NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2014/2015
Analisi Reale e Complessa, Esame del 02.09.2015

1) α) Sia $\big(E_k\big)_{k\geq 1}$ una successione di sottoinsiemi misurabili di $[0\,,1)$ tali che $\sum\limits_{k\geq 1} |E_k| > 1$. Si verifichi che esistono $k\,,k' \geq 1\,, k\neq k'$, per quali $E_k \cap E_{k'} \neq \emptyset$.

β) Sia $E\subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile di misura $|E|>1$. Si dimostri che esistono due elementi $x\neq x'$ di E tali che $x-x'\in\mathbb{Z}$.

Suggerimento: Si cerchi di applicare α) ad opportuni traslati degli insiemi $E\cap[\,n\,,n+1)\,,n\in\mathbb{Z}$.

2) Sia $s>0$. Usando l'identità

$$\frac{e^{-sx}}{x} = s\int\limits_1^{+\infty} e^{-sxy}\,\mathrm{d}y$$

ed il teorema di Fubini-Tonelli, si calcoli

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3) a) Mostrare che la funzione $\sin(z)$ è suriettiva su $\mathbb{C}$.
   b) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e siano f e g funzioni olomorfe su U tali che $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$ per ogni $z \in U$.
   Mostrare che la funzione $f + ig : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ammette un logaritmo olomorfo su U.
   c) Mostrare che esiste una funzione olomorfa $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $g(z) = \sin\big(h(z)\big)$ per ogni $z \in U$.

4) Si calcolino i seguenti integrali usando il teorema dei residui:

$$A) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3} \, ,$$

$$B) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\, e^{i\theta} \cos(\theta) - \frac{3}{4}} \, .$$

Soluzioni:

1) **:** α) Se gli insiemi $E_k\,,k\geq 1$, fossero a due a due disgiunti, allora per l'additività numerabile della misura di Lebesgue avremmo

$$\sum_{k\geq 1}|E_k| = \Big|\underbrace{\bigcup_{k\geq 1}E_k}_{\subset\,[0,1)}\Big| \leq \big|[\,0\,,1)\big| \leq 1\,.$$

Perciò gli insiemi $E_k\,,k\geq 1$, non sono a due a due disgiunti. In altre parole esiste (almeno) una coppia di indici diversi $k\,,k'\geq 1\,,k\neq k'$, tale che $E_k\cap E_{k'}\neq\emptyset$.

β) Gli insiemi

$$E_n := \big(E\cap[\,n\,,n+1)\big)-n = \big\{x-n\,;\,x\in E\cap[\,n\,,n+1)\big\}\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

sono sottoinsiemi misurabilii di $[\,0\,,1)$ e poiché

$$E = E\cap\mathbb{R} = E\cap\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\,n\,,n+1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\big(E\cap[\,n\,,n+1)\big),$$

l'additività numerabile e l'invarianza sotto le traslazioni della misura di Lebesgue implicano

$$1<|E| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\underbrace{E\cap[\,n\,,n+1)}_{=\,n+E_n}\big| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|E_n|\,.$$

Ora possiamo applicare il risultato in α) e dedurre l'esistenza di una coppia di indici diversi $n\,,n'\in\mathbb{Z}\,,n\neq n'$, tale che $E_n\cap E_{n'}\neq\emptyset$.

Sia $y\in E_n\cap E_{n'}$. Allora

$$\begin{aligned} y\in E_n &\Longrightarrow y = x-n \text{ per un } x\in E\,,\\ y\in E_{n'} &\Longrightarrow y = x'-n' \text{ per un } x'\in E \end{aligned}$$

e risulta $x-n=y=x'-n'$. Di conseguenza abbiamo per gli elementi $x\,,x'$ di E

$$x-x' = n-n'\begin{cases}\in\mathbb{Z}\,,\\ \neq 0\,,\end{cases}$$

cioè $x-x'\in\mathbb{Z}$ e $x\neq x'$.

2) : Abbiamo da calcolare l'integrale

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin^2 x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Big(\int_1^{+\infty} s\, e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x \,.$$

A questo fine useremo il teorema di Fubini-Tonelli per invertire l'ordine di integrazione :

La funzione $[\,0\,,+\infty) \times [\,1\,,+\infty) \ni (x,y) \longmapsto s\, e^{-sxy} \sin^2 x$ è continua, quindi misutabile, e positiva, perciò il teorema di Fubini-Tonelli implica

$$\begin{aligned} \int_{[\,0\,,+\infty)\times[\,1\,,+\infty)} s\, e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_1^{+\infty} s\, e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} s\, e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \,. \end{aligned}$$

Cosicché

$$I = \int_1^{+\infty} \Big(s \int_0^{+\infty} e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \,. \tag{1}$$

Per il calcolo di

$$\int_0^{+\infty} e^{-sxy} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

ci serve la primitiva di $x \longmapsto e^{-tx} \sin^2 x$ per $t > 0$:

Tramite integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int e^{-tx} \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x \,\mathrm{d}\frac{e^{-tx}}{-t} \\ &= -\frac{e^{-tx} \sin^2 x}{t} + \frac{2}{t} \int e^{-tx} (\sin x)(\cos x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{e^{-tx} \sin^2 x}{t} + \frac{2}{t} \int (\sin x)(\cos x) \,\mathrm{d}\frac{e^{-tx}}{-t} \\ &= -\frac{e^{-tx} \sin^2 x}{t} - \frac{2\, e^{-tx} (\sin x)(\cos x)}{t^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{t^2}\int e^{-tx}\big(\underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}_{=1-2\sin^2 x}\big)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{e^{-tx}\sin^2 x}{t}-\frac{2\,e^{-tx}(\sin x)(\cos x)}{t^2}\\
&\quad+\frac{2}{t^2}\int e^{-tx}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{t^2}\int e^{-tx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{e^{-tx}\sin^2 x}{t}-\frac{2\,e^{-tx}(\sin x)(\cos x)}{t^2}-\frac{2\,e^{-tx}}{t^3}\\
&\quad-\frac{4}{t^2}\int e^{-tx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

il che implica

$$
\int e^{-tx}\sin^2 x\mathrm{d}x=-\frac{e^{-tx}}{t^2+4}\left(t\sin^2 x+2\,(\sin x)(\cos x)+\frac{2}{t}\right). \tag{2}
$$

Usando ora (2) con $t=sy$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-sxy}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\
&=\;-\;\frac{e^{-sxy}}{s^2y^2+4}\left(sy\sin^2 x+2\,(\sin x)(\cos x)+\frac{2}{sy}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}\\
&=\frac{2}{(s^2y^2+4)\,sy}
\end{aligned}
$$

e tramite sostituzione in (1) risulta

$$
I=\int_1^{+\infty}\frac{2}{(s^2y^2+4)\,y}\,\mathrm{d}y\,.
$$

Ma lo sviluppo della funzione razionale $\dfrac{2}{(s^2y^2+4)\,y}$ in fratti semplici essendo

$$
\frac{2}{(s^2y^2+4)\,y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-\frac{s^2y}{s^2y^2+4}\right),
$$

la sua primitiva è

$$\int \frac{2}{(s^2y^2+4)\,y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(s^2y^2+4)}{s^2y^2+4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln y - \frac{1}{2}\ln\left(s^2y^2+4\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{y^2}{s^2y^2+4}\,.$$

Perciò possiamo concludere che

$$I = \frac{1}{4}\ln\frac{y^2}{s^2y^2+4}\,\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{s^2} - \ln\frac{1}{s^2+4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,,$$

cioè

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,, \qquad s > 0\,.$$

3) : a) Per la formula di Eulero abbiamo

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

e dobbiamo mostrare che per ogni $a \in \mathbb{C}$ esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = a\,.$$

Siccome l'immagine di e^{iz} è $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, basta fare vedere che esiste un numero complesso $w \neq 0$ tale che

$$\frac{w-w^{-1}}{2i} = a\,.$$

L'ultima equazione equivale a

$$w^2 - 2i\,a\,w - 1 = 0\,.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, si trova che un tale numero complesso = (non nullo in quanto soluzione della precedente equazione con termine noto non nullo) è dato da

$$w = a\,i + \sqrt{-\,a^2+1}\,,$$

dove $\sqrt{-\,a^2+1}$ è una delle soluzioni dell'equazione $z^2 = -\,a^2+1\,.$

b) Siccome U è semplicemente connesso, basta mostrare che $f + i\,g$ non si annulla mai in U, cioè che $f(z) + i\,g(z) \neq 0$ per ogni $z \in U\,.$ Ma se fosse $f(z_0) + i\,g(z_0) = 0$ per qualche z_0 in U, allora sarebbe

$$f(z_0)^2 + g(z_0)^2 = \big(\underbrace{f(z_0) + i\,g(z_0)}_{=0}\big)\big(f(z_0) - i\,g(z_0)\big) = 0\,,$$

che è contrario alla nostra ipotesi.

c) Sia $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che ih è un logaritmo olomorfo di $f + i\,g$ su U: cioè sia $e^{ih(z)} = f(z) + i\,g(z)$ per ogni $z \in U$ (tale h si ottiene dividendo per i il logaritmo olomorfo di $f+ig$ esistente per il punto b)).
Si ha $\sin\big(h(z)\big) = g(z)$ per ogni $z \in U$. Infatti, siccome

$$\big(f(z) + i\,g(z)\big)\big(f(z) - i\,g(z)\big) = f(z)^2 + g(z)^2 = 1$$

per ogni $z \in U$, si ha

$$\begin{aligned} e^{-ih(z)} &= f(z) - i\,g(z)\,, \\ e^{\,ih(z)} &= \frac{1}{f(z) - i\,g(z)} = f(z) + i\,g(z) \end{aligned}$$

e, per la formula di Eulero,

$$\begin{aligned} \sin\big(h(z)\big) &= \frac{e^{ih(z)} - e^{-ih(z)}}{2i} \\ &= \frac{\big(f(z) + i\,g(z)\big) - \big(f(z) - i\,g(z)\big)}{2i} = g(z) \end{aligned}$$

per ogni $z \in U$.

4) : A) Siccome la funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$ ed asintotica a $1/x^6$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$, l'integrale improprio proposto è convergente e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3} = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3}\,.$$

Sia $\gamma_{1,r}$ $(r > 0)$ il segmento orientato di primo estremo $-r$ e secondo estremo r, e sia $\gamma_{2,r}$ la semicirconferenza orientata in senso antiorario di primo estremo r e secondo estremo $-r$.

Siccome la funzione $\dfrac{1}{(z^2+4)^3}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$ e $2i$ non è contenuto nel semipiano superiore, per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3} = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+4)^3}$$
$$= 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{(z^2+4)^3}, 2i\right) - \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+4)^3}.$$

Ora, poiché $\dfrac{1}{(z^2+4)^3}$ è asintotica a $1/z^6$ per $|z| \to +\infty$ e $6 > 1$, per il lemma del grande cerchio abbiamo

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+4)^3} = 0.$$

D'altro canto $2i$ è un polo triplo per $\dfrac{1}{(z^2+4)^3}$, perciò

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{1}{(z^2+4)^3}, 2i\right) &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{(z-2i)^3}{(z^2+4)^3} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{1}{(z+2i)^3} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z\to 2i} \frac{12}{(z+2i)^5} = \frac{6}{4^5 i}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^3} = 2\pi i \, \frac{6}{4^5 i} = \frac{3\pi}{4^4}.$$

B) Si tratta dell'integrale, su un intervallo di ampiezza pari a 2π, di una funzione razionale di sin e cos. Come visto a lezione, ci si riduce al calcolo di un integrale di linea sulla circonferenza unitaria C^+, orientata in senso orario, della funzione razionale ottenuta con la 'sostituzione formale' $z := e^{i\theta}$ $\left(\text{e, di conseguenza, } \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}\right)$.

Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\,e^{i\theta}\cos(\theta) - \frac{3}{4}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) - \frac{3}{4}} \\
&= \int_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + 1 - \frac{3}{4}\right) iz} \\
&= \int_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz}\,.
\end{aligned}$$

Sia α_r la circonferenza di centro 0 e raggio $r > 1$, orientata in senso antiorario. Siccome la funzione integranda è olomorfa in un intorno della corona circolare delimitata da C^+ e α_r, per la versione sui numeri complessi del teorema di Gauss-Green, abbiamo

$$\int_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz} = \int_{\alpha_r} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz}\,.$$

Risulta

$$\int_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz} = \lim_{r \to +\infty} \int_{\alpha_r} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz}$$

e qui il limite è nullo per il lemma del grande cerchio $\left(\text{la funzione integranda è asintotica a } \dfrac{1}{iz^3} \text{ per } |z| \to +\infty \text{ e } 3 > 1\right)$. In conclusione

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\,e^{i\theta}\cos(\theta) - \frac{3}{4}} = 0\,.$$

Alternativamente, volendo usare il teorema dei residui, la funzione $\dfrac{1}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right) iz}$ è olomorfa fuori dai punti $0\,, \dfrac{i}{2}\,, \dfrac{-i}{2}$ e questi sono contenuti nel disco unitario aperto. Per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned}\int\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz} = & \quad 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,0\right) \\ & + 2\pi i Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,\frac{i}{2}\right) \\ & + 2\pi i Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,\frac{-i}{2}\right).\end{aligned}$$

Siccome $0\,,\frac{i}{2}\,,\frac{-i}{2}$ sono poli semplici, abbiamo

$$\begin{aligned}Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,0\right) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)i} = -4i\,,\\ Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,\frac{i}{2}\right) &= \lim_{z\to \frac{i}{2}}\frac{1}{\left(z+\frac{i}{2}\right)iz} = 2i\,,\\ Res\left(\frac{1}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz}\,,\frac{-i}{2}\right) &= \lim_{z\to \frac{-i}{2}}\frac{1}{\left(z-\frac{i}{2}\right)iz} = 2i\,.\end{aligned}$$

In conclusione, anche in questo modo, si ottiene

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\,e^{i\theta}\cos(\theta)-\frac{3}{4}} = \int\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)iz} = 2\pi i\big(-4i+2i+2i\big) = 0\,.$$