NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 02.02.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} .$$

3) Trovare tutti i numeri complessi z soddisfacenti l'equazione

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \ .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\big((x^{-3})\,(x^2-1)\big)}{\ln^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x \ .$$

5) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^3} \ .$$

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\dfrac{x+1}{x-1}$ ha senso ed è > 0, cioè per $x+1>0$ & $x-1>0$ oppure $x+1<0$ & $x-1<0$. Perciò il dominio di f è

$$\big(-\infty, -1\big) \cup \big(1, +\infty\big)\,.$$

b) Per trovare gli asimtoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = -1 + \ln \frac{-0}{-2} = -\infty\ ,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 1 + \ln \frac{2}{+0} = +\infty\ .$$

Cosicché la retta $x=-1$ è un asintoto verticale di f da sinistra, mentre $x=1$ è un asintoto verticale da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1}\right) = 1\,.$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_\pm x + n_\pm = x + n_\pm\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$$
$$= 0\ .$$

Cosicché

$y = x$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$,
$y = x$ è un asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-3}{x^2-1}\ .$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$x_1 = -\sqrt{3}\,, \quad x_2 = \sqrt{3}\,.$$

Inoltre, f' è

$$> 0 \text{ in } \big(-\infty\,, -\sqrt{3}\big) \cup \big(\sqrt{3}\,, +\infty\big)$$

ed è

$$< 0 \text{ in } \big(-\sqrt{3}\,, -1\big) \cup \big(1, \sqrt{3}\big)\,,$$

perciò f risulta ad essere

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,, -\sqrt{3}\big)\,,\\
&\text{strettamente decrescente in } \big(-\sqrt{3}\,, -1\big)\,,\\
&\text{strettamente decrescente in } \big(1\,, \sqrt{3}\big)\,,\\
&\text{strettamente crescente in } \big(\sqrt{3}\,, +\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale e $\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale. Rimarchiamo che

$$\begin{gathered}
\sqrt{3} \approx 1,732\,,\\
f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 2\,\ln\big(\sqrt{3}+1\big) - \ln 2 \approx 2,039\,,\\
-\sqrt{3} \approx -1,732\,,\\
f(-\sqrt{2}) == -\sqrt{3} + \ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = -f(\sqrt{3}) \approx -2,039\,.
\end{gathered}$$

Possiamo inoltre trovare gli intervalli di convessità e di concavità di f, e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$f''(x) = \frac{2\,x\,(x^2-1) - 2\,x\,(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 4\,\frac{x}{(x^2-1)^2}\,.$$

Cosicché f'' non ha zeri (0 non si trova nel dominio di f !) e

$$\begin{aligned}
&f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-\infty, -1\big)\,,\\
&f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(1, +\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza f

$$\text{è concava in } \big(-\infty, -1\big)\,,$$
$$\text{è convessa in } \big(1, +\infty\big)$$

e non ha punti di flesso.

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$*$		$*$	$-$	0	$+$	
f''			$-$		$*$		$*$		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty\,*$	non def.	$*\,+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = x$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto $\Big(-\sqrt{3}\,, f\big(-\sqrt{3}\big)\Big)$, dove ha tangente orizzontale, poi scende a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a sinistra $x = -1$, restando sempre sotto l'asintoto :

Infatti, per $x < -1$ abbiamo $f(x) = x + \ln \dfrac{x+1}{x-1} < x$ perché $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1} \in (0\,,1)$.

Poi il grafico di f scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 1$ fino al punto $\Big(\sqrt{3}\,, f\big(\sqrt{3}\big)\Big)$, dove ha tangente orizzontale, e sale successivamente a $+\infty$, avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = x$, restando però sopra l'asintoto:

Infatti, per $x > 1$ abbiamo $f(x) = x + \ln \dfrac{x+1}{x-1} > x$ perché $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1} > 1$.

2) : Anzitutto rimarchiamo che il dominio di f è

$$\big\{x \in \mathbb{R}\,;\, x^2 > 1\big\} = \big(-\infty\,, -1\big) \cup \big(1\,, +\infty\big)$$

Tramite la sostituzione

$$t = x^2\,,\; t \in \big(1\,,+\infty\big)\,, \qquad \mathrm{d}t = 2\,x\,\mathrm{d}x$$

possiamo ridurre la complessità dell'integrando :

$$\int x\,\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,\mathrm{d}t\;.$$

Per il calcolo di integrali di questo tipo si usa la sostituzione

$$s = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,,\; s \in \big(1\,,+\infty\big)\,, \qquad t = \frac{s^2+1}{s^2-1}\;,$$

$$\mathrm{d}t = \frac{2\,s\,(s^2-1) - 2\,s\,(s^2+1)}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{4\,s}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s$$

che lo riduce al calcolo dell'integrale di una funzione razionale :

$$\int x\,\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\,\mathrm{d}t = \int\frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s\;.$$

Lo sviluppo di $\dfrac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{c}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2}$$

ed allora

$$-\,2\,s^2 = a\,(s-1)(s+1)^2 + b\,(s+1)^2 + c\,(s+1)(s-1)^2 + d\,(s-1)^2\;.$$

Risultano

$$a = -\,\frac{1}{2}\,, \quad b = -\,\frac{1}{2}\,, \quad c = \frac{1}{2}\,, \quad d = -\,\frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
&\int x\,\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{-\,2\,s^2}{(s^2-1)^2}\,\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{s-1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{s+1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}s}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|s-1| + \frac{1}{2\,(s-1)} + \frac{1}{2}\ln|s+1| + \frac{1}{2\,(s+1)} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + \frac{s}{s^2-1} + C \overset{s\geq 1}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1}{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}-1} + \frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}}{\frac{t+1}{t-1}-1} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}+1\right)} + \frac{\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}}{\frac{2}{t-1}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\right)^2}{2} + \frac{\sqrt{t^2-1}}{2} + C$$
$$= \ln\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}\right) + \frac{\sqrt{t^2-1}}{2} \underbrace{-\frac{1}{2}\ln 2 + C}_{\text{costante arbitraria}}$$
$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{\sqrt{x^4-1}}{2} + C\,.$$

3) : Alla risoluzione dell'equazione

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\,, \tag{*}$$

ci serve la forma trigonometrica della parte destra dell'equazione. Per questo scopo troviamo prima la forma trigonometrica di $1+i$ e di $\sqrt{3}+i$ ed usiamo poi la regola della moltiplicazione dei numeri complessi in forma trigonometrica per dedurre la forma trigonometrica del loro rapporto.

Riguardante $1+i = \big|1+i\big|\cdot\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$: poiché

$$\big|1+i\big| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

possiamo porre $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ed otteniamo

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Riguardante $\sqrt{3}+i=\left|\sqrt{3}+i\right|\cdot\left(\cos\psi+i\sin\psi\right)$: abbiamo

$$\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2\,,\qquad \cos\psi=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \sin\psi=\frac{1}{2}$$

e con $\psi=\dfrac{\pi}{6}$ risulta

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Di conseguenza

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Ora, se $z=r\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)$ e

$$z^2=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\,,$$

allora la formula di De Moivre implica

$$r^2\big(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)\big)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

cioè $r=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ e

$$2\theta=\frac{\pi}{12}+2k\pi\,,\ \text{ossia}$$
$$\theta=\frac{\pi}{24}+k\pi$$

con k un intero.

Perciò le soluzioni dell'equazione (*) nel campo complesso sono

$$z_k=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\big(\cos\theta_k+i\sin\theta_k\big)$$

ove

$$\theta_k=\frac{\pi}{24}+(k-1)\pi\,,\qquad k=1,2\,,$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche col periodo 2π, per $k = 3$ riotteniamo z_1, poi per $k = 4$ riotteniamo z_2, e cosi via. In altre parole, le soluzioni dell'equazione (*) nel campo complesso sono

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\cos\frac{\pi}{24} + i \sin\frac{\pi}{24} \right),$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{24} + \pi\right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\cos\frac{\pi}{24} + i \sin\frac{\pi}{24} \right) \\ &= -z_1 . \end{aligned}$$

Rimarco. Possiamo andare anche oltre e, calcolando $\cos\frac{\pi}{24}$ e $\sin\frac{\pi}{24}$, calcolare esplicitamente z_1, z_2.
Per calcolare $\cos\frac{\pi}{24}$ e $\sin\frac{\pi}{24}$, useremo le formule trigonometriche

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} :$$

con $\theta = \frac{\pi}{6}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\pi}{12} &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}, \\ \cos\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

e poi, con $\theta = \frac{\pi}{12}$,

$$\cos^2\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{24} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\,,$$

cioè

$$\cos\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}}{2\sqrt[4]{2}}\,,$$
$$\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}}{2\sqrt[4]{2}}\,,$$

soluzioni dell'equazione (*) nel campo complesso hanno la forma esplicita

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} + i\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}\right),$$
$$z_2 = -\,z_1\,.$$

4) **:** L'integrale è improprio sia in 1 che in $+\infty$. Esaminiamo la convergenza separatamente in 1 ed in $+\infty$.

Poiché

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\dfrac{x^2-1}{x^3}}\cdot\frac{1}{x^3}\right) = 1\,,$$

la funzione positiva

$$\big(1\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}$$

è asintoticamente equivalente in 1 a

$$\big(1\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto \frac{x^2-1}{\ln^\alpha x}\,.$$

Perciò l'integrale improprio

$$\int_1^e \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

converge per i stessi valori di α che l'integrale

$$\int\limits_1^e \frac{x^2-1}{\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x \overset{x=e^t}{=} \int\limits_0^1 \frac{e^{2t}-1}{t^\alpha}\,e^t\,\mathrm{d}t \, .$$

Ora, poiché

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t} = 2\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{2t} = 2$$

e così

$$\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{e^{2t}-1}{t^\alpha}\,e^t}{\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}\,e^t = 2 \in \big(0\,,+\infty\big)\ ,$$

l'integrale improprio $\int\limits_0^1 \dfrac{e^{2t}-1}{t^\alpha}\,e^t\,\mathrm{d}t$ converge per i stessi valori di α che l'integrale $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t$, cioè per $\alpha-1<1 \iff \alpha<2$.

Di conseguenza

$$\int\limits_1^e \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge se e solo se } \ \alpha<2\, .$$

D'altro canto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\dfrac{x^2-1}{x^3}}\cdot\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 1$$

implica che la funzione positiva

$$\big(1\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}$$

è asintoticamente equivalente in $+\infty$ a

$$\big(1\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto\frac{1}{x\,\ln^\alpha x}\;.$$

Perciò l'integrale improprio

$$\int\limits_e^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

converge per i stessi valori di α che l'integrale

$$\int\limits_e^{+\infty}\frac{1}{x\,\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè per $\alpha>1$:

Infatti, da

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\,\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}(\ln x)\\ &= \begin{cases}-\dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}x}+C & \text{se } \alpha\neq 1\\ \ln\big(\ln x\big)+C & \text{se } \alpha=1\end{cases}\end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^{b}\frac{1}{x\,\ln^\alpha x}\,\mathrm{d}x\\ &=\begin{cases}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}b}+\dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}e}\right) & \text{se } \alpha\neq 1\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\Big(\ln\big(\ln b\big)-\ln\big(\ln e\big)\Big) & \text{se } \alpha=1\end{cases}\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ +\infty & \text{se } \alpha<1\\ +\infty & \text{se } \alpha=1\end{cases}\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \dfrac{x^2-1}{x^3}}{\ln^\alpha x}\, \mathrm{d}x \ \text{ converge se e solo se } \ 1 < \alpha < 2 \,.$$

5) : Si tratta di una serie a termini positivi e la forma del termine generale della serie ci suggerisce di tentare di usare il criterio della radice. Per questo fine calcoliamo il limite

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(\left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3} \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} \,.$$

Questo limite è del tipo di indeterminatezza 1^∞ ed abbiamo i seguenti modi per calcolarlo :

Usando la formula di Taylor: Poiché

$$t(n) := n \sin \frac{1}{n} - 1 = \frac{\sin \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} - 1 \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ n \to \infty$$

e

$$\lim_{t\to 0} \Big(1 + t \Big)^{\dfrac{1}{t}} = e \,,$$

abbiamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + t(n) \Big)^{\dfrac{1}{t(n)} \cdot \Big(n^2 t(n) \Big)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \Big(n^2 t(n) \Big)}$$

se il limite $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(n^2 t(n) \Big)$ esiste. Ma, applicando la formula di Taylor con il resto di Peano

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + o(x^3) \ \text{ per } \ x \to 0$$

alla funzione $f(x) = \sin x$, si ottiene

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3) \ \text{ per } \ x \to 0 \,,$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3} \Big) \ \text{ per } \ n \to \infty \,,$$

$$t(n) = n \sin\frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{6}\frac{1}{n^2} + \underbrace{n\, o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)}_{=\ o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)} \quad \text{per } n \to \infty\,,$$

$$n^2\, t(n) = -\frac{1}{6} + o(1) \ \text{ per } n \to \infty\,.$$

Di consequenza

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n^2\, t(n)\Big) = -\frac{1}{6} \ \text{ e così } \ q = e^{-\frac{1}{6}}\,.$$

Usando la regola di L'Hospital: Calcoliamo il limite

$$d := \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(n \sin\frac{1}{n}\right) \overset{s=\frac{1}{n}}{=} \lim_{s\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin s}{s}}{s^2}$$

del tipo di indeterminatezza $\dfrac{0}{0}$ ed avremo $q = e^d$.

Ora, usando due volte la regola di L'Hospital si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin s}{s}}{s^2} &= \lim_{s\to 0}\frac{\ln\big(\sin x\big) - \ln s}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{\dfrac{\cos s}{\sin s} - \dfrac{1}{s}}{2\,s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^2\sin s} \\
&= \lim_{s\to 0}\left(\frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^3}\cdot\frac{s}{\sin s}\right) \\
&= \left(\lim_{s\to 0}\frac{s\cos s - \sin s}{2\,s^3}\right)\cdot\Bigg(\underbrace{\lim_{s\to 0}\frac{s}{\sin s}}_{=1}\Bigg) \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\cos s - s\sin s - \cos s}{6\,s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{-\sin s}{6\,s} \\
&= -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza $d = -\dfrac{1}{6}$ e $q = e^{-\frac{1}{6}}$.

Conclusione: Poché $q = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, il criterio della radice implica che la serie converge.