NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2014/2015
Analisi Reale e Complessa, Esame del 06.02.2015

1) α) Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che per ogni $x \in E$ esiste un $\delta_x > 0$ con $[x\,, x+\delta_x) \subset E$. Si verifichi che allora E è un insieme di Borel.
Suggerimento: Si dimostri che E è una unione numerabile di intervalli.

β) Si verifichi che per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$ ed ogni $y \in \mathbb{R}$ la funzione $(-\infty\,, y] \ni x \longmapsto \big|E \cap [x\,, y]\big| \in [0\,, +\infty)$ è continua.

γ) Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile. Si dimostri che la funzione (*di densità superiore destra di* E)

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \overline{\lim_{x<y\to x}} \frac{1}{y-x}\big|E \cap [x\,, y]\big| := \inf_{\delta>0} \sup_{x<y\leq x+\delta} \frac{1}{y-x}\big|E \cap [x\,, y]\big| \in [0\,, 1]$$

è una funzione di Borel.

2) Sia $F : \big[0\,, +\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(i) Si dimostri che F è continua.

(ii) Si verifichi che F è due volte derivabile in $\big(0\,, +\infty\big)$ e si esprimi $F'(s)$ e $F''(s)$ mediante integrali dipendenti dal parametro s.

(iii) Si verifichi che F soddisfa in $\big(0\,, +\infty\big)$ l'equazione differenziale

$$F''(s) + F(s) = \frac{1}{s}\,.$$

3) a) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso, diverso da $\mathbb{C}$ e contenente l'origine. Sia $f : U \longrightarrow U$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$ e $\dfrac{df}{dz}(0) = 1$. Mostrare che f è l'identità.

b) Mostrare che lo stesso risultato è vero nel caso in cui l'aperto connesso U è limitato ma non necessariamente semplicemente connesso.

Suggerimento 1: Mostrare che per ogni intero positivo k esiste un reale positivo α tale che $|f^{(k)}(0)| < \alpha$ per ogni funzione olomorfa $f : U \to U$.

Suggerimento 2: Mostrare che, se k_0 è il minimo naturale strettamente maggiore di 1 tale che $a_{k_0} := f^{(k_0)}(0) \neq 0$, allora $(f \circ f)^{(k_0)}(0) = 2\, a_{k_0}$.

4) A) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in 0 della funzione

$$g(z) := \frac{1}{z^4 + 2iz^3}$$

e trovare il massimo numero reale $r > 0$ per cui tale sviluppo è convergente in $D_{(0,r)} \setminus \{0\}$, dove $D_{(0,r)}$ indica il disco aperto di centro 0 e raggio r.

B) Determinare il tipo delle singolarità isolate della funzione

$$h(z) := \frac{\cos(z) + \sin(z) - e^2}{z^4 + 2iz^3}.$$

C) Calcolare i residui della funzione $h(z)$ nei suoi punti singolari.

Soluzioni:

1) **:** α) Ricordiamo che un intervallo in $\mathbb{R}$ è un insieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che se $y_1 \leq y_2$ sono elementi di I allora tutto il segmento $[y_1\,,y_2]$ è contenuto in I. Supponiamo che $I \neq \emptyset$ ed indichiamo

$$\begin{aligned} a(I) &:= \inf_{y\in I} y \in [-\infty\,,+\infty) \text{ (l'estremità inferiore di } I)\,, \\ b(I) &:= \sup_{y\in I} y \in (-\infty\,,+\infty] \text{ (l'estremità superiore di } I)\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\big(a(I)\,,b(I)\big) \subset I\ :$$

> Se $a(I) < y < b(I)$ allora (per la definizione dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore) esistono $y_1\,,y_2 \in I$ tale che $y_1 < y < y_2$. Poiché I è un intervallo, risulta che $y \in I$.

Di consequenza, I è uguale

- o all'intervallo aperto $\big(a(I)\,,b(I)\big)$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I)\,,b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{a(I)\big\}$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I)\,,b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{b(I)\big\}$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I)\,,b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{a(I)\,,b(I)\big\}$.

In tutti i casi I è un insieme di Borel.

Ricordiamo anche che l'unione di una famiglia $\big(I_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ di intervalli con intersezione non vuoto è un intervallo :

> Per l'ipotesi esiste $y \in \bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha$. Se $y_1 \leq y_2$ sono elementi di $\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ allora esistono indici α_1 e α_2 tali che $y_1 \in I_{\alpha_1}$ e $y_2 \in I_{\alpha_2}$. Ma I_{α_1} e I_{α_2} contengono y, quindi si intersecano, e risulta che $I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2}$ è un intervallo. Cosicché $[y_1\,,y_2] \subset I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2} \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$.

Finalmente ricordiamo che se $\big(I_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ è una famiglia di intervalli a due a due disgiunti e di lunghezza > 0 (cioè soddisfacenti $a(I_\alpha) < b(I_\alpha)$ allora la famiglia è numerabile :

> Per ogni $\alpha \in A$ l'intervallo $I_\alpha \supset \big(a(I_\alpha)\,, b(I_\alpha)\big)$ contiene un numero razionale $r(\alpha)$. Poiché gli intervalli I_α sono a due a due disgiunti, l'applicazione
>
> $$A \ni \alpha \longmapsto r(\alpha) \in \mathbb{Q}$$
>
> è iniettiva. Risulta che A è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dell'insieme numerabile $\mathbb{Q}$, quindi è numerabile.

Dopo questa preparazione passiamo alla **soluzione** del compito.

Sia $x \in E$ arbitrario. Per l'ipotesi del compito esiste un $\delta_x > 0$ tale che $[\,x\,, x+\delta_x) \subset E$. Risulta che la lunghezza del più grande intervallo I_x contenente x e contenuto in E , cioè di

$$I_y := \bigcup_{\substack{I \text{ intervallo} \\ x\in I\subset E}} I \left\{ \begin{array}{l} \subset E \\ \supset [\,x\,, x+\delta_x) \end{array} \right. ,$$

è $\geq \delta_x > 0$.

Ora, per due elementi $x_1\,, x_2$ di E gli intervalli I_{x_1} e I_{x_2} o coincidono o sono disgiunti. Infatti, se I_{x_1} e I_{x_2} non sono disgiunti, allora la loro unione è un intervallo I con

$$x_1\,, x_2 \in I \subset E$$

e quindi I è sottoinsieme sia di I_{y_1} che di I_{y_2} . In altre parole abbiamo

$$I_{x_1} \cup I_{x_2} = I \subset \left\{ \begin{array}{l} I_{x_1} \\ I_{x_2} \end{array} \right. ,$$

cioè $I_{x_1} = I_{x_1} \cup I_{x_2} = I_{x_2}$.

Concludiamo che

$$\mathcal{J} := \big\{ I \subset \mathbb{R} \text{ intervallo} \ ; \ I = I_x \text{ per un } x \in E \big\}$$

è un insieme di intervalli a due a due disgiunti e di lunghezza > 0 , quindi è numerabile. Ma

$$\bigcup_{I\in\mathcal{J}} I = \bigcup_{x\in E} I_x \begin{cases} \subset E \\ \supset \bigcup_{y\in E} \{y\} = E \end{cases}$$

implica che

$$\bigcup_{I\in\mathcal{J}} I = E$$

e così E è una unione numerabile di intervalli. Siccome gli intervalli sono insiemi di Borel, risulta la borelianità di E.

Complemento.

Chi è familiare con insiemi connessi e componenti conessi, può leggere la soluzione precedente come segue :

Siccome ogni sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo, i componenti connessi di E sono intervalli, in particolare insiemi di Borel.

Sia C un componente connesso di E e $x \in C$. Per l'ipotesi su E esiste un $\delta_x > 0$ tale che

$$[x, , x + \delta_x) \subset E\,. \tag{*}$$

Poiché $[x\,, x+\delta_x) \ni x$ è connesso, è contenuto nel componente connesso C di x. Risulta che $C \supset (x\,, x+\delta_x))$ contiene un numero razionale $r(C)$.

Ora $C \longmapsto r(C) \in \mathbb{Q}$ è una applicazione iniettiva dell'insieme di tutti i componenti connessi di E in $\mathbb{Q}$ e la numerabilità di $\mathbb{Q}$ implica che l'insieme dei componenti connessi di E è numerabile.

Siccome ogni insieme è l'unione dei suoi componenti connessi, risulta che E è una unione numerabile di intervalli, e quindi un insieme di Borel.

Con la stessa dimostrazione si ottiene anche la seguente affermazione più generale :

Sia $E \subset \mathbb{R}$ ed assumiamo che per ogni $x \in E$ esiste un $\delta_x > 0$ tale che o $(x - \delta_x\,, x] \subset E$ o $[x\,, x + \delta_x) \subset E$. Allora E è un insieme di Borel.

Infatti, per la dimostrazione si può copiare la dimostrazione precedente con la sola modifica che per qualsiasi $x \in C$ è guarantita l'esistenza di un $\delta_x > 0$ che soddisfi non necessariamente (*), ma la condizione più debole

$$(x-\delta_x\,,x] \text{ oppure } [x\,,x+\delta_x) \text{ è contenuto in } E\,.$$

Risulterà però che $C \supset (x-\delta_x\,,x))$ oppure $C \supset (x\,,x+\delta_x))$. Poiché in ambi casi C contiene un numero razionale $r(C)$, possiamo concludere la dimostrazione come di cui sopra.

β) Usando l'additività della misura di Lebesgue otteniamo per ogni $x_1 \leq x_2 \leq y$ in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \big|[x_1\,,y]\cap E\big| - \big|[x_2\,,y]\cap E\big| &= \big|\big([x_1\,,y]\cap E\big)\setminus\big([x_2\,,y]\cap E\big)\big| \\ &= \big|[x_1\,,x_2)\cap E\big| \\ &\leq \big|[x_1\,,x_2)\big| = x_2 - x_1\,. \end{aligned}$$

Cosicché

$$\Big|\big|[x_1\,,y]\cap E\big| - \big|[x_2\,,y]\ \cap E\big|\Big| \leq |x_2 - x_1|\,, \qquad x_1\,,x_2 \in (-\infty\,,y]$$

e concludiamo che la funzione $(-\infty\,,y] \ni x \longmapsto \big|[x\,,y]\cap E\big| \in [0\,,+\infty)$ è di Lipschitz (con costante di Lipschitz 1). In particolare risulta la sua continuità.

γ) **Avvertimento 1.** *Dobbiamo essere molto prudenti esaminando*

$$\frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big|$$

quando y avvicina x perché la funzione

$$y \longmapsto \frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big|\,,$$

pur prendendo valori in $[0\,,1]$ dove è definita, non è definita in $y=x$.

■

Perciò consideriamo, per ogni $t>0$, la funzione ben definita

$$f_t : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{t}\big|E\cap[x\,,x+t]\big| \in [0\,,1]$$

e cerchiamo di esprimere la funzione

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \overline{\lim_{x<y\to x}}\,\frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big|$$

in termini delle funzioni f_t. Al riguardo affermiamo che vale per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{x<y\to x} \frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big| = \varlimsup_{0<t\to 0} f_t(x) = \inf_{\delta>0}\ \sup_{0<t\le\delta} f_t(x)\ : \tag{1}$$

Infatti, abbiamo per ogni $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sup_{x<y\le x+\delta} \frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big| &= \sup_{x<y\le x+\delta} f_{y-x}(x)\\ &\overset{t=y-x}{=} \sup_{0<t\le\delta} f_t(x)\,, \qquad \delta>0\,,\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x<y\to x} \frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big| &= \inf_{\delta>0}\ \sup_{x<y\le x+\delta} \frac{1}{y-x}\big|E\cap[x\,,y]\big|\\ &= \inf_{\delta>0}\ \sup_{0<t\le\delta} f_t(x) = \varlimsup_{0<t\to 0} f_t(x)\,.\end{aligned}$$

Secondo (1) abbiamo quindi da verificare che la funzione

$$f:\mathbb{R}\longmapsto \varlimsup_{0<t\to 0} f_t(x) \tag{2}$$

è di Borel.

Avvertimento 2. *Sappiamo che se $F_k\,,k\ge 1$, è una successione di funzioni di Borel positive, allora la funzione massimo limite $\varlimsup\limits_{k\to\infty} F_k$ è pure una funzione di Borel. Qui invece si tratta non di una successione, ma della famiglia continua $f_t\,,t>0$. Ciò nonostante, avendo da fare con un caso particolare, riusceremo adattare la dimostrazione nel caso di una successione, verificando così la borelianità di f.*

■

Una prima particolarità da sfruttare è la continuità di ogni $f_t\,,t>0$, che risulta tramite un ragionamento simile alla soluzione di $\beta)$:

Infatti, la continuità di f_t è equivalente alla continuità di

$$g_t:\mathbb{R}\ni x\longmapsto tf_t(x) = \big|E\cap[x\,,x+t]\big| \in [0\,,+\infty)\,.$$

Ma questa funzione è di Lipschitz (con costante di Lipschitz 1), quindi continua.

Per verificare la nostra affermazione, siano $x_1 \leq x_2$ numeri reali arbitrari. Usando l'additività della misura di Lebesgue otteniamo

$$\begin{aligned} g_t(x_1) - g_t(x_2) &= \big|E \cap [x_1\,, x_1 + t]\big| - \big|E \cap [x_2\,, x_2 + t]\big| \\ &= \Big(\big|E \cap [x_1\,, x_2 + t]\big| - \big|E \cap (x_1 + t\,, x_2 + t]\big| \Big) \\ &\quad - \Big(\big|E \cap [x_1\,, x_2 + t]\big| - \big|E \cap [x_1\,, x_2)\big| \Big) \\ &= \big|E \cap [x_1\,, x_2)\big| - \big|E \cap (x_1 + t\,, x_2 + t]\big|\,. \end{aligned}$$

Risultano

$$\begin{aligned} g_t(x_1) - g_t(x_2) &\leq \big|E \cap [x_1\,, x_2)\big| \leq \big|[x_1\,, x_2)\big| = x_2 - x_1\,, \\ g_t(x_1) - g_t(x_2) &\geq -\,\big|E \cap (x_1 + t\,, x_2 + t]\big| \geq -\big|(x_1 + t\,, x_2 + t]\big| \\ &= -\,(x_2 - x_1)\,, \end{aligned}$$

cioè

$$\big|g_t(x_1) - g_t(x_2)\big| \leq |x_2 - x_1|\,.$$

Ora mostriamo che, per ogni $\delta > 0$, la funzione

$$h_\delta : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sup_{0<t\leq\delta} f_t(x) \in [0\,,1] \tag{3}$$

è di Borel.

A questo fine basta verificare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la controimmagine $h_\delta^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big) \subset \mathbb{R}$ è un insieme di Borel. Ma

$$\begin{aligned} h_\delta^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big) &= \Big\{x \in \mathbb{R}\,;\ \sup_{0<t\leq\delta} f_t(x) > \lambda\Big\} \\ &= \bigcup_{0<t\leq\delta} \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ f_t(x) > \lambda\big\} = \bigcup_{0<t\leq\delta} f_t^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big) \end{aligned}$$

dove gli insiemi $f_t^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ sono aperti per la continuità di f_t. Poiché qualsiasi unione di insiemi aperti è aperta, risulta che l'insieme $h_\delta^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ è aperto, quindi di Borel.

(*Qui era essenziale la continuità delle funzioni* f_t : *infatti se fossero state solo di Borel, allora le controimmagini* $f_t^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ *sarebbero state solo di Borel e non sarebbe risultata la borelianità dell'unione non numerabile* $h_\delta^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$).

Dalle definizioni di f e di h_δ , (2) e (3), risulta

$$f(x) = \inf_{\delta>0} h_\delta(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ma guardando (3) si vede subito che la famiglia $h_\delta\,,\delta > 0$, è crescente, cioè :

$$0 < \delta_1 \leq \delta_2 \Longrightarrow h_{\delta_1} \leq h_{\delta_2}\,.$$

Di conseguenza, per qualsiasi successione decrescente e convergente a 0 in $(0\,,+\infty)$, diciamo $\delta_k\,,k \geq 1$, abbiamo

$$f(x) = \inf_{\delta>0} h_\delta(x) = \sup_{k\geq 1} h_{\delta_k}(x) = \lim_{k\to\infty} h_{\delta_k}(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Cosicché f è limite puntuale della successione $h_{\delta_k}\,,k \geq 1$, di funzioni di Borel e come tale, è di Borel.

2) : (i) Poiché le funzioni

$$[\,0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,, \qquad s \in [\,0\,,+\infty) \tag{4}$$

sono continue, quindi misurabili, ed abbiamo

$$0 \leq \frac{e^{-sx}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in [\,0\,,+\infty)\,, s \in [\,0\,,+\infty)\,, \tag{5}$$

dove

$$[\,0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

è sommabile, le funzioni (4) sono sommabili. Perciò $F : [\,0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.

Inoltre, siccome vale la condizione di dominanza (5) e le funzioni

$$[\,0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,, \qquad x \in [\,0\,,+\infty)$$

sono continue, il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali implica la continuità di F.

(ii) Siccome le funzioni

$$(0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,, \qquad x \in [\,0\,,+\infty)$$

sono derivabili e, per ogni $\varepsilon > 0$, le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x^2} = -\,\frac{x\,e^{-sx}}{1+x^2}$$

ammettono la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x^2}\right| \leq e^{-\varepsilon x}\,, \qquad x \in [\,0\,,+\infty)\,, s \in [\,\varepsilon\,,+\infty)\,,$$

dove la funzione

$$[\,0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-\varepsilon x}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione F è derivabile e vale la formula

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)\,.$$

Similmente si verifica che anche $F' : (0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$F''(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^2}\,\frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)\,. \quad (6)$$

(iii) Usando la formula (6) deduciamo per ogni $s > 0$:

$$\begin{aligned} F''(s) + F(s) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)\,e^{-sx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,. \end{aligned}$$

3) : a) Poiché U è semplicemente connesso e diverso da $\mathbb{C}$, per il teorema della mappa di Riemann esiste una rappresentazione conforme φ del disco unità $D_{(0,1)}$ su U, cioè una applicazione biolomorfa φ di $D_{(0,1)}$ su U. Per di più, possiamo scegliere φ tale che 0 vada in un punto dato di U e la scegliamo tale che valga $\varphi(0) = 0$ (possiamo fare la scelta anche così che la derivata $\dfrac{d\varphi}{dz}(0)$ sia positiva, ma questo dettaglio qui non è rilevante). Allora

$$g := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

sarà una applicazione da $D_{(0,1)}$ in $D_{(0,1)}$ soddisfacente $g(0) = 0$. Per il lemma di Schwarz risulta che

$$|g(w)| \leq |w| \text{ per ogni } w \in D_{(0,1)}\,, \qquad \left|\frac{dg}{dw}(0)\right| \leq 1\,,$$

e se abbiamo $|g(w)| = |w|$ per un $0 \neq w \in D_{(0,1)}$ oppure $\left|\dfrac{dg}{dw}(0)\right| = 1$, allora necessariamente

$$g(w) = c\,w\,, \qquad w \in D_{(0,1)}$$

per una costante $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$. Ma la nostra funzione g soddisfa

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dw}(0) &= \frac{d\varphi^{-1}}{dz}\Big(f\big(\varphi(0)\big)\Big)\frac{df}{dz}\big(\varphi(0)\big)\frac{d\varphi}{dw}(0) = \frac{d\varphi^{-1}}{dz}(0)\frac{df}{dz}(0)\frac{d\varphi}{dw}(0)\\ &= \frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dw}\big(\varphi^{-1}(0)\big)}\frac{df}{dz}(0)\frac{d\varphi}{dw}(0) = \frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dw}(0)}\frac{df}{dz}(0)\frac{d\varphi}{dw}(0) = \frac{df}{dz}(0)\\ &= 1\,,\end{aligned}$$

perciò esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tale che $g(w) = c\,w$ per ogni $w \in D_{(0,1)}$. La costante c essendo uguale a $\dfrac{dg}{dw}(0) = 1$, risulta

$$g(w) = w\,, \qquad w \in D_{(0,1)}\,,$$

quindi

$$f(z) = \Big(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}\Big)(z) = \varphi\Big(g\big(\varphi^{-1}(z)\big)\Big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(z)\big) = z$$

per ogni $z \in U$.

b) Supponiamo adesso che l'aperto connesso U contenente l'origine è limitato, ma non necessariamente semplicemente connesso, e denoti $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe $f : U \longrightarrow U$. Mostriamo che

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f^{(k)}(0)| < +\infty\,, \qquad k \geq 0\,. \tag{7}$$

A questo fine sia $\delta > 0$ tale che il disco chiuso di centro 0 e raggio δ $\overline{D_{(0,\delta)}}$ sia incluso in U. Sia poi $R := \sup\limits_{z\in U} |z| < +\infty$.

Per la formula integrale di Cauchy abbiamo per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(0)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D_{(0,\delta)}} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\partial^+ D_{(0,\delta)}} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}}\, \mathrm{d}|z| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\partial^+ D_{(0,\delta)}} \frac{R}{\delta^{k+1}}\, \mathrm{d}|z| = \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{R}{\delta^{k+1}} \cdot (2\pi\delta) \\
&= \frac{k!R}{\delta^k}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza vale (7) :

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!R}{\delta^k} < +\infty\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Indichiamo adesso

$$\mathcal{F}_o := \left\{ f \in \mathcal{F}\,;\; f(0) = 0\,, \frac{df}{dz}(0) = 1 \right\}.$$

Il nostro compito è da mostrare che $\mathcal{F}_o$ contiene solo la funzione identica z, ossia, per il principio di identità analitica, che vale l'implicazione

$$f \in \mathcal{F}_o \implies f^{(k)}(0) = 0 \text{ per ogni } k \geq 2\,.$$

Supponiamo quindi l'esistenza di un $f \in \mathcal{F}_o$ tale che l'insieme di indici $\{k \geq 2\,;\, f^{(k)}(0) \neq 0\}$ non è vuoto. Per un tale f sia $k(f)$ il più piccolo elemento di quest'insieme, cioè l'intero $k(f) \geq 2$ soddisfacente

$$f^{(k(f))}(0) \neq 0 \text{ e } f^{(k)}(0) = 0 \text{ per ogni } 1 < k < k(f)\,.$$

Allora, ovviamente, $f \circ f \in \mathcal{F}_o$ e mostriamo che

$$\begin{aligned}
&\{k \geq 2\,;\, (f\circ f)^{(k)}(0) \neq 0\} \neq \emptyset\,, \\
&k(f\circ f) = k(f)\,, \\
&(f\circ f)^{(k(f))}(0) = 2\, f^{(k(f))}(0)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Usando la formula di Taylor:

Ponendo $k_o := k(f)$, per lo sviluppo in serie di potenze di f in $D_{(0,\delta)}$ abbiamo

$$f(z) = z + c_{k_o} z^{k_o} + o(z^{k_o}) \text{ per } z \to 0$$

dove $c_{k_o} = \dfrac{1}{k_o!} f^{(k_o)}(0) \neq 0$. In particolare,

$$f(z) = z + o(z) \text{ per } z \to 0 .$$

Allora

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(z) &= z + c_{k_o} z^{k_o} + o(z^{k_o}) \\
&\quad + c_{k_o} \Big(z + c_{k_o} z^{k_o} + o(z^{k_o}) \Big)^{k_o} + o\Big(\big(z + o(z) \big)^{k_o} \Big) \\
&= z + c_{k_o} z^{k_o} + o(z^{k_o}) \\
&\quad + c_{k_o} \Big(z^{k_o} + o(z^{k_o}) \Big) + o(z^{k_o}) \\
&= z + 2\, c_{k_o} z^{k_o} + o(z^{k_o}) \text{ per } z \to 0
\end{aligned}$$

e risulta che

$$(f \circ f)^{(k)}(0) = 0 \text{ per } 1 < k < k_o ,$$

mentre

$$(f \circ f)^{(k_o)}(0) = 2\, k_o!\, c_{k_o} = 2\, f^{(k_o)}(0) \neq 0 .$$

Cosicché (8) è verificata.

■

Tramite calcolo diretto:

Usando induzione mostriamo che per ogni $k \geq 2$ abbiamo

$$(f \circ f)^{(k)}(z) = f^{(k)}\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^k + f'\big(f(z)\big) f^{(k)}(z) + g_k(z) \tag{9}$$

dove $g_k : U \longrightarrow \mathbb{C}$ è una somma di prodotti

- di una funzione della forma $f^{(j)}\big(f(z)\big)$ con $1 < j < k$
- con una funzione olomorfa su U.

Poiché

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)'(z) &= f'\big(f(z)\big) f'(z)\,, \\
(f \circ f)''(z) &= f''\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^2 + f'\big(f(z)\big) f''(z)\,,
\end{aligned}
$$

la formula (9) vale per $k = 2$.

Verifichiamo adesso che se (9) vale per un certo $k \geq 2$, allora vale anche per $k+1$. Infatti, (9) implica

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)^{(k+1)}(z) &= f^{(k+1)}\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^{k+1} + k\, f^{(k)}\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^{k-1} f''(z) \\
&\qquad + f''\big(f(z)\big) f'(z)\, f^{(k)}(z) + f'\big(f(z)\big) f^{(k+1)}(z) + g_k'(z) \\
&= f^{(k+1)}\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^{k+1} + f'\big(f(z)\big) f^{(k+1)}(z) + g_{k+1}(z)
\end{aligned}
$$

dove

$$
g_{k+1}(z) := k\, f^{(k)}\big(f(z)\big)\big(f'(z)\big)^{k-1} f''(z) + f''\big(f(z)\big) f'(z)\, f^{(k)}(z) + g_k'(z)\,.
$$

Tenendo conto della struttura di g_k ed usando le regole di derivazione si verifica facilmente che g_{k+1} è una combinazione lineare di prodotti

- di una funzione della forma $f^{(j)}\big(f(z)\big)$ con $1 < j < k+1$
- con una funzione olomorfa su U.

Ora (9) implica per ogni $1 < k < k(f)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)^{(k)}(0) &= \underbrace{f^{(k)}\big(\underbrace{f(0)}_{=0}\big)}_{=0}\big(f'(0)\big)^k + f'\big(f(0)\big) \underbrace{f^{(k)}(0)}_{=0} + g_k(0) \\
&= g_k(0)
\end{aligned}
$$

dove $g_k(0)$ è una somma di prodotti di un valore $f^{(j)}\big(\underbrace{f(0)}_{=0}\big) = 0$ con $1 < j < k$ con il valore in $z = 0$ di una funzione olomorfa su U, quindi è uguale a 0. Cosiché

$$
(f \circ f)^{(k)}(0) = 0\,, \qquad 1 < k < k(f)\,.
$$

D'altro canto, di nuovo per (9), abbiamo per $k_o = k(f)$

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)^{(k_o)}(0) &= f^{(k_o)}\big(\underbrace{f(0)}_{=0}\big)\big(\underbrace{f'(0)}_{=1}\big)^{k_o} + \underbrace{f'\big(\underbrace{f(0)}_{=0}\big)}_{=1} f^{(k_o)}(0) + g_{k_o}(0) \\
&= 2\, f^{(k_o)}(0) + g_{k_o}(0)\,.
\end{aligned}
$$

Ma qui $g_{k_o}(0)$ è una somma di prodotti di un valore $f^{(j)}\big(\underbrace{f(0)}_{=0}\big) = 0$ con $1 < j < k_o = k(f)$ con il valore in $z = 0$ di una funzione olomorfa su U, perciò $g_{k_o}(0) = 0$. Di conseguenza $(f \circ f)^{(k_o)}(0) = 2\, f^{(k_o)}(0) \neq 0$ e risulta (8).

$\blacksquare$

Sia adesso f_o una funzione in $\mathcal{F}_o$ tale che $\{k \geq 2\,;\, (f_o)^{(k)}(0) \neq 0\} \neq \emptyset$ ed indichiamo

$$f_n := \underbrace{f_o \circ f_o \circ \,...\, \circ f_o}_{2^n \text{ volte}} \in \mathcal{F}_o\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Usando (8) si verifica per induzione che per ogni $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\{k \geq 2\,;\, (f_n)^{(k)}(0) \neq 0\} \neq \emptyset\,, \\ &k(f_n) = k(f_o)\,, \\ &f_n^{(k(f_o))}(0) = 2^n f_o^{(k(f_o))}(0)\,. \end{aligned}$$

Perciò otteniamo con $k_o = k(f_o)$

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f^{(k_o)}(0)| \geq \sup_{n \geq 1} |f_n^{(k_o)}(0)| = \sup_{n \geq 1} 2^n \underbrace{|f_o^{(k_o)}(0)|}_{>0} = +\infty\,,$$

in contraddizione con (7). Concludiamo che l'ipotesi sull'esistenza di un $f \in \mathcal{F}_o$ con $\{k \geq 2\,;\, f^{(k)}(0) \neq 0\} \neq \emptyset$ è falsa.

4) : A) Poiché

$$g(z) := \frac{1}{z^4 + 2iz^3} = \frac{1}{2iz^3}\,\frac{1}{1 - \dfrac{iz}{2}}\,,$$

per $\left|\dfrac{iz}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 2$ abbiamo lo sviluppo in serie di Laurent

$$g(z) = \frac{1}{2iz^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{iz}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\left(\frac{i}{2}\right)^{k+1} z^{k-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} -\left(\frac{i}{2}\right)^{n+4} z^n\,.$$

$D_{(0,2)}$ è il disco aperto di raggio massimo nel quale la serie converge, perché se $|z| \geq 2$ allora i termini della successione

$$-\left(\frac{i}{2}\right)^{n+4} z^n \,, n \geq 1$$

hanno modulo $\geq \dfrac{1}{16}$ e quindi la successione non può convergere a 0, una condizione necessaria per la convergenza della serie.

B) h è un rapporto di due funzioni intere non costanti, così le sue singolarità sono i zeri del denominatore $z^4 + 2iz^3 = z^3(z+2i)$, cioè $z_1 = -2i$ e $z_2 = 0$.

Il numeratore di h in $z_1 = -2i$ è uguale a

$$\begin{aligned}
\cos(-2i) + \sin(-2i) - e^2 &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} + \frac{e^2 - e^{-2}}{2i} - e^2 \\
&= \frac{-e^2 + e^{-2}}{2} + i\,\frac{-e^2 + e^{-2}}{2} \\
&= \frac{(1+i)(e^{-2} - e^2)}{2} \neq 0\,,
\end{aligned}$$

perciò $z_1 = -2i$ è un polo semplice di h.

D'altro canto, poiché il numeratore di h in $z_2 = 0$ è

$$\cos 0 + \sin 0 - e^2 = 1 - e^2 \neq 0\,,$$

$z_2 = 0$ è un polo di ordine 3 di h.

C) $z_1 = -2i$ essendo un polo semplice, il residuo $R(h\,, -2i)$ è uguale al limite in z_1 di $(z+2i)\,h(z)$:

$$\begin{aligned}
R(h\,, z_1) &= \lim_{z \to -2i} (z+2i)\,\frac{\cos(z) + \sin(z) - e^2}{z^4 + 2iz^3} \\
&= \lim_{z \to -2i} \frac{\cos(z) + \sin(z) - e^2}{z^3} = \frac{\cos(-2i) + \sin(-2i) - e^2}{(-2i)^3} \\
&= \frac{(1+i)(e^{-2} - e^2)}{16\,i} = \frac{(1-i)(e^{-2} - e^2)}{16}\,.
\end{aligned}$$

Per il calcolo del residuo nel polo $z_2 = 0$ di ordine 3 è forse il più conveniente sfruttare che h è il prodotto della funzione g di cui abbiamo già trovato in A) lo sviluppo in serie di Laurent centrato in 0

$$g(z) = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{z^2} + \frac{i}{8}\,\frac{1}{z} - \frac{1}{16} - \,...\,,$$

e della funzione intera $\cos z + \sin z - e^2$ con lo sviluppo noto in serie di potenze centrato in 0

$$\cos z + \sin z - e^2 = 1 - e^2 + z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \,...\,.$$

Il residuo $R(h\,,0)$ è il coefficiente di $\dfrac{1}{z}$ nel prodotto delle due serie di cui sopra, cioè

$$-\frac{i}{2}\left(-\,\frac{1}{2!}\right) + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}\,(1 - e^2) = \frac{1}{4} + \frac{i}{8}\,(3 - e^2)\,.$$