NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2011/2012
Calcolo 1, Esame scritto del 03.09.2012

1) Data la funzione

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1} \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{k^4 + \sqrt{k}} - k^2 \right) .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2}\,, \qquad x \in \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

4) Trovare i massimi e minimi locali della funzione

$$f(x\,,y) = x^3 + xy^2 + 3\,xy\,.$$

5) Determinare i valori del parametro reale t per cui la forma differenziale

$$\omega = \Big(y\cos(x+y)\Big)\mathrm{d}x + \Big(t\sin(x+y) + y\cos(x+y)\Big)\mathrm{d}y$$

(i) è chiusa;

(ii) è esatta.

Si trovi poi una primitiva di ω per tutti i valori t per quali ω è esatta.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\ln \dfrac{x^2}{x-1}$ ha senso, cioè per

$$\frac{x^2}{x-1} > 0 \iff x^2 \neq 0 \text{ e } x-1 > 0 \iff x > 1\,.$$

Perciò il dominio di f è $\big(1\,,+\infty\big)$.

b) Per vedere se f ha asintoto verticale, calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{1<x\to 1} \ln \frac{x^2}{x-1} = \ln(+\infty) = +\infty\ .$$

Risulta che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale di f da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{x^2}{x-1}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{\ln(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x} \right) = 0 - 0\cdot 1 \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m\,x + n = n$$

(cioè un asintoto orizzontale), è l'esistenza del limite finito

$$n = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m\,x\big) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\ .$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{x^2}{x-1} = \ln(+\infty) = +\infty$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{2\,x\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x\,(x-1)} \ .$$

Risulta che f' si annulla solo in $x = 2$ ed è

$$\begin{aligned} &< 0 \text{ in } \big(1\,,2\big)\ , \\ &> 0 \text{ in } \big(2\,,+\infty\big)\ , \end{aligned}$$

Perciò f risulta ad essere

$$\text{strettamente decrescente in } \big(1\,,2\big]\,,$$

$$\text{strettamente crescente in } \big[2\,,+\infty\big)\,.$$

In particolare, $x = 2$ è un punto di minimo. Il valore minimo di f è

$$f(2) = \ln 4\,.$$

d) Per lo studio della convessità di f ci serve la sua seconda derivata :

$$f''(x) = \frac{x\,(x-1) - (2\,x-1)\,(x-2)}{x^2(x-1)^2} = \frac{-\,x^2 + 4\,x - 2}{x^2(x-1)^2} \ .$$

Le radici dell'equazione $-\,x^2 + 4\,x - 2 = 0$ sono $2 \pm \sqrt{2}$ ed abbiamo

$$\begin{aligned} &-\,x^2 + 4\,x - 2 > 0 \ \text{ per } \ 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}\,, \\ &-\,x^2 + 4\,x - 2 < 0 \ \text{ per } \ x < 2 - \sqrt{2} \ \text{ e } \ x > 2 + \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Poiché $2 - \sqrt{2} < 1$ si trova fuori del dominio $\big(1\,,+\infty\big)$ di f , deduciamo che f'' si annula solo in $2 + \sqrt{2} \approx 3,414$ e

$$f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-1\,,2 + \sqrt{2}\big)\,,$$

$$f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(2 + \sqrt{2}\,,+\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f

$$\begin{aligned} &\text{è convessa in } \big(-1\,,2 + \sqrt{2}\big]\,, \\ &\text{è concava in } \big[2 + \sqrt{2}\,,+\infty\big) \end{aligned}$$

e $2 + \sqrt{2}$ è un punto di flesso. Rimarchiamo che

$$f\big(2 + \sqrt{2}\big) = \ln\Big(4\,\big(1 + \sqrt{2}\big)\Big) \approx 2,2677\,,$$

$$f'\big(2+\sqrt{2}\big) = \frac{1}{\big(1+\sqrt{2}\big)^2} \approx 0,1716\,.$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	1		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$(1+\sqrt{2})^{-2}$	$+$	
f''			$+$		0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 4$	$\nearrow$	$\ln\big(4\,(1+\sqrt{2})\big)$	$\nearrow$	$+\infty$

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

La retta $x = 1$ è asintoto verticale da destra ed il grafico di f scende dall'infinito in 1 fino al s

$$\text{punto di minimo } \big(2\,, \ln 4\big)\,,$$

nel quale ha tangente orizzontale.

Successivamente il grafico comincia di salire ed attraversa il

$$\text{punto di flesso } \Big(2+\sqrt{2}\,, \ln\big(4\,(1+\sqrt{2})\big)\Big)$$

nel quale ha retta tangente con coefficiente angolare $(1+\sqrt{2})^{-2}$ ed in quale cambia la convessità di prima in concavità. Prima del punto di flesso il grafico di f si trova sopra la retta tangente al grafico in $x = 2+\sqrt{2}$, mentre dopo il punto di flesso il grafico scende sotto la retta tangente: si verifichi!

Finalmente, in $\big[2+\sqrt{2}\,, +\infty\big)$ il grafico concavo di f sale all'infinito.

2) : Si tratta di una serie a termini positivi. Rimarcando che

$$\begin{aligned}\sqrt{k^4+\sqrt{k}} - k^2 &= \frac{\Big(\sqrt{k^4+\sqrt{k}} - k^2\Big)\Big(\sqrt{k^4+\sqrt{k}} + k^2\Big)}{\sqrt{k^4+\sqrt{k}} + k^2} \\ &= \frac{\big(k^4+\sqrt{k}\big) - k^4}{\sqrt{k^4+\sqrt{k}} + k^2} \\ &= \frac{\sqrt{k}}{k^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{k^3\sqrt{k}}} + 1\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^3\sqrt{k}}} + 1} \, ,$$

possiamo usare confronto asintotico tra la nostra serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{k^4 + \sqrt{k}} - k^2 \right) \tag{*}$$

e la serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \, .$$

Infatti, poiché il limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k^4 + \sqrt{k}} - k^2}{\dfrac{1}{k\sqrt{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k^3\sqrt{k}}} + 1} = \frac{1}{2}$$

è finito, per il criterio del confronto asintotico la convergenza della serie armonica implica la convergenza della nostra serie (*) .

3) : Usando integrazione per parti, il calcolo della primitiva di f si riduce al calcolo della primitiva di una funzione razionale :

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{arctg}x}{x^2} \, \mathrm{d}x &= \int \left(\mathrm{arctg}x\right) \mathrm{d}\left(- \frac{1}{x} \right) \\ &= - \frac{\mathrm{arctg}x}{x} + \int \frac{1}{x\,(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{x\,(1+x^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{x\,(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1+x^2}$$

ed allora

$$1 = a\,(1+x^2) + (bx+c)\,x \, .$$

Risultano

$$a = 1\,, \quad b = -1\,, \quad c = 0$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln\big(1+x^2\big) + C \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C\,.
\end{aligned}$$

4) : I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 + 3\,xy\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 + y^2 + 3\,y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,xy + 3\,x\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3\,x^2 + y^2 + 3\,y = 0 \\ x\big(2\,y + 3\big) = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$x = 0 \ \text{ oppure } \ 2\,y + 3 = 0\,, \text{ cioè } y = -\frac{3}{2}\,.$$

Per $x = 0$ dalla prima equazione risulta $y^2 + 3\,y = 0$, cioè

$$y = 0 \text{ o } y = -3\,,$$

mentre per $y = -\frac{3}{2}$ la prima equazione si trasforma in $3\,x^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = 0$ e risulta

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

Cosicché i punti stazionari di f sono :

$$\big(0\,,0\big)\,, \quad \big(0\,,-3\big)\,, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right), \left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right).$$

Per poter stabilire la natura dei punti stazionari di f, calcoliamo anche le sue derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2\,y + 3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,x\;.$$

Perciò la matrice hessiana di f è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & 2\,y+3 \\ 2\,y+3 & 2\,x \end{pmatrix}$$

e

$$\det H_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} 6\,x & 2\,y+3 \\ 2\,y+3 & 2\,x \end{vmatrix} = 12\,x^2 - (2\,y+3)^2\;.$$

Ora, poiché

$$\det H_f(0\,,0) = -9 < 0\,, \quad \det H_f(0\,,-3) = -9 < 0\,,$$

$\big(0\,,0\big)$ e $\big(0\,,-3\big)$ sono punti di sella.

Poi, poiché

$$\det H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right) = 12\,\frac{3}{4} = 9 > 0$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore di $H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right)$ è il numero $3\sqrt{3} > 0$, il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right)$ è un punto di minimo locale.

Finalmente, poiché

$$\det H_f\left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right) = 12\,\frac{3}{4} = 9 > 0$$

e nell'angolo sinistro superiore di $H_f\left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right)$ si trova $-3\sqrt{3} < 0$, il punto $\left(-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,-\frac{3}{2}\right)$ è un punto di massimo locale.

5) : Indichiamo :

$$\begin{aligned} P(x\,,y) &:= y\cos(x+y)\,, \\ Q(x\,,y) &:= t\sin(x+y) + y\cos(x+y)\,. \end{aligned}$$

Poiché la forma differenziale

$$\omega = P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

sia chiusa dobbiamo avere identicamente

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Ora i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \cos(x+y) - y\sin(x+y)\,, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= t\cos(x+y) - y\sin(x+y) \end{aligned}$$

implicano che ω è chiusa se e soltanto se $t = 1$. Poiché il dominio $\mathbb{R}^2$ di ω è stellato, per $t = 1$ la forma ω è anche esatta.

Troviamo nel caso $t = 1$ una primitiva per ω, cioè una una funzione F su $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) &= y\cos(x+y)\,, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) &= \sin(x+y) + y\cos(x+y)\,. \end{aligned}$$

La prima equazione implica

$$F(x\,,y) = \int \Big(y\cos(x+y) \Big)\,\mathrm{d}x = y\sin(x+y) + c(y)$$

e perché anche la seconda equazione sia soddisfatta,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) = \sin(x+y) + y\cos(x+y) + c'(y)$$

dev'essere uguale a

$$\sin(x+y) + y\cos(x+y)\,.$$

In altre parole dobbiamo avere $c'(y) \equiv 0 \iff c(y)$ è una costante.
Concludiamo che le primitive di ω per $t = 1$ sono

$$F(x\,, y) = y \sin(x + y) + C\ .$$