2-1} \; ,$$

$$\mathrm{d}t = \frac{2\,s\,(s^2-1) - 2\,s\,(s^2+1)}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{4\,s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s$$

che lo riduce al calcolo dell'integrale di una funzione razionale :

$$\int x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s \; .$$

Lo sviluppo di $\dfrac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2}$$

ed allora

$$-\,2\,s^2 = a\,(s-1)(s+1)^2 + b\,(s+1)^2 + c\,(s+1)(s-1)^2 + d\,(s-1)^2 \; .$$

Risultano

$$a = -\,\frac{1}{2} \, , \quad b = -\,\frac{1}{2} \, , \quad c = \frac{1}{2} \, , \quad d = -\,\frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} &\int x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}s}{s-1} - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}s}{(s-1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}s}{s+1} - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}s}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|s-1| + \frac{1}{2\,(s-1)} + \frac{1}{2}\ln|s+1| + \frac{1}{2\,(s+1)} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + \frac{s}{s^2-1} + C \overset{s\geq 1}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1}{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}-1} + \frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}}{\frac{t+1}{t-1}-1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1\right)} + \frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}}{\frac{2}{t-1}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\right)^2}{2} + \frac{\sqrt{t^2-1}}{2} + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\right) + \frac{\sqrt{t^2-1}}{2} \underbrace{-\frac{1}{2}\ln 2 + C}_{\text{costante arbitraria}}$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{\sqrt{x^4-1}}{2} + C\,.$$

3) : Si tratta di una serie a termini positivi e la forma del termine generale della serie ci suggerisce di tentare di usare il criterio della radice. A questo fine calcoliamo il limite

$$q = \lim_{n\to\infty}\left(\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Questo limite è del tipo di indeterminatezza 1^∞ ed abbiamo i seguenti modi per calcolarlo :

Usando la formula di Taylor: Poiché

$$t(n) := n\,\sin\frac{1}{n} - 1 = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} - 1 \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ n\to\infty$$

e

$$\lim_{t\to 0}\Big(1+t\Big)^{\dfrac{1}{t}} = e\,,$$

abbiamo

$$q = \lim_{n\to\infty}\Big(1+t(n)\Big)^{\dfrac{1}{t(n)}\cdot\Big(n^2\,t(n)\Big)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\Big(n^2\,t(n)\Big)}$$

se il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(n^2\,t(n)\Big)$ esiste. Ma, applicando la formula di Taylor con il resto di Peano

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \text{ per } x\to 0$$

alla funzione $f(x) = \sin x$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x\to 0\,,\\
\sin\frac{1}{n} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \text{ per } n\to\infty\,,\\
t(n) = n\,\sin\frac{1}{n} - 1 &= -\frac{1}{6}\frac{1}{n^2} + \underbrace{n\,o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)}_{=\;o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \text{ per } n\to\infty\,,\\
n^2\,t(n) &= -\frac{1}{6} + o(1) \text{ per } n\to\infty\,.
\end{aligned}$$

Di consequenza

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n^2\,t(n)\Big) = -\frac{1}{6} \text{ e così } q = e^{-\dfrac{1}{6}}\,.$$

Usando la regola di L'Hospital: Calcoliamo il limite

$$d := \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2\,\ln\left(n\,\sin\frac{1}{n}\right) \overset{s=\frac{1}{n}}{=} \lim_{s\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin s}{s}}{s^2}$$

del tipo di indeterminatezza $\dfrac{0}{0}$ ed avremo $q = e^d$.

Ora, usando due volte la regola di L'Hospital si ottiene

$$\lim_{s\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin s}{s}}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{\ln\big(\sin x\big) - \ln s}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{\dfrac{\cos s}{\sin s} - \dfrac{1}{s}}{2\,s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 0} \frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^2\sin s} \\
&= \lim_{s\to 0} \left(\frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^3} \cdot \frac{s}{\sin s} \right) \\
&= \left(\lim_{s\to 0} \frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^3} \right) \cdot \left(\underbrace{\lim_{s\to 0} \frac{s}{\sin s}}_{=1} \right) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\cos s - s\sin s - \cos s}{6\,s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{-\sin s}{6\,s} \\
&= -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza $d = -\dfrac{1}{6}$ e $q = e^{-\frac{1}{6}}$.

Conclusione: Poché $q = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, il criterio della radice implica che la serie converge.

4) **:** I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3\,x^2 - 3\,y\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3\,y^2 - 3\,x\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\,x^2 - 3\,y = 0 \\ 3\,y^2 - 3\,x = 0 \end{array} \right. .$$

Dalla prima equazione risulta $y = x^2$ e, sostituendo questo valore di y nella seconda equazione, si ottiene

$$3\,x^4 - 3\,x = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } x = 1\,.$$

Cosicché i punti stazionari di f sono

$$(0\,,0) \;\text{ e }\; (1\,,1)\,.$$

Per poter dire se il punto stazionario $(0\,,0)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\,3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\,y\;.$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0\,,0) = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0\,,0) = -\,3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0\,,0) = 0$$

e la matrice hessiana di f in $(0\,,0)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0^2 - (-3)^2 = -9 < 0\;,$$

il punto $(0\,,0)$ è un punto di sella.

Ora le derivate parziali di secondo ordine in $(1\,,1)$ sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1\,,1) = 6\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1\,,1) = -\,3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1\,,1) = 6$$

e risulta la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6^2 - (-3)^2 = 27 > 0\;,$$

mentre l'elemento nell'angolo sinistro superiore è

$$6 > 0$$

la hessiana è definita positiva e quindi il punto $(1\,,1)$ è un punto di minimo locale.

Rimarchiamo che il valore di f in questo punto è $-\,1$ e, siccome f prende (per esempio) anche il valore $-\,28 = f(-\,2\,,-\,2)$, $(1\,,1)$ non è un punto di minimo assoluto (che quindi non esiste).

5) : La forma differenziale ω è definita per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ per quale $x > 0$ & $y \neq 0$. Perciò il dominio di ω è l'unione del quadrante

$$\big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0\,,\, y > 0\big\}$$

col quadrante

$$\big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0\,,\, y < 0\big\}\,.$$

Ricordiamo che una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

si chiama *chiusa* se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e si chiama *esatta* se ammette una *primitiva*, cioè una funzione $F(x\,,y)$ definita sullo stesso dominio che soddisfa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,. \tag{*}$$

Se una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

è esatta e le funzioni P e Q sono continuamente differenziabili, allora la forma è necessariamente chiusa. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma una forma differenziale chiusa, definita su un dominio stellato (un dominio convesso è stellato!), è automaticamente esatta.

La nostra forma ω è esatta sul quadrante $\big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0\,,\, y > 0\big\}$ che contiene la curva γ . Infatti,

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\,\frac{\ln(x)}{y}\Big) = \frac{\ln(x)}{y^2}$$

è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x\ln(x) - x}{y^2} = \frac{\ln x + x\,\dfrac{1}{x} - 1}{y^2} = \frac{\ln(x)}{y^2}\;,$$

perciò ω è chiusa. Poiché ogni quadrante è convesso, la forma risulta esatta in particolare sul quadrante $\big\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0\,,\, y > 0\big\}$.

Per trovare una primitiva, dobbiamo risolvere il sistema (*) . A questo fine integriamo Q rispetto ad y ottenendo

$$F(x\,,y) = \int \frac{x\ln(x) - x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x - x\ln(x)}{y} + C(x)\,,$$

ove $C(x)$ è un valore costante rispetto ad y , ossia una funzione solo di x . Ora scegliamo $C(x)$ tale che anche la prima equazione del sistema (*) sia soddisfatta : poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x - x\ln(x)}{y} + C(x)\Big) = \frac{-\ln(x)}{y} + C'(x)$$

sia uguale a

$$P(x,y) = -\frac{\ln(x)}{y}\;,$$

deve valere $C'(x) = 0 \iff C(x)$ costante. Di conseguenza le primitive di ω sono

$$F(x\,,y) = \frac{x - x\ln(x)}{y} + C\;.$$

Usando le primitive di ω è facile calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ con estremità

$$\gamma(1) = \big(1\,,e\big)\,,\quad \gamma(2) = \big(2\,,e^2\big)\;:$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = F\big(2\,,e^2\big) - F\big(1\,,e\big) &= \frac{2 - 2\cdot\ln 2}{e^2} - \frac{1 - 1\cdot\ln 1}{e}\\ &= \frac{2\big(1 - \ln 2\big)}{e^2} - \frac{1}{e}\;.\end{aligned}$$