NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2015/2016
Calcolo 1, Esame scritto del 02.09.2016

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{-(\ln x)^2},$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1-t} \right)^k$$

al variare del parametro reale $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3) a) Si trovino le primitive della funzione $f : (0\,,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,.$$

b) Dire se converge o no l'integrale improprio

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x\,,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,+\infty) \times (0\,,+\infty)\,.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f.

b) Trovare i massimi e minimi globali di f.

5) Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x^\alpha y}{1+x^2} + \mathrm{arctg}\,(y)\right)\mathrm{d}x + \left(\ln(1+x^2) + \frac{x^\alpha}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y,$$

sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ oppure } y > 0\}$:

1. si determinino, se esistono, i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la forma è esatta;
2. per tali valori del parametro, se ne calcoli una primitiva;
3. sempre per tali valori del parametro, si calcoli l'integrale di ω sulla parte dell'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

contenuta nel primo quadrante, percorsa in senso antiorario.

Compito supplementare:

6) a) Sia α un parametro reale. Si calcoli l'integrale della forma differenziale

$$\omega_\alpha = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x + \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}y$$

sulla circonferenza unitaria, percorsa in senso antiorario.

b) Si determinino i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per quali la forma ω_α (definita sul piano senza l'origine) è chiusa.

c) Si determinino i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per quali la forma ω_α è esatta.

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\ln x$ ha senso in $\mathbb{R}$, cioè per $x > 0$. Perciò il dominio di f è $(0, +\infty)$.

b) Siccome

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} e^{-(\ln x)^2} = e^{-(-\infty)^2} = e^{-\infty} = 0\,,$$

f si estende per continuità ad una funzione su $[0, +\infty)$ che si annulla in 0 e che indicheremo con la stessa lettera f.

D'altro canto, siccome

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-(\ln x)^2} = e^{-(+\infty)^2} = e^{-\infty} = 0\,,$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = e^{-(\ln x)^2}(-2\ln x)\frac{1}{x} = -2\,e^{-(\ln x)^2}\,\frac{\ln x}{x}\,, \qquad x > 0\,.$$

Risulta che f' si annulla in $x = 0$ ed è

$$\begin{aligned} &> 0 \text{ in } (0, 1)\,, \\ &< 0 \text{ in } (1, +\infty)\,. \end{aligned}$$

Perciò f è

$$\begin{aligned} &\text{strettamente crescente in } [0, 1] \\ &\text{e strettamente decrescente in } [1, +\infty)\,. \end{aligned}$$

In particolare, il punto $x_{\max} = 0$ è un punto di massimo locale (ed anche globale, perché f è crescente in $[0, 1]$ e decrescente in $[1, +\infty)$). Il valore (massimo) di f in questo punto è

$$f(x_{\max}) = e^{-(\ln 1)^2} = e^0 = 1\,.$$

Osserviamo che (l'estensione per continuità di) f è derivabile a destra anche in $x = 0$:

$$f_d'(0) = \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{x}\, e^{-(\ln x)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{0<x\to 0} e^{-(\ln x)^2-\ln x} \overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2-t} \\
&= e^{-\infty} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che il grafico di f ammette nel punto $(0\,,0)$ semiretta tangente orizzontale a destra.

d) Per studiare le proprietà di convessità di f guardiamo il segno della seconda derivata

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\, 2\,e^{-(\ln x)^2}\,\frac{\ln x}{x}\Big) \\
&= 4\,e^{-(\ln x)^2}\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)^2 - 2\,e^{-(\ln x)^2}\,\frac{1-\ln x}{x^2} \\
&= e^{-(\ln x)^2}\,\frac{2}{x^2}\Big(2\,(\ln x)^2 + \ln x - 1\Big).
\end{aligned}
$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ è uguale al segno del polinomio di secondo grado in $\ln x$

$$2\,(\ln x)^2 + \ln x - 1\,.$$

Siccome i zeri del polinomio di secondo grado $2\,u^2+u-1$ sono $u_1 = -1$ e $u_2 = \dfrac{1}{2}$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&2\,u^2 + u - 1 > 0 \text{ per } u < -1\,, \\
&2\,u^2 + u - 1 < 0 \text{ per } -1 < u < 1/2\,, \\
&2\,u^2 + u - 1 > 0 \text{ per } u > 1/2\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza

$$
\begin{aligned}
&f''(x) > 0 \text{ per } x < e^{-1}\,, \\
&f''(x) < 0 \text{ per } e^{-1} < x < \sqrt{e}\,, \\
&f''(x) > 0 \text{ per } x > \sqrt{e}
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
&f \text{ è convessa in } [\,0\,,e^{-1}\,]\,, \\
&f \text{ è concava in } [\,e^{-1}\,,\sqrt{e}\,]\,, \\
&f \text{ è convessa in } [\,\sqrt{e}\,,+\infty)\,.
\end{aligned}
$$

In particolare

$$e^{-1} \approx 0,36788\,,$$
$$\sqrt{e} \approx 1,64872$$

sono punti di flesso di f.

Calcoliamo i valori di f e di f' nei punti di flesso :

$$f(e^{-1}) = e^{-(-1)^2} = e^{-1} \approx 0,36788\,,$$
$$f'(e^{-1}) = -\,2\,e^{-(-1)^2}\frac{-1}{e^{-1}} = 2\,,$$
$$f(\sqrt{e}\,) = e^{-(1/2)^2} = e^{-1/4} \approx 0,7788\,,$$
$$f'(\sqrt{e}\,) = -\,2\,e^{-(1/2)^2}\frac{\frac{1}{2}}{e^{1/2}} = -\,e^{-3/4} \approx -\,0,47137\,.$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	0		e^{-1} $0,36788$		1		$\sqrt{e}$ $1,64872$		$+\infty$
f'	0	$+$	2	$+$	0	$-$	$-\,e^{-3/4}$ $-\,0,47137$	$-$	0
f''		$+$	0		$-$		0	$+$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1} $0,36788$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-1/4}$ $0,7788$	$\searrow$	0

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

Il grafico sale dal punto $(0\,,0)$, dove ha semiretta tangente orizzontale a destra, fino al punto di flesso

$$(e^{-1}, e^{-1}) \approx (0,36788\,, 0,36788)\,,$$

nel quale il coefficiente angolare della retta tangente è 2 . In questo tratto il coefficiente angolare della retta tangente cresce, cioè il grafico è convesso.

Successivamente il grafico continua a salire fino al punto di massimo $(1\,,1)$, nel quale ha tangente orizzontale, per scendere poi fino al punto di flesso

$$(\sqrt{e}\,, e^{-1/4}) \approx (1,64872\,, 0,7788),$$

dove il coefficiente angolare della retta tangente è $-e^{-3/4} \approx -0,47137$. In questo tratto il coefficiente angolare della retta tangente decresce, ossia il grafico è concavo.

Successivamente il grafico continua a scendere avendo la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. In questo ultimo tratto il coefficiente angolare della retta tangente cresce da $-e^{-3/4} \approx -0,47137$ a 0, in particolare il grafico è convesso.

2) : Discutiamo prima la convergenza dela serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \tag{1}$$

e poi stabiliamo per che valori $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sostituendo $z = \dfrac{t}{1-t}$ in (1) abbiamo convergenza.

La serie di potenze (1) è ben nota : il suo raggio di convergenza è

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1\,,$$

perciò abbiamo convergenza assoluta per $|z| < 1$ e non convergenza per $|z| > 1$. Poi, per $z = 1$, la serie armonica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, mentre, per $z = -1$, la serie armonica a segni alterni $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ è convergente (semplicemente) secondo il criterio di Leibniz.

Ora :

Per $t > 1$ abbiamo $\left|\dfrac{t}{1-t}\right| = \dfrac{t}{t-1} > 1$, perciò la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Big(\frac{t}{1-t}\Big)^k \tag{2}$$

non converge.

Per $t \leq 0$ abbiamo invece $\left|\dfrac{t}{1-t}\right| = \dfrac{|t|}{1+|t|} < 1$ e risulta che la serie (2) è assolutamente convergente.

Infine, per $0 < t < 1$ abbiamo

$$\left|\frac{t}{1-t}\right| = \frac{t}{1-t} \lesseqqgtr 1 \Longleftrightarrow t \lesseqqgtr 1-t \Longleftrightarrow t \lesseqqgtr \frac{1}{2}\,,$$

perciò la serie (2)

converge assolutamente per $t < \dfrac{1}{2}$,

non converge per $t > \dfrac{1}{2}$.

Inoltre, per $t = \dfrac{1}{2}$ la serie (2) diventa la serie armonica, che diverge.

Possiamo quindi concludere che la serie (2)

converge assolutamente per $t \in \Big(-\infty\,,\dfrac{1}{2}\Big)$,

non converge per $t \in \Big[\dfrac{1}{2}\,,1\Big) \cup \big(1\,,+\infty\big)$.

Approfondimento.

Risolviamo il compito anche nell'ambito complesso, cioè discutiamo la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\Big(\frac{w}{1-w}\Big)^{k} \tag{3}$$

al variare del parametro complesso $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Procediamo similmente come di cui sopra. Sappiamo già che il raggio di convergenza della serie (1) è 1 e quindi abbiamo convergenza assoluta per $|z| < 1$ e non convergenza per $|z| > 1$. Poi, per $z = 1$, la serie armonica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, ma per ogni altro $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ (non solo per $z = -1$!!!), abbiamo convergenza (semplice) :

Sia $z \in \mathbb{C}\,, |z| = 1\,, z \neq 1$. Tramite *sommazione per parti* risulta per ogni intero $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Big(\sum_{j=0}^{k} z^j - \sum_{j=0}^{k-1} z^j \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} z^j - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} z^j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} z^j - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} z^j \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} z^j + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Big) \sum_{j=0}^{k} z^j - 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} z^j + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} z^j - 1 \,.
\end{aligned}
$$

Ora osserviamo che

$$
\Big| \sum_{j=0}^{k} z^j \Big| = \Big| \frac{z^{k+1} - 1}{z - 1} \Big| = \frac{|z^{k+1} - 1|}{|z - 1|} \leq \frac{2}{|z - 1|} \,, \qquad k \geq 0 \,.
$$

Perciò

$$
\Big| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} z^j \Big| \leq \frac{1}{n\,|z-1|} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty
$$

e la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} z^j$ è assolutamente convergente :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big| \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} z^j \Big|}_{\leq \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{2}{|z-1|}} &\leq \frac{2}{|z-1|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{2}{|z-1|} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Big) \\
&= \frac{2}{|z-1|} < +\infty \,.
\end{aligned}
$$

Risulta che la successione $\big(s_n\big)_{n\geq 1}$ delle some parziali della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ converge a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} z^j - 1 \in \mathbb{C} .$$

Ora studiamo il modulo di $z = \dfrac{w}{1-w}$ al variare di $w \neq 1$.

Ponendo $u = \mathrm{Re}\, w$ e $v = \mathrm{Im}\, w$ abbiamo $w = u + v\, i$ e

$$\left| \frac{w}{1-w} \right|^2 = \frac{|w|^2}{|1-w|^2} = \frac{u^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2} ,$$

quindi

$$\left| \frac{w}{1-w} \right| \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1 \iff u^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} (1-u)^2 \iff u \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{1}{2} ,$$

cioè

$$\left| \frac{w}{1-w} \right| \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1 \iff \mathrm{Re}\, w \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \frac{1}{2} .$$

Concludiamo che la serie (3)

converge assolutamente per $w \in \mathbb{C} , \mathrm{Re}\, w < \dfrac{1}{2}$,
non converge per $1 \neq w \in \mathbb{C} , \mathrm{Re}\, w > \dfrac{1}{2}$ e $w = \dfrac{1}{2}$,
converge semplicemente per $\dfrac{1}{2} \neq w \in \mathbb{C} , \mathrm{Re}\, w = \dfrac{1}{2}$.

3) : a) **Soluzione tramite la sostituzione di Eulero :**

Sotto la radice nella funzione integranda si trova un polinomio di secondo grado con due zeri reali diversi, cilè un prodotto di due polinomi di primo grado: $x(2-x)$. Trasformiamo l'espressione sotto la radice in un rapporto di due polinomi di primo grado portando fuori della radice uno dei fattori, per esempio $2-x$,

$$\sqrt{x(2-x)} = (2-x) \sqrt{\frac{x}{2-x}} ,$$

ed usiamo la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{x}{2-x}} , \quad x = \frac{2t^2}{1+t^2} , \quad \mathrm{d}x = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t .$$

Siccome

$$\sqrt{x(2-x)} = (2-x)\sqrt{\frac{x}{2-x}} = \Big(2 - \frac{2\,t^2}{1+t^2}\Big)t = \frac{2\,t}{1+t^2}\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+t^2}{2\,t}\,\frac{4\,t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= 2\,\mathrm{arctg}\,t + C\\ &= 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C\,.\end{aligned}$$

Soluzione alternativa :

Completiamo la parte contenente x nel polinomio sotto la radice nella funzione integranda, cioè $-x^2 + 2\,x$, a $\pm$ di un quadrato,

$$-x^2 + 2\,x = 1 - (x-1)^2,$$

ed usiamo la sostituzione

$$u = \arcsin(x-1)\,,\quad x = 1 + \sin u\,,\quad \mathrm{d}x = (\cos u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\,(\cos u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{\cos u}{\cos u}\,\mathrm{d}u\\ &= u + C\\ &= \arcsin(x-1) + C\,.\end{aligned}$$

Una terza soluzione :

Tramite la sostituzione

$$s = \sqrt{x}\,,\quad x = s^2\,,\quad \mathrm{d}x = 2\,s\,\mathrm{d}s$$

otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{s\sqrt{2-s^2}}\,2\,s\,\mathrm{d}s = 2\int \frac{1}{\sqrt{2-s^2}}\,\mathrm{d}s$$

ed usando ora la sostituzione

$$s = \sqrt{2}\sin v\,,\quad v = \arcsin\frac{s}{\sqrt{2}}\,,\quad \mathrm{d}s = \sqrt{2}\cos v\,\mathrm{d}v$$

concludiamo :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sqrt{2-s^2}}\,\mathrm{d}s = 2\int \frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2 v}}\,\sqrt{2}\cos v\,\mathrm{d}v$$
$$= 2\int \mathrm{d}v = 2\,v + C$$
$$= 2\arcsin\frac{s}{\sqrt{2}} + C$$
$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + C\,.$$

Compatibilità :

Abbiamo ottenuto tre diverse espressioni per le primitive di f:

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C\,, \quad \arcsin(x-1) + C\,, \quad 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + C\,.$$

Sembra strano, ma le tre famiglie di funzioni sono identiche: infatti, le differenze tra qualsiasi due delle tre funzioni

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,, \quad \arcsin(x-1)\,, \quad 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\,,$$

definite su $(0\,,2)$, sono costanti, tutte le tre funzioni avendo la stessa derivata.

Nel seguito verificheremo in modo elementare che, per ogni $x \in (0\,,2)$, abbiamo

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$$
$$\Big(\text{dove } \frac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{2-1}} - \arcsin(1-1)\Big) \tag{4}$$

e

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\,. \tag{5}$$

Sia infatti $\alpha := 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$. Siccome $\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} > 0$, abbiamo

$$0 < \alpha < \pi\,, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,.$$

Allora $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ ed usando formule trigonometriche note risulta

$$\begin{aligned}
\sin\Big(\alpha-\frac{\pi}{2}\Big) &= -\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) = -\cos\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} \\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2}\Big(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\Big) = \frac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1} \\
&= \frac{\dfrac{x}{2-x}-1}{\dfrac{x}{2-x}+1} = \frac{x-2+x}{x+2-x} = \frac{2x-2}{2} \\
&= x-1
\end{aligned}$$

Perciò $\alpha - \dfrac{\pi}{2} = \arcsin(x-1) \iff \alpha = \arcsin(x-1) + \dfrac{\pi}{2}$, che è proprio l'uguaglianza in (4).

D'altro canto $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ ed abbiamo

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \Big(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\Big)\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}}{\sqrt{1+\dfrac{x}{2-x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x+x}} \\
&= \sqrt{\frac{x}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza $\dfrac{\alpha}{2} = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} \iff \alpha = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$ e quindi vale anche (5).

b) L'integrale improprio

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

della funzione positiva f converge.

Per verificare la convergenza il modo più facile è usare la primitiva di f calcolata nel punto a) del compito. Scegliendo, per esempio,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{0<\varepsilon\to 0\\ 2>\delta\to 2}} \int_\varepsilon^\delta \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{0<\varepsilon\to 0\\ 2>\delta\to 2}} \left(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\delta}{2-\delta}} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\right) \\ &= 2\,\mathrm{arctg}\,(+\infty) - 2\,\mathrm{arctg}\,(0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 \\ &= \pi < +\infty\,.\end{aligned}$$

È possibile verificare la convergenza dell'integrale improprio (6) anche saltando il calcolo anteriore della primitiva dell'integranda ed usando il criterio del confronto :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}}_{\le \frac{1}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\Big|_{x=0}^{x=1} = 2 < +\infty\,,$$

$$\int_1^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}}_{\le \frac{1}{\sqrt{2-x}}}\,\mathrm{d}x \le \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{2-x}\,\Big|_{x=1}^{x=2} = 2 < +\infty\,.$$

4) : a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x\,,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,+\infty)\times(0\,,+\infty)\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^2}\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\,x - \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ 2\,y - \dfrac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Cosicché il solo punto stazionario di f è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per stabilire se questo punto è un punto di massimo o minimo locale di f, calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^3}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{4}{y^3}\,.$$

Perciò nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le derivate parziali di secondo ordine sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6$$

e quindi la matrice hessiana è

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Siccome

$$\det H_f(1,1) = 6 > 0\,,$$

la matrice $H_f(1,1)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Ma, siccome la traccia della hessiana è > 0, gli autovalori sono strettamente positivi e risulta che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale.

Concludiamo che f non ha nessun punto di massimo locale, mentre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il suo unico punto di minimo locale, nel quale prende il valore

$$f(1\,,1) = 1^2 + 1^2 + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 6\,.$$

b) Ogni punto di massimo globale di f sarebbe un punto di massimo locale e siccome f non ha punti di massimo locale, tanto più non può avere punti di massimo globale.

Diversamente, la funzione f non ha punti di massimo globale perché non è limitata superiormente. Infatti, per esempio,

$$f(k\,,1) = k^2 + 1^2 + \frac{2}{k} + \frac{2}{1} \geq k^2 \longrightarrow +\infty\,,$$

oppure

$$f\Big(1\,,\frac{1}{k}\Big) = 1^2 + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{1} + 2\,k \geq 2\,k \longrightarrow +\infty\,.$$

D'altro canto, siccome f ha il solo punto di minimo locale $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, il solo punto di minimo globale possibile è questo punto. Quindi se mostriamo che f ha almeno un punto di minimo globale, risulterà che l'unico punto di minimo globale di f è $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

A questo fine osserviamo che

$$\begin{aligned}
&f(1\,,1) = 6\,,\\
0 < x < \frac{1}{3}\,, y > 0 &\Longrightarrow f(x\,,y) > \frac{2}{x} > 6\,,\\
0 < y < \frac{1}{3}\,, x > 0 &\Longrightarrow f(x\,,y) > \frac{2}{y} > 6\,,\\
x > 3\,, y > 0 &\Longrightarrow f(x\,,y) > x^2 > 9 > 6\,,\\
y > 3\,, x > 0 &\Longrightarrow f(x\,,y) > y^2 > 9 > 6\,.
\end{aligned}$$

Risulta che per ogni vettore $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ nel primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$ e fuori del quadrato chiuso

$$K := \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\,;\ \frac{1}{3} \leq x \leq 3\,, \frac{1}{3} \leq y \leq 3 \right\}$$

abbiamo $f(x\,,y) > 6 = f(1\,,1)$.

Ma K è chiuso e limitato, perciò la restrizione della funzione continua f su K ha almeno un punto di minimo $\begin{pmatrix}x_K\\y_K\end{pmatrix}$. Siccome $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in K$, abbiamo

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(1\,,1) = 6 < f(x\,,y)$$

per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \notin K$ nel primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$.

Siccome per la scelta di $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$ vale ovviamente

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(x\,,y)\,, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K\,,$$

concludiamo che

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(x\,,y) \text{ per ogni } (x\,,y) \in (0\,,+\infty) \times (0\,,+\infty)\,.$$

In altre parole $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$ è punto di minimo globale per f.

Vediamo quindi che da una parte f ha almeno un punto di minimo globale, ma d'altra parte il solo punto di minimo globale possibile è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Risulta che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo globale di f.

5) : 1. Indichiamo :

$$P(x\,,y) := \frac{2x^\alpha y}{1+x^2} + \operatorname{arctg}(y)\,,$$
$$Q(x\,,y) := \ln(1+x^2) + \frac{x^\alpha}{1+y^2}\,.$$

Poiché la forma differenziale

$$\omega = P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

sia chiusa dobbiamo avere identicamente

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{7}$$

Ora i calcoli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^\alpha}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}\,,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2\,x}{1+x^2} + \frac{\alpha\,x^{\alpha-1}}{1+y^2}$$

implicano che ω è chiusa se e soltanto se $\alpha = 1$: basta scrivere (7) per $x = 1$ e $y = 1$ per vedere che ω può essere chiuso solo per $\alpha = 1$ e poi si vede subito che per $\alpha = 1$ l'uguaglianza (7) è soddisfatta identicamente.

Poiché il dominio A di ω è stellato, per $\alpha = 1$ la forma ω è anche esatta.

2. Abbiamo da trovare nel caso $\alpha = 1$ una primitiva per ω, cioè una una funzione F su A che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) &= \frac{2xy}{1+x^2} + \operatorname{arctg}(y)\ , \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) &= \ln(1+x^2) + \frac{x}{1+y^2}\ . \end{aligned}$$

La prima equazione implica

$$F(x\,,y) = \int\Big(\frac{2xy}{1+x^2} + \operatorname{arctg}(y)\Big)\,\mathrm{d}x = y\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg}(y) + c(y)$$

e perché anche la seconda equazione sia soddisfatta,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) = \ln(1+x^2) + \frac{x}{1+y^2} + c'(y)$$

dev'essere uguale a

$$\ln(1+x^2) + \frac{x}{1+y^2}\ .$$

In altre parole dobbiamo avere $c'(y) \equiv 0 \iff c(y)$ è una costante.

Concludiamo che le primitive di ω per $\alpha = 1$ sono

$$F(x\,,y) = y\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg}(y) + C\,.$$

3. Ricordiamo che se ω è una forma differenziale esatta avendo F come primitiva, e γ è un cammino regolare a tratti con punto iniziale $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e punto finale $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, allora

$$\int\limits_{\gamma} \omega = F(x_2\,,y_2) - F(x_1\,,y_1)\,.$$

Nel nostro caso $F(x\,,y) = y\ln(1+x^2) + x\operatorname{arctg}(y)$, il punto iniziale dell'arco di ellisse di integrazione è l'intersezione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

con la semiasse positiva delle ascisse, cioè $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed il punto finale dell'arco di integrazione è l'intersezione dell'ellisse con la semiasse positiva delle ordinate, cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Perciò l'integrale richiesto è uguale a

$$1 \ln(1+0^2) + 0 \operatorname{arctg}(1) - 0 \ln(1+2^2) + 2 \operatorname{arctg}(0) = 0 \,.$$

6) : a) Indichiamo con $\partial^+ U_1(0)$ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario. $\partial^+ U_1(0)$ si parametrizza di solito con la lunghezza d'arco :

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi \,.$$

Si ottiene :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial^+ U_1(0)} \omega_\alpha &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t - \sin t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^\alpha} (-\sin t)\, \mathrm{d}t + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t + \sin t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^\alpha} (\cos t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \Big(-\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t \Big) \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t \\
&= 2\pi \,.
\end{aligned}$$

b) La forma ω_α è chiusa se e soltanto se vale (7) per

$$\begin{aligned}
P(x\,,y) &:= \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \,, \\
Q(x\,,y) &:= \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha} \,.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} - \alpha \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} 2y \\
&= \frac{-x^2 + (2\alpha-1)y^2 - 2\alpha xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \,, \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} - \alpha \frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} 2x \\
&= \frac{(1-2\alpha)x^2 + y^2 - 2\alpha xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \,,
\end{aligned}$$

nel nostro caso l'identità (7) è equivalente a

$$-x^2 + (2\alpha - 1)y^2 = (1 - 2\alpha)x^2 + y^2 \,. \tag{8}$$

Ora (8) con $x = 0$ e $y = 1$ implica $\alpha = 1$. D'altra parte, per $\alpha = 1$ l'uguaglianza (8) è verificata per ogni x e y. Cosicché ω_α è chiusa se e soltanto se $\alpha = 1$.

c) Se una forma differenziale è esatta, allora il suo integrale lungo ogni cammino regolare a tratti chiuso è uguale a zero. Siccome, secondo il punto a) del compito, l'integrale di ω_α lungo la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario è uguale a 2π per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, deduciamo che la forma ω_α non è esatta per nessun valore di α.