NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2013/2014
Calcolo 2, Esame scritto del 05.02.2014

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' - 3y = e^x . \qquad (*)$$

b) Si trovi la soluzione dell'equazione (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 , \quad y''(0) = 7 .$$

2) Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} , \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso la frontiera del solido ellissoidale

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 .$$

Suggerimento: È conveniente usare il teorema della divergenza ed il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi , \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi , \\ z = 2\rho \cos\theta . \end{cases}$$

3) Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\limits_{\substack{0<x,y\leq 2 \\ xy\geq 1}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

che nell'intervallo $(-\pi\,,\pi]$ è data tramite la formula

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}\,,\qquad x\in(-\pi\,,\pi]\,.$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,,k\in\mathbb{Z}\,,$ di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2\,.$$

Soluzioni:

1) **:** a) L'equazione differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'equazione omogenea :

Il polinomio caratteristico $\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - 3\,\lambda = \lambda\,(\lambda^2 - 2\,\lambda - 3)$ ha i zeri semplici

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = -1\,, \quad \lambda_3 = 3\,,$$

perciò

$$e^{0\,x} = 1\,, \quad e^{(-1)\,x} = e^{-x}\,, \quad e^{3\,x}$$

sono tre soluzioni linearmente indipendenti. Cosicché la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y''' - 2\,y'' - 3\,y' = 0$$

è

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^{-x} + c_3\,e^{3\,x}\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti.}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, il modo più semplice è osservare che la non-omogeneità e^x è (multiplo costante) di una esponenziale con il coefficiente 1 di x nell'esponente diverso dai zeri del polinomio caratteristico, quindi esiste una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea della forma $c\,e^x$ con c una costante. Per la sostituzione di $y(x) = c\,e^x$ in l'equazione non omogenea si ottiene

$$c\,e^x - 2\,c\,e^x - 3\,c\,e^x = e^x$$

e risulta $c = -\dfrac{1}{4}$. Cosicché $-\dfrac{1}{4}\,e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

È possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea anche usando il metodo della variazione delle costanti :

Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) + c_2(x)\,e^{-x} + c_3(x)\,e^{3\,x}\,.$$

Per avere

$$y'(x) = c_2(x)\,(-e^{-x}) + c_3(x)\,(3\,e^{3\,x}) = -\,c_2(x)\,e^{-x} + 3\,c_3(x)\,e^{3\,x}$$

dobbiamo richiedere

$$c_1'(x) + c_2'(x)\, e^{-x} + c_3'(x)\, e^{3x} = 0\,, \tag{1}$$

e per avere poi

$$y''(x) = c_2(x)\, e^{-x} + c_3(x)\,(9\, e^{3x}) = c_2(x)\, e^{-x} + 9\, c_3(x)\, e^{3x}$$

dobbiamo richiedere anche

$$-\, c_2'(x)\, e^{-x} + 3\, c_3'(x)\, e^{3x} = 0\,. \tag{2}$$

Risulta

$$y'''(x) = c_2'(x)\, e^{-x} - c_2(x)\, e^{-x} + 9\, c_3'(x)\, e^{3x} + 27\, c_3(x)\, e^{3x}$$

e tramite sostituzione in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} &c_2'(x)\, e^{-x} - c_2(x)\, e^{-x} + 9\, c_3'(x)\, e^{3x} + 27\, c_3(x)\, e^{3x} \\ &- 2\big(c_2(x)\, e^{-x} + 9\, c_3(x)\, e^{3x}\big) \\ &- 3\big(-\, c_2(x)\, e^{-x} + 3\, c_3(x)\, e^{3x}\big) = e^{x}\,, \end{aligned}$$

cioè

$$c_2'(x)\, e^{-x} + 9\, c_3'(x)\, e^{3x} = e^{x}\,. \tag{3}$$

Per trovare $c_1'\,, c_2'\,, c_3'$ dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (1), (2), (3). Sommando (2) e (3) risulta

$$12\, c_3'(x)\, e^{3x} = e^{x} \iff c_3'(x) = \frac{1}{12}\, e^{-2x}\,,$$

sostituendo poi $c_3'(x) = \dfrac{1}{12}\, e^{-2x}$ in (2) otteniamo

$$-\, c_2'(x)\, e^{-x} + \frac{1}{4}\, e^{x} = 0 \iff c_2'(x) = \frac{1}{4}\, e^{2x}$$

ed ora da (1) risulta anche

$$c_1'(x) + \frac{1}{4}\, e^{x} + \frac{1}{12}\, e^{x} = 0 \iff c_1'(x) = -\frac{1}{3}\, e^{x}\,.$$

Per avere $c_1'(x) = -\dfrac{1}{3}\, e^{x}\,, c_2'(x) = \dfrac{1}{4}\, e^{2x}$ e $c_3'(x) = \dfrac{1}{12}\, e^{-2x}$ scegliamo

$$c_1(x) = -\frac{1}{3}\, e^{x}\,, \quad c_2(x) = \frac{1}{8}\, e^{2x}\,, \quad c_3(x) = -\,\frac{1}{24}\, e^{-2x}$$

ed otteniamo la soluzione particolare

$$y(x) = -\frac{1}{3}\,e^x + \frac{1}{8}\,e^x - \frac{1}{24}\,e^x = -\frac{1}{4}\,e^x$$

dell'equazione diferenziale non omogenea, la stessa ottenuta prima.

Avendo ora la soluzione generale dell'equazione omogenea e la soluzione particolare $x^2 e^x$ dell'equazione non omogenea, possiamo concludere che

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^{-x} + c_3\,e^{3x} - \frac{1}{4}\,e^x\,, \qquad c_1\,,c_2\,,c_3 \text{ costanti}$$

è la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2\,y'' - 3\,y' = e^x\,.$$

b) Poiché

$$\begin{aligned} y'(x) &= \;-\;c_2\,e^{-x} + 3\,c_3\,e^{3x} - \frac{1}{4}\,e^x\,, \\ y''(x) &= c_2\,e^{-x} + 9\,c_3\,e^{3x} - \frac{1}{4}\,e^x\,, \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 - \frac{1}{4}\,, \\ y'(0) &= \;-\;c_2 + 3\,c_3 - \frac{1}{4}\,, \\ y''(0) &= c_2 + 9\,c_3 - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Perciò la soluzione che soddisfa la condizione iniziale

$$y(0) = 0\,, y'(0) = 1\,, y''(0) = 7$$

si ottiene per le costanti $c_1\,,c_2\,,c_3$ soddisfacenti il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 - 1/4 &= 0 \\ -c_2 + 3\,c_3 - 1/4 &= 1 \\ c_2 + 9\,c_3 - 1/4 &= 7 \end{aligned} \right. \,.$$

Si trovano $c_1 = -\dfrac{4}{3}$, $c_2 = \dfrac{7}{8}$, $c_3 = \dfrac{17}{24}$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{8}\,e^{-x} + \frac{17}{24}\,e^{3x} - \frac{1}{4}\,e^x\,.$$

2) **:** Per poter applicare il teorema della divergenza, calcoliamo la divergenza del campo $V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$: poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2\big) = 2\,x\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(y^2\big) = 2\,y\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(z^2\big) = 2\,z\,,$$

risulta

$$(\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z) = 2\,(x+y+z)\,.$$

Usando il teorema della divergenza (Teorema di Gauss-Ostrogradski) risulta ora che il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ dal solido ellissoidale

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$$

è uguale all'integrale di volume

$$\begin{aligned} I := & \int\limits_{x^2+y^2+z^2/4\leq 1} (\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ = & \int\limits_{x^2+y^2+z^2/4\leq 1} 2\,(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Il calcolo di I possiamo svolgere

tramite il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\,\rho\cos\theta \end{cases} , \quad 0 \leq \rho \leq 1\,, 0 \leq \theta \leq \pi\,, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \;\; :$$

Poiché il determinante della matrice di Jacobi del cambiamento è

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\,\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ 2\,\cos\theta & -\,2\,\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\,\rho^2\sin\theta\,, \end{aligned}$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} 2\,\rho\big(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+2\cos\theta\big)2\,\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \iint\limits_{\substack{0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} \big(\sin^2\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi+2\sin\theta\cos\theta\big)\underbrace{\Bigg(\int_0^1 4\,\rho^3\,\mathrm{d}\rho\Bigg)}_{=\,1}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin^2\theta\underbrace{\Bigg(\int_0^{2\pi}\big(\cos\varphi+\sin\varphi\big)\varphi\Bigg)}_{=\,0}\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi 2\sin\theta\cos\theta\underbrace{\Bigg(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\Bigg)}_{=\,2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= 2\,\pi\int_0^\pi \sin(2\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\,\pi\cos(2\,\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Più semplicemente, possiamo calcolare I anche

sfruttando le proprietà di simmetrie dell'integrale :

Osserviamo che il solido ellissoidale E definita da

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\le 1$$

è simmetrico rispetto all'origine e l'integrando $2\,(z+y+z)$ è dispari rispetto alla stessa simmetria. In altre parole, la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-\,x\\ -\,y\\ -\,z\end{pmatrix}$$

applica E su se stesso e $2\,(\xi+\eta+\zeta)=-\,2\,(z+y+z)$. Perciò usando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x=-\,\xi\\ y=-\,\eta\\ z=-\,\zeta\end{cases},$$

il determinante della matrice di Jacobi di cui è uguale a -1, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_E 2\,(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int\limits_E 2\,(-\xi-\eta-\zeta)\cdot|-1|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= -\int\limits_E 2\,(\xi+\eta+\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= -\,I\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza vale $2I = 0 \iff I = 0$.

Concludiamo che il flusso uscente del campo vettoriale V attraverso la frontiera del solido ellissoidale

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1\,.$$

è uguale a 0.

3) : **Soluzione usando direttamente la formula di riduzione:**

Il dominio di integrazione D è descritto dalle disuguaglianze

$$0 < x, y \leq 2\,, \quad x\,y \geq 1\,.$$

Perciò $x \geq \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{2}$ e risulta che D è descritto alternativamente anche dalle disuguaglianze

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2\,, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq 2\,.$$

In altre parole D è normale rispetto all'asse delle y, essendo la regione tra i grafici delle funzioni $\dfrac{1}{x}$ e costante 2 definite sull'intervallo $\left[\dfrac{1}{2}\,,2\right]$.

Cosicché, per il teorema di riduzione abbiamo

$$\int\limits_{\substack{0<x,y\leq 2\\ x\,y\geq 1}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{1/2}^{2}\Bigg(\int\limits_{1/x}^{2}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\Bigg)\mathrm{d}x = \int\limits_{1/2}^{2}\Bigg(\frac{y^2}{2\,x}\Bigg|_{y=1/x}^{y=2}\Bigg)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{1/2}^{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2\,x^3} \right) \mathrm{d}x = 2\,\ln x \Big|_{y=1/2}^{y=2} + \frac{1}{4\,x^2} \Big|_{y=1/2}^{y=2}$$

$$= \left(\ln 2 - \ln \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{16} - 1$$

$$= 4\,\ln 2 - \frac{15}{16}\,.$$

Soluzione usando una sostituzione prima della riduzione:

Useremo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} s > 0\,,\ s^2 = x\,y \\ t > 0\,,\ t^2 = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = \dfrac{s}{t} \\ y = s\,t \end{cases} \quad .$$

Il dominio di integrazione D, descritto dalle disuguaglianze

$$0 < x, y \leq 2\,, \quad x\,y \geq 1\,,$$

si trasforma in il dominio descritto da

$$1 \leq s \leq 2\,, \quad \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2}{s}\ :$$

$0 < x, y \leq 2$ e $x\,y \geq 1$ implicano

$$s = \sqrt{x\,y} \geq 1\,, \quad s = \sqrt{x\,y} \leq \sqrt{4} = 2$$

e

$$t = \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x\,y}{x^2}} = \frac{s}{x} \geq \frac{s}{2}\,, \quad \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{x\,y}{y^2}} = \frac{s}{y} \geq \frac{s}{2}\,,$$

cioè

$$\frac{s}{2} \leq t \leq \frac{2}{s}\,.$$

Viceversa, $1 \leq s \leq 2$ e $\dfrac{s}{2} \leq t \leq \dfrac{2}{s}$ implicano

$$x = \frac{s}{t} \begin{cases} > 0 \\ \leq 2 \end{cases} \quad , \quad y = s\,t \begin{cases} > 0 \\ \leq 2 \end{cases} \quad , \quad x\,y = s^2 \geq 1\,.$$

Il determinante della matrice di Jacobi della sostituzione essendo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/t & -s/t^2 \\ t & s \end{vmatrix} = \frac{2\,s}{t}\,,$$

per il teorema di riduzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int\limits_{\substack{0<x,y\le 2\\ x\,y\ge 1}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{\substack{1\le s\le 2\\ s/2\le t\le 2/s}} t^2\,\frac{2\,s}{t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_1^2 \Bigg(\int\limits_{s/2}^{2/s} 2\,s\,t\,\mathrm{d}t\Bigg)\mathrm{d}s = \int\limits_1^2 \bigg(\frac{4}{s} - \frac{s^3}{4}\bigg)\mathrm{d}s \\ &= 4\,\ln 2 - \frac{15}{16}\,. \end{aligned}$$

4) : a) Chiaramente

$$c_o(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Per $k \neq 0$ otteniamo tramite integrazioni per parte

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\frac{e^{-ikx}}{-i\,k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Bigg(\frac{e^{-ikx}}{-i\,k}\,\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{2\,i\,k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Bigg(\frac{e^{-ik\pi}}{-i\,k} + \frac{e^{ik\pi}}{-i\,k} + \frac{1}{2\,i\,k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\frac{e^{-ikx}}{-i\,k}\Bigg) \\ &= \frac{\cos(k\pi)}{-i\,k\,\pi} + \frac{1}{4\,i\,k\,\pi}\Bigg(\frac{e^{-ikx}}{-i\,k}\,\cos\frac{x}{2}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2\,i\,k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\Bigg) \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k}{-i\,k\,\pi} + \frac{1}{8\,k^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^k}{k\,\pi}\,i + \frac{1}{4\,k^2}\,c_k(f)$$

e risulta

$$\left(1 - \frac{1}{4\,k^2}\right) c_k(f) = \frac{(-1)^k}{k\,\pi}\,i\,,$$

$$c_k(f) = \frac{(-1)^k}{\pi}\,\frac{4\,k}{4\,k^2 - 1}\,i\,.$$

Cosicché la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{\pi} \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} (-1)^k\,\frac{4\,k}{4\,k^2 - 1}\,i\,e^{ikx}\,.$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è uguale ad $f(x)$ se x non è multiplo intero dispari di π ed è uguale a $\dfrac{1-1}{2} = 0$ se x è multiplo intero dispari di π . Cosicché

$$\frac{1}{\pi} \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} (-1)^k\,\frac{4\,k}{4\,k^2 - 1}\,i\,e^{ikx} = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} & \text{per } \ x \in (-\pi\,,\pi) \\ \quad 0 & \text{per } \ x = -\pi\,,\pi \end{cases}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = 0\,, \qquad k \geq 0\,,$$

$$b_k(f) = i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\,\frac{8\,k}{4\,k^2 - 1}\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\,\frac{8\,k}{4\,k^2 - 1}\,\sin(kx) = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} & \text{per } \ x \in (-\pi\,,\pi) \\ \quad 0 & \text{per } \ x = -\pi\,,\pi \end{cases}\,.$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|c_k(f)\right|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

cioè

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2} \frac{16\,k^2}{(4\,k^2-1)^2} = \frac{1}{2} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{(4\,k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}\,.$$