NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 06.02.2009

Corso di Laurea in Fisica dell'Atmosfera e Meteorologia, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 06.02.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{1 + x^2} \, .$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \big(\operatorname{tg} x\big)\big(\log \cos x\big) \, .$$

3) Trovare tutte le radici cubiche complesse del numero $i-1$, cioè tutti i numeri complessi z soddisfacenti l'equazione

$$z^3 = i - 1 \ .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x \ .$$

5) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \right)$$

e si giustifichi la risposta.

Soluzioni:

1) **:** a) Il dominio di f è ovviamente l'insieme $\mathbb{R}$ di tutti i numeri reali.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

Si vede subito pure che esiste il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \overset{\text{sin è continua}}{=} \sin\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi\, x}{1+x^2}\right) = \sin 0 = 0 \, .$$

Cosicché $y = 0$ è asintoto orizzontale (un tipo particolare di asintoto obliquo) sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \left(\cos \frac{\pi\, x}{1+x^2}\right) \pi \, \frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} = \pi \, \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cos \frac{\pi\, x}{1+x^2} \, .$$

Poiché f' si annulla in $-1\,,1$, è > 0 in $(-1\,,1)$ ed è < 0 in $(-\infty\,,-1)$ e $(1\,,+\infty)$, risulta che f è

strettamente decrescente in $(-\infty\,,-1)$,

strettamente crescente in $(-1\,,1)$,

strettamente decrescente in $(1\,,+\infty)$.

In particolare, -1 è un punto di minimo locale e 1 è un punto di massimo locale.

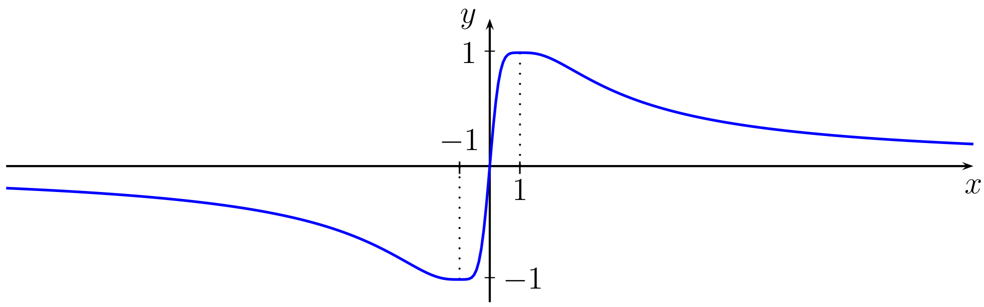
Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	π	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f scende da 0 fino al punto di minimo locale $(-1\,,-1)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi, passando attraverso $(0\,,0)$, sale al punto di massimo locale $(1\,,1)$, nel quale ha di nuovo tangente orizzontale, dopo di che scende verso l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.

Il grafico di f :



Commenti sui punti di flesso di f .

Guardando il grafico di f ci accorgiamo che a sinistra di 0 f dev'essere convessa, mentre a destra concava, avendo così in 0 un punto di flesso. Poi, attorno al punto di massimo locale 1 f dev'essere concava, mentre avvicinando l'asintoto orizzontale $y = 0$ da sopra sempre di più per $x \to +\infty$, f deve diventare convessa. Perciò dopo 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un punto di flesso. Poiché f è una funzione dispari, anche gli opposti di questi punti di flesso saranno punti di flesso.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di f . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\pi\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\right) \\ &= \pi\,\frac{-2\,x\,(1+x^2)^2-(1-x^2)\,2\,(1+x^2)\,2\,x}{(1+x^2)^4}\,\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2} \\ &\qquad\qquad -\pi\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\sin\frac{\pi\,x}{1+x^2}\,\pi\,\frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} \qquad (*) \\ &= \frac{2\,\pi\,x\,(x^2-3)}{(1+x^2)^3}\,\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}-\frac{\pi^2(x^2-1)^2}{(1+x^2)^4}\,\sin\frac{\pi\,x}{1+x^2}\ . \end{aligned}$$

Poiché f'' è dispari, basta studiare il segno di $f''(x)$ solo per $x \geq 0$.

Anzitutto, $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ per ogni $x \geq 0$, con ugualità solo per $x = 1$.

Infatti,

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq 1+x^2-2x = (1-x)^2.$$

Risulta che

$$0 \leq \sin\frac{\pi x}{1+x^2} \leq 1\,,\ 0 \leq \cos\frac{\pi x}{1+x^2} \leq 1\,, \qquad x \geq 1$$

e

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi x}{1+x^2} = 0 &\iff x = 0 \iff \cos\frac{\pi x}{1+x^2} = 1\,, \\ \sin\frac{\pi x}{1+x^2} = 1 &\iff x = 1 \iff \cos\frac{\pi x}{1+x^2} = 0\,, \end{aligned}$$

Tenendo conto di (*) si vede che $f''(0) = f''(1) = 0$ e

$$f''(x) < 0\,, \qquad 1 \neq x \in \big(0\,, \sqrt{3}\big]\,. \tag{**}$$

In particolate $x = 0$ è un punto di flesso della funzione dispari f, alla sinistra di quale f è convessà, ed alla destra concava.

Determinare il segno di $f''(x)$ per $x \geq \sqrt{3}$ non è compito facile, perché $f''(x)$ è una non esplicitamente controllabile somma di due addendi di segno opposto ed ogniuno di questi è un prodotto di una funzione razionale e la composizione di una funzione trigonometrica con una funzione razionale. Fortunatamente possiamo semplificare la situazione rescrivendo la formula (*) per $f''(x)$ come prodotto di un fattore che resta > 0 in tutto il tratto $\big(\sqrt{3}\,, +\infty\big)$, e perciò non ci da fastidio anche se è complicato, ed un altro fattore $g(x)$ che è la somma di una funzione razionale e l'opposta della composizione della tangente con un'altra funzione razionale :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\pi^2\,(x^2-1)^2}{(1+x^2)^4}\left(\cos\frac{\pi x}{1+x^2}\right)\left(\frac{2x\,(x^2-3)(1+x^2)}{\pi\,(x^2-1)^2} - \operatorname{tg}\frac{\pi x}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2\,(x^2-1)^2}{(1+x^2)^4}\left(\cos\frac{\pi x}{1+x^2}\right) g(x)\,. \end{aligned}$$

Il secondo addendo nella formula che definisce $g(x)$ è l'opposta della composizione di tg, una funzione strettamente crescente in $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)$, e la funzione $\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}$ che decresce strettamente in $[1\,,+\infty)$, quindi è strettamente crescente in $[1\,,+\infty)$. Ma anche la funzione $\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}$ ($=1$ in $u=0$) è strettamente crescente in $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)$:

> Infatti,
>
> $$\left(\frac{\operatorname{tg}u}{u}\right)' = \frac{1}{u\,\cos^2 u} - \frac{\operatorname{tg}u}{u^2} = \frac{u-(\sin u)(\cos u)}{u^2\cos^2 u} = \frac{2\,u-\sin(2\,u)}{2\,u^2\cos^2 u}$$
>
> è >0 per ogni $0<u<\dfrac{\pi}{2}$.

Di conseguenza anche l'opposta della composizione di $\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}$ con $\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}$ è strettamente crescente in $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)$ e perciò possiamo addizionalmente semplificare la situazione tramite la sostituzione di $g(x)$ con la somma $h(x)$ di una funzione razionale, che è più semplice del primo addendo nella formula per $g(x)$, e l'opposta della composizione di $\dfrac{\operatorname{tg}u}{u}$ con una funzione razionale :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\pi^3 x\,(x^2-1)^2}{(1+x^2)^5}\left(\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\right)\left(\frac{2\,(x^2-3)(1+x^2)^2}{\pi^2(x^2-1)^2} - \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{\pi^3 x\,(x^2-1)^2}{(1+x^2)^5}\left(\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\right) h(x)\,. \end{aligned}$$

Ora la funzione

$$\frac{2\,(x^2-3)(1+x^2)^2}{\pi^2(x^2-1)^2}$$

è strettamente crescente in $\big(1\,,+\infty\big)$. Infatti, il denominatore della derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{(x^2-3)(1+x^2)^2}{(x^2-1)^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x^2-1)^4}\bigg(\Big(2\,x\,(1+x^2)^2 + (x^2-3)\,2\,(1+x^2)\,2\,x\Big)(x^2-1)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -2\,(x^2-1)\,2\,x\,(x^2-3)(1+x^2)^2\bigg) \\
&= \frac{1+x^2}{(x^2-1)^3}\bigg(\Big(2\,x\,(1+x^2) + 4\,x\,(x^2-3)\Big)(x^2-1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -4\,x\,(x^2-3)(1+x^2)\bigg) \\
&= \frac{2\,x\,(1+x^2)}{(x^2-1)^3}\Big((1+x^2+2\,x^2-6)(x^2-1) - 2\,(x^2-3)(1+x^2)\Big) \\
&= \frac{2\,x\,(1+x^2)(x^4-4\,x^2+11)}{(x^2-1)^3}
\end{aligned}
$$

è ovviamente > 0 in $\big(1\,,+\infty\big)$, mentre nel numeratore il fattore

$$x^4 - 4\,x^2 + 11$$

è un polinomio di secondo grado in x^2 con coefficiente di x^4 uguale a $1 > 0$ e con discriminante $4^2 - 4 \cdot 11 = -28 < 0$ e quindi > 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Siccome la stessa cosa vale anche per l'opposto

$$-\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}$$

della composizione di $\dfrac{\operatorname{tg} u}{u}$ con $\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}$, la loro somma

$$h(x) \text{ è strettamente crescente in } \big(1\,,+\infty\big).$$

Abbiamo già visto che $f''\big(\sqrt{3}\big) < 0$ e, tenendo conto dell'ugualità

$$f''(x) = \frac{\pi^3 x\,(x^2-1)^2}{(1+x^2)^5}\left(\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\right) h(x)\ , \tag{***}$$

vediamo che anche

$$h\big(\sqrt{3}\big) < 0\,.$$

Verifichiamo che anche $h(2) < 0$:

Usando la formula

$$h(x) = \frac{2\,(x^2-3)(1+x^2)^2}{\pi^2(x^2-1)^2} - \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{50}{9\,\pi^2} - \frac{5}{2\,\pi}\operatorname{tg}\frac{2\,\pi}{5} \\ &< \frac{50}{9\,\pi^2} - \frac{5}{2\,\pi}\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}_{=\sqrt{3}} = \frac{5\,\big(20 - 9\,\pi\sqrt{3}\big)}{18\,\pi^2} \\ &< 0\,. \end{aligned}$$

Però $h(3)$ è già > 0:

Infatti,

$$\begin{aligned} h(3) &= \frac{75}{4\,\pi^2} - \frac{10}{3\,\pi}\operatorname{tg}\frac{3\,\pi}{10} \\ &> \frac{75}{4\,\pi^2} - \frac{10}{3\,\pi}\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}_{=\sqrt{3}} = \frac{5\,\big(45 - 8\,\pi\sqrt{3}\big)}{12\,\pi^2} \\ &> 0\,. \end{aligned}$$

Poiché la funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $\big(1\,,+\infty\big)$, risulta che si annulla in un solo punto $2 < a < 3$ ed abbiamo

$$h(x) < 0 \ \text{ per } \ 1 < x < a\,, \qquad h(x) > 0 \ \text{ per } \ x > a\,.$$

Usando (***) si deduce che in $\big(1\,,+\infty\big)$ $f''(x)$ si annulla soltanto in un punto $2 < a < 3$ e valgono

$$f''(x) < 0 \text{ per } 1 < x < a\,,$$

$$f''(x) > 0 \text{ per } x > a\,.$$

Ricordando (**) e il fatto che f è dispari, concudiamo che i punti di flesso di f sono

$$-3 < -a < -2\,, \qquad 0\,, \qquad 2 < a < 3$$

e

$$\begin{aligned} f &\text{ è concava in } (-\infty\,, -a)\,, \\ f &\text{ è convessa in } (-a\,, 0)\,, \\ f &\text{ è concava in } (0\,, a)\,, \\ f &\text{ è convessa in } (a\,, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2) : Poiché

$$\big(\mathrm{tg}\, x\big)\big(\log\cos x\big) = \frac{\sin x}{\cos x}\big(\log\cos x\big) = -\frac{\log\cos x}{\cos x}\big(\cos x\big)'\,,$$

per il calcolo del'integrale

$$\int \big(\mathrm{tg}\, x\big)\big(\log\cos x\big)\,\mathrm{d}x$$

conviene usare la sostituzione $t = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \big(\mathrm{tg}\, x\big)\big(\log\cos x\big)\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int \big(\log t\big)\big(\log t\big)'\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\big(\log t\big)^2}{2} + C \\ &= -\frac{\big(\log\cos x\big)^2}{2} + C\,. \end{aligned}$$

3) : Per trovare tutte le radici cubiche di $i-1 = -1+i$ nel campo compesso ci serve la sua forma trigonometrica :

$\big|-1+i\big| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\,,$

$\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, perciò possiamo porre $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

ed otteniamo

$$-1+i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)\,.$$

Ora, se $z = r\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^3 = -1+i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^3\big(\cos(3\psi) + i\sin(3\psi)\big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)\,,$$

cioè $r^3 = \sqrt{2}$ e

$$\begin{aligned} 3\,\psi &= \varphi + 2\,k\,\pi = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi\,, \text{ ossia} \\ \psi &= \frac{\varphi}{3} + \frac{2\,k\,\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\,k\,\pi}{3} \end{aligned}$$

con k un intero.

Perciò le radici cubiche di $i - 1$ nel campo complesso sono

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\,\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\,\pi}{3}\right)\right) \\ &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\,\pi}{12} + i\sin\frac{11\,\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\,\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\,\pi}{3}\right)\right) \\ &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\,\pi}{12} + i\sin\frac{19\,\pi}{12}\right), \end{aligned}$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche col periodo $2\,\pi$, per $k = 3$ riotteniamo z_1, poi per $k = 4$ riotteniamo z_2, e cosi via.

Rimarco. Possiamo andare anche oltre, calcolando esplicitamente

$$\cos\frac{\pi}{4}\,,\ \sin\frac{\pi}{4}\,,\ \cos\frac{11\,\pi}{12}\,,\ \sin\frac{19\,\pi}{12}\,,\ \cos\frac{11\,\pi}{12}\,,\ \sin\frac{19\,\pi}{12}$$

e quindi $z_1\,, z_2\,, z_3$. Infatti, sapiamo che

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \cos\frac{2\,\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,,\ \sin\frac{2\,\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, usando le formule di addizione per coseno e seno

$$\begin{aligned} &\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\,, \\ &\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\,\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

si ottengono

$$\begin{aligned}
\cos\frac{11\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\ , \\
\sin\frac{11\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\ , \\
\cos\frac{19\pi}{12} &= \cos\left(\frac{19\pi}{12}-2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}-2\pi\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\ , \\
\sin\frac{19\pi}{12} &= \sin\left(\frac{19\pi}{12}-2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}-2\pi\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}$$

Risulta che le radici cubiche di $i-1$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\ , \\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\ , \\
z_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}$$

4) : Poiché

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}\operatorname{tg}x = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha-1}\frac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\sin x$$

e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\,\sin x = 1\ ,$$

vediamo che la funzione positiva

$$\left[0\,,+\frac{\pi}{2}\right) \ni x \longmapsto \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}\operatorname{tg} x$$

è asintoticamente equivalente a $\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha-1}$ in $\dfrac{\pi}{2}$. Perciò l'integrale improprio

$$\int\limits_0^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$$

converge per i stessi valori di α che l'integrale

$$\int\limits_0^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x\,,$$

cioè per $\alpha - 1 > -1 \iff \alpha > 0\,.$

5) : Poiché

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ ,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &> \frac{2}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

Ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, perciò il criterio del confronto implica la divergenza anche della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \right) .$$