NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 2, Esame scritto del 03.09.2012

1) Si verifichi che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{per } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{per } x+y = 0 \end{cases}$$

non è continua in $(0\,,0)$ ma ammette derivata direzionale in $(0\,,0)$ lungo ogni direzione.

2) Si verifichi che le rette normali al grafico della funzione

$$f(x\,,y) = x^2 y + y^3$$

non sono mai parallele al vettore $(1\,,1\,,1) \in \mathbb{R}^3$.

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{k^3 + \sqrt{k}} - \sqrt{k^3} \right) .$$

4) Trovare i massimi e minimi locali della funzione

$$f(x\,,y) = x^3 + xy^2 - 3\,xy\,.$$

5) Mostrare che il campo vettoriale

$$F(x\,,y) = \left(\ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{2\,x^2}{1 + x^2 + y^2}\,,\, \frac{2\,xy}{1 + x^2 + y^2} \right) ,$$

definita sul piano $\big\{(x\,,y)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\big\}$, è conservativo e determinarne una sua funzione potenziale.

Soluzioni:

1) **:** Per la continuità di f in $(0\,,0)$ dobbiamo avere, per qualsiasi

- successione $\Big((x_k\,,y_k)\Big)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^2$ convergente à $(0\,,0)$,

cioè per qualsiasi

- due successioni $\big(x_k\big)_{k\geq 1}$ e $\big(y_k\big)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ convergenti à 0 ,

la convergenza

$$f(x_k\,,y_k) \longrightarrow f(0\,,0) = 0\,.$$

In particolare, se $\big(x_k\big)_{k\geq 1}$ è una succesione di numeri reali convergente à 0 e $\big(y_k\big)_{k\geq 1}$ soddisfa $x_k + y_k = \dfrac{1}{k}$, allora dobbiamo avere

$$x_k - k\,x_k^2 = k\,x_k\left(\frac{1}{k} - x_k\right) = \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \longrightarrow 0\,.$$

Ma, per ogni numero reale $a > 0$, con la scelta $x_k = \dfrac{a}{\sqrt{k}}$ vale

$$x_k - k\,x_k^2 = \frac{a}{\sqrt{k}} - a^2 \longrightarrow -\,a^2\,,$$

o, diversamente, con la scelta $x_k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$ vale

$$x_k - k\,x_k^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sqrt[3]{k} \longrightarrow -\,\infty\,,$$

Di conseguenza f non è continua in $(0\,,0)$.

Per verificare che f ammette derivata direzionale in $(0\,,0)$ lungo ogni direzione, sia $(u\,,v)$ un versore arbitrario, cioè un qualsiasi vettore di lunghezza $\sqrt{u^2+v^2} = 1$. La derivata direzionale di f in $(0\,,0)$ lungo $(u\,,v)$ è il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\,u\,,0+t\,v) - f(0\,,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\,u\,,t\,v)}{t}$$

che esiste sempre :

Se $u + v \neq 0$ allora abbiamo per ogni $t \neq 0$

$$\frac{f(tu\,,tv)}{t} = \frac{1}{t}\,\frac{tu\,tv}{tu+tv} = \frac{u\,v}{u+v}$$

e risulta trivialmente

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tu\,,tv)}{t} = \frac{u\,v}{u+v}\ .$$

Se invece $u+v=0$ allora $f(tu\,,tv)=0$ per ogni $t\neq 0$ e quindi

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tu\,,tv)}{t} = 0\ .$$

2) : Il piano tangente al grafico della funzione $f(x\,,y)$ in $\big(x_o\,,y_o\big)$ è il grafico della funzione lineare

$$L(x\,,y) = f(x_o\,,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)\ ,$$

quindi la sua equazione è

$$z = f(x_o\,,y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o)\ ,$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,(x-x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,(y-y_o) - \big(z - f(x_o\,,y_o)\big) = 0$$

Egli consiste da tutti i punti $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$ tale che il vettore

$$(x\,,y\,,z) - \big(x_o\,,y_o\,,f(x_o\,,y_o)\big) = \big(x-x_o\,,y-y_o\,,z-f(x_o\,,y_o)\big)$$

è ortogonale al vettore normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\,,y_o)\,,\frac{\partial f}{\partial y}(x_o\,,y_o)\,,-1\right) \tag{*}$$

Nel caso della funzione $f(x\,,y) = x^2y + y^3$ il vettore (*) è

$$\big(2\,x_o y_o\,,x_o^2 + 3\,y_o^2\,,-1\big)\ ,$$

quindi la retta normale al grafico di $f(x\,,y)$ in $\big(x_o\,,y_o\big)$ è parallela al vettore $(1\,,1\,,1)$ esattamente quando

$$\big(2\,x_o y_o\,,x_o^2 + 3\,y_o^2\,,-1\big) = \lambda\,(1\,,1\,,1)\ \text{ per un }\ \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

Perché questo accada, dobbiamo avere $\lambda = -1$ e poi

$$2\,x_o\,y_o = \lambda = -1\,, \quad x_o^2 + 3\,y_o^2 = \lambda = -1\,.$$

Ma l'ugualità $x_o^2 + 3\,y_o^2 = -1$ non è possibile per nessun $(x_o\,, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

3) **:** Si tratta di una serie a termini positivi. Rimarcando che

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^3+\sqrt{k}}-\sqrt{k^3} &= \frac{\Big(\sqrt{k^3+\sqrt{k}}-\sqrt{k^3}\Big)\Big(\sqrt{k^3+\sqrt{k}}+\sqrt{k^3}\Big)}{\sqrt{k^3+\sqrt{k}}+\sqrt{k^3}} \\
&= \frac{\big(k^3+\sqrt{k}\big)-k^3}{\sqrt{k^3+\sqrt{k}}+\sqrt{k^3}} \\
&= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2\sqrt{k}}}+1\right)} \\
&= \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2\sqrt{k}}}+1}\,,
\end{aligned}$$

possiamo usare confronto asintotico tra la nostra serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sqrt{k^3+\sqrt{k}}-\sqrt{k^3}\Big) \tag{**}$$

e la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\,.$$

Infatti, poiché il limite

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k^3+\sqrt{k}}-\sqrt{k^3}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2\sqrt{k}}}+1} = \frac{1}{2}$$

è nonzero, per il criterio del confronto asintotico la divergenza della serie armonica implica la divergenza della nostra serie (**) .

4) : I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3\,xy\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 + y^2 - 3\,y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,xy - 3\,x\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3\,x^2 + y^2 - 3\,y = 0 \\ x\big(2\,y - 3\big) = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$x = 0 \ \text{ oppure } \ 2\,y - 3 = 0\,, \text{ cioè } y = \frac{3}{2}\,.$$

Per $x = 0$ dalla prima equazione risulta $y^2 - 3\,y = 0$, cioè

$$y = 0 \text{ o } y = 3\,,$$

mentre per $y = \dfrac{3}{2}$ la prima equazione prende la forma $3\,x^2 + \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} = 0$ e risulta

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Cosicché i punti stazionari di f sono :

$$\big(0\,,0\big)\,,\quad \big(0\,,3\big)\,,\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\right).$$

Per poter stabilire la natura dei punti stazionari di f, calcoliamo anche le sue derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2\,y - 3\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,x\ .$$

Perciò la matrice hessiana di f è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & 2\,y - 3 \\ 2\,y - 3 & 2\,x \end{pmatrix}$$

e

$$\det H_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} 6\,x & 2\,y-3 \\ 2\,y-3 & 2\,x \end{vmatrix} = 12\,x^2 - (2\,y-3)^2\ .$$

Ora, poiché

$$\det H_f(0\,,0) = -\,9 < 0\,, \quad \det H_f(0\,,3) = -\,9 < 0\,,$$

$\big(0\,,0\big)$ e $\big(0\,,3\big)$ sono punti di sella.
Poi, poiché

$$\det H_f\bigg(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\bigg) = 12\,\frac{3}{4} = 9 > 0$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore di $H_f\bigg(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{3}{2}\bigg)$ è $3\,\sqrt{3} > 0\,,$
il punto $\bigg(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{3}{2}\bigg)$ è un punto di minimo locale.
Finalmente, poiché

$$\det H_f\bigg(-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\bigg) = 12\,\frac{3}{4} = 9 > 0$$

e nell'angolo sinistro superiore di $H_f\bigg(-\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{3}{2}\bigg)$ si trova $-\,3\,\sqrt{3} < 0\,,$
il punto $\bigg(-\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{3}{2}\bigg)$ è un punto di massimo locale.

5) : Ricordiamo che un campo vetoriale

$$F(x\,,y) = \big(F_1(x\,,y)\,,F_2(x\,,y)\big)$$

si chiama *irrotazionale* se verifica la condizione

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

e si chiama *conservativo* se ammette un *potenziale*, cioè una funzione $P(x\,,y)$, definita sullo stesso dominio, che soddisfa

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F_1\,, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F_2\ . \qquad (***)$$

Se un campo vettoriale

$$F(x\,,y) = \big(F_1(x\,,y)\,,F_2(x\,,y)\big)$$

e conservativo e le funzioni $F_1\,,F_2$ sono continuamente differenziabili, allora il campo è necessariamente irrotazionale. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma un campo irrotazionale, definita su un dominio stellato (un dominio convesso è stellato!), è automaticamente conservativo.

Il nostro campo è irrotazionale. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} F_1(x\,,y) &= \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\,, \\ F_2(x\,,y) &= \frac{2\,xy}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ &= \left(\frac{2\,y}{1+x^2+y^2} - \frac{4\,x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}\right) - \frac{2\,y\,(1+x^2+y^2) - 4\,x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Poiché il dominio è tutto il piano che è convesso, risulta che il nostro campo è conservativo.

Per trovare il potenziale, dobbiamo risolvere il sistema (***) . A questo fine integriamo prima F_2 rispetto ad y ottenendo

$$P(x\,,y) = \int \frac{2\,xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = x\ln(1+x^2+y^2) + C(x)\,,$$

ove $C(x)$ è un valore costante rispetto ad y , ossia una funzione solo di x . Ora scegliamo $C(x)$ tale che anche la prima equazione del sistema (***) sia soddisfatta : poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x\,,y\,,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\ln(1+x^2+y^2) + C(x)\Big) \\ &= \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2} + C'(x) \end{aligned}$$

sia uguale a

$$F_1(x\,,y\,,z) = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\ ,$$

dobbiamo avere $C'(x) \equiv 0 \iff C(x)$ costante.

Di conseguenza le funzioni potenziale del campo vettoriale dato sono

$$P(x\,,y) = x\ln(1+x^2+y^2) + C\ ,$$

dove C è una costante.