NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 2, Esame scritto del 02.02.2010

1) Si verifichi che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0 & \text{per } (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}$$

è continua in $(0\,,0)$ ed ammette derivata direzionale in $(0\,,0)$ lungo ogni direzione, ma non è differenziabile in $(0\,,0)$.

2) Si trovino tutti i punti nel piano nei quali la retta normale al grafico della funzione

$$f(x\,,y) = 2\,x^2 - 3\,y^3$$

è parallela al vettore $(1\,,1\,,1) \in \mathbb{R}^3$. Si scrivi le equazioni dei piani tangenti in questi punti.

3) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \right)^n .$$

e si giustifichi la risposta.

4) Calcolare i massimi e minimi locali della funzione $f(x\,,y)$ definita nel quadrante $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x > 0\,,\; y > 0\}$ tramite la formula

$$f(x,y) = x\,y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \; .$$

5) Mostrare che il campo vettoriale

$$F(x\,,y\,,z) = \left(2\,x \ln z\,, 2\,y \ln z\,, \frac{x^2 + y^2}{z} \right) ,$$

definita sul semispazio aperto $\big\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; z > 0\big\}$, è conservativo e determinarne il potenziale.

Soluzioni:

1) **:** La continuità di f in $(0\,,0)$ può essere verificata, per esempio, usando la disuguaglianza nota

$$|x\,y| \leq \frac{x^2+y^2}{2}\,, \qquad x\,,y\in\mathbb{R}:$$

Infatti,

$$x^2+y^2-2\,|x\,y| = |x|^2+|y|^2-2\,|x|\,|y| = \big(|x|-|y|\big)^2 \geq 0\,.$$

Ora

$$\big|f(x\,,y)\big| = \frac{|x\,y|}{x^2+y^2}\,|x| \leq \frac{|x|}{2}\,, \qquad (x\,,y)\neq(0\,,0)$$

implica che

$$\lim_{(x\,,y)\to(0\,,0)} \big|f(x\,,y)\big| = 0\,.$$

Sia adesso $(u\,,v)$ un versore, cioè un vettore di lunghezza $\sqrt{u^2+v^2}=1$. La derivata direzionale di f in $(0\,,0)$ lungo $(u\,,v)$ è il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\,u\,,0+t\,v)-f(0\,,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\,u\,,t\,v)}{t}$$

che esiste sempre : abbiamo per ogni $t\neq 0$

$$\frac{f(t\,u\,,t\,v)}{t} = \frac{1}{t}\,\frac{t^2u^2\,tv}{t^2u^2+t^2v^2} = \frac{u^2\,v}{u^2+v^2} = u^2\,v$$

e risulta trivialmente

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\,u\,,t\,v)}{t} = u^2\,v\,.$$

In particolare esistono le derivale parziali di f in $(0\,,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = 0\,.$$

Finalmente, perché $f(x\,,y)$ sia differenziabile in $(0\,,0)$, il rapporto

$$\frac{f(x\,,y)-f(0\,,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0\,,0)\,(x-0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0\,,0)\,(y-0)}{\big|(x\,,y)-(0\,,0)\big|}$$

$$= \frac{f(x\,,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

deve avere limite 0 in $(0\,,0)$. In particolare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, ponendo $y = \lambda x$ dovremmo avere

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(\lambda\,x)}{\big(x^2 + (\lambda\,x)^2\big)^{3/2}} = 0$$

Ma

$$\frac{x^2\,(\lambda\,x)}{\big(x^2 + (\lambda\,x)^2\big)^{3/2}} = \frac{\lambda}{\big(1+\lambda^2\big)^{3/2}} \cdot \frac{x^3}{|x|^3}$$

implica, per esempio,

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x^2\,(\lambda\,x)}{\big(x^2 + (\lambda\,x)^2\big)^{3/2}} = \frac{\lambda}{\big(1+\lambda^2\big)^{3/2}} \,.$$

Cosicché f non è differenziabile in $(0\,,0)$.

2) : Il piano tangente al grafico della funzione $f(x\,,y)$ in $\big(x_o\,,y_o\big)$ è il grafico della funzione lineare

$$L(x\,,y) = f(x_o\,,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)\,,$$

quindi la sua equazione è

$$z = f(x_o\,,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)\,,$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o) - \big(z - f(x_o\,,y_o)\big) = 0$$

Egli consiste da tutti i punti $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore

$$(x\,,y\,,z) - \big(x_o\,,y_o\,,f(x_o\,,y_o)\big) = \big(x-x_o\,,y-y_o\,,z-f(x_o\,,y_o)\big)$$

è ortogonale al vettore normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,,-1\right) \qquad (*)$$

Nel caso della funzione $f(x\,,y) = 2\,x^2 - 3\,y^3$ il vettore (*) è

$$\big(4\,x_o\,,-9\,y_o^2\,,-1\big)\,,$$

quindi la retta normale al grafico di $f(x\,,y)$ in $\big(x_o\,,y_o\big)$ è parallela al vettore $(1\,,1\,,1)$ esattamente quando

$$\big(4x_o\,,-9y_o^2\,,-1\big) = \lambda(1\,,1\,,1) \text{ per un } \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Perché questo accada, dobbiamo avere

$$\lambda=-1\,,\quad 4x_o=-1\,,\quad 9y_o^2=1\,.$$

Risulta che i punti nel piano nei quali la retta normale al grafico di questa funzione è parallela al vettore $(1\,,1\,,1)$ sono

$$\Big(-\frac{1}{4}\,,\frac{1}{3}\Big)\,,\qquad \Big(-\frac{1}{4}\,,-\frac{1}{3}\Big)\,.$$

Il piano tangente in $\Big(-\dfrac{1}{4}\,,\dfrac{1}{3}\Big)$ ha l'equazione

$$-\Big(x+\frac{1}{4}\Big)-\Big(y-\frac{1}{3}\Big)-\Big(z-\Big(\frac{2}{16}-\frac{3}{27}\Big)\Big)=0\,,$$

cioè

$$x+y+z-\frac{7}{72}=0\,,$$

mentre l'equazione del piano tangente in $\Big(-\dfrac{1}{4}\,,-\dfrac{1}{3}\Big)$ è

$$-\Big(x+\frac{1}{4}\Big)-\Big(y+\frac{1}{3}\Big)-\Big(z-\Big(\frac{2}{16}+\frac{3}{27}\Big)\Big)=0\,,$$

cioè

$$x+y+z+\frac{25}{72}=0\,,$$

3) : Si tratta di una serie a termini positivi, quindi la sua convergenza non può essere che assoluta.

Ora il termine n-esima della serie è una potenza n-esima, perciò per questa serie il criterio della radice è fatto su misura. Infatti, calcolando facilmente il limite

$$\lim_{n\to\infty}\bigg(\Big(n\,\ln\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)\Big)^n\bigg)^{1/n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n \\
&= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n\right) = \ln e^{x^2} \\
&= x^2 \ ,
\end{aligned}
$$

per il criterio della radice risulta che la serie converge per $x^2 < 1$ e diverge per $x^2 > 1$.

Resta a decidere cosa accade per $x^2 = 1$, cioè se la serie

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n \tag{**}
$$

converge o diverge.

Ricordiamo che la funzione $\ln(1+x)$ si sviluppa in serie di Taylor per $|x| < 1$:

$$
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ ... \ , \qquad x \in (-1\,,1)
$$

Risulta che per $0 < x < 1$ vale

$$
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}}_{>0} + ... > x - \frac{x^2}{2}
$$

ed otteniamo successivamente per ogni $n \geq 1$

$$
\begin{gathered}
\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \ , \\
n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{2n} \ , \\
\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n > \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n > 1 - n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

(dove per l'ultima disuguaglianza abbiamo applicato la disuguaglianza di Bernoulli). Di conseguenza il termine generale della serie (**) non converge a 0 e così la serie diverge.

Conclusione: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \right)^n$$

converge se e soltanto se $x^2 < 1$.

4) **:** I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}\ .$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2\,y = 50 \\ x\,y^2 = 20 \end{cases} \ .$$

Dividendo la prima equazione con la seconda si ottiene

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \ \text{ ossia } \ x = \frac{5}{2}\,y$$

Sostituendo ora questo valore di x nella seconda equazione risulta

$$\frac{5}{2}\,y^3 = 20 \ \text{ e poi } \ y = 2\ .$$

Cosicché f ha il solo punto stazionario $(5\,,2)$.

Per poter dire se il punto stazionario $(5\,,2)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}\ .$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5\,,2) = \frac{4}{5}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(5\,,2) = 1\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5\,,2) = 5$$

e la matrice hessiana di f in $(5\,,2)$ è

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}5 - 1^2 = 3 > 0\ ,$$

il punto $(0\,,0)$ è un punto di minimo locale.

5) : Ricordiamo che un campo vetoriale

$$F(x\,,y\,,z) = \big(F_1(x\,,y\,,z)\,,F_2(x\,,y\,,z)\,,F_3(x\,,y\,,z)\big)$$

si chiama *irrotazionale* se verifica le condizioni

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

e si chiama *conservativo* se ammette un *potenziale*, cioè una funzione $P(x\,,y\,,z)$ definita sullo stesso dominio che soddisfa

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F_1\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F_2\,, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = F_3\ . \tag{***}$$

Se un campo vettoriale

$$F(x\,,y\,,z) = \big(F_1(x\,,y\,,z)\,,F_2(x\,,y\,,z)\,,F_3(x\,,y\,,z)\big)$$

è conservativo e le funzioni $F_1\,,F_2\,,F_3$ sono continuamente differenziabili, allora il campo è necessariamente irrotazionale. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma un campo irrotazionale, definita su un dominio stellato (un dominio convesso è stellato!), è automaticamente conservativo.

Il nostro campo è irrotazionale. Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{2\,y}{z} - \frac{2\,y}{z} = 0\,, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= \frac{2\,x}{z} - \frac{2\,x}{z} = 0\,, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Poiché il dominio è un semispazio ed ogni semispazio è convesso, risulta che il nostro campo è conservativo.

Per trovare il potenziale, dobbiamo risolvere il sistema (***) . A questo fine integriamo prima F_1 rispetto ad x ottenendo

$$P(x\,,y\,,z) = \int 2\,x \ln z \, \mathrm{d}x = x^2 \ln z + C_1(y\,,z)\,,$$

ove $C_1(y\,,z)$ è un valore costante rispetto ad x , ossia una funzione solo di y e z . Ora scegliamo $C_1(y\,,z)$ tale che anche la seconda equazione del sistema (***) sia soddisfatta : poiché

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x\,,y\,,z) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 \ln z + C_1(y\,,z)\Big) = \frac{\partial C_1}{\partial y}(y\,,z)$$

sia uguale a

$$F_2(x\,,y\,,z) = 2\,y \ln z\ ,$$

dobbiamo avere

$$C_1(y\,,z) = \int 2\,y \ln z \, \mathrm{d}y = y^2 \ln z + C_2(z)$$

ove $C_2(z)$ è un valore costante rispetto ad y , ossia una funzione solo di z . Di conseguenza abbiamo

$$P(x\,,y\,,z) = x^2 \ln z + C_1(y\,,z) = x^2 \ln z + y^2 \ln z + C_2(z)\ .$$

Finalmente scegliamo $C_2(z)$ tale che la terza equazione del sistema (***) sia pure verificata, cioè che

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x\,,y\,,z) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2 \ln z + y^2 \ln z + C_2(z)\Big) = \frac{x^2+y^2}{z} + C_2'(z)$$

sia uguale a

$$F_3(x\,,y\,,z) = \frac{x^2+y^2}{z}\ .$$

Per questo deve valere $C_2'(z) = 0 \iff C_2(z)$ costante.

Di conseguenza le funzioni potenziale del campo vettoriale dato sono

$$P(x\,,y\,,z) = x^2 \ln z + y^2 \ln z + C = \big(x^2+y^2\big) \ln z + C\ ,$$

dove C è una costante.