NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Esame del 07.06.2010

1) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in \mathbb{R}$$

definisce una funzione continua $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile in ogni punto $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Si calcoli la derivata $F'(s)$ per ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$.

2) Esiste una funzione olomorfa $f(z)$ definita sul piano complesso tale che, per $z = x + i\,y$,

$$\mathrm{Re} f(z) = e^{-y}\,(x\,\cos x - y\,\sin x)\ ?$$

Nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni f.

3) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) **:** Siccome, per ogni $x \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$e^{\sqrt{|s|\,x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \big(|s|\,x\big)^{k/2} \geq 1 + \frac{1}{4!} \big(|s|\,x\big)^2 \geq \frac{1+s^2x^2}{24} \,,$$

$$1 + s^2x^2 \leq 24 \cdot e^{\sqrt{|s|\,x}} \,,$$

$$\left| \frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2} \right| \leq \frac{\sqrt{|s|\,x} + \ln(24)}{1+x^2}$$

e la funzione $\dfrac{\sqrt{|s|\,x} + \ln(24)}{1+x^2}$ è integrabile su $\big[0\,,+\infty\big)$, la funzione F è ben definita e, per di più, per il teorema della convergenza dominata risulta anche la sua continuità, cioè che vale

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(s_n) &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s_n^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+s_n^2x^2)}{1+x^2}}_{=\,\frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2}} \Bigg)\,\mathrm{d}x \\
&= F(s)
\end{aligned}$$

per ogni successione convergente $s_n \longrightarrow s$ in $\mathbb{R}$.

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2} = \frac{2\,s\,x^2}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}\,, \qquad x \geq 0\,, s \in \mathbb{R}$$

e, per $x \geq 0\,, s \in \mathbb{R}\,, |s| \geq \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2} \right| = \frac{2}{|s|} \frac{s^2x^2}{(1+x^2)(1+s^2x^2)} \leq \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{1+x^2}$$

dove la funzione $\dfrac{2}{\varepsilon}\dfrac{1}{1+x^2}$ è integrabile su $\big[0\,,+\infty)$. Così F risulta derivabile in ogni $0\neq s\in\mathbb{R}$ ed abbiamo

$$\begin{aligned}F'(s) &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\ln(1+s^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty}\frac{2\,s\,x^2}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{2\,s\,(1+x^2)-2\,s}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_0^{+\infty}\frac{s}{1+s^2x^2}\,\mathrm{d}x - 2\,s\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Rimarchiamo che, poiché F è una funzione pari, basta calcolare $F'(s)$ per $s>0$: infatti, per $s<0$ avremo

$$F'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}F(-s) = -F'(-s) = -F'(|s|)\,.$$

$\longrightarrow$ <u>Caso</u> $s>0$. Poiché

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{s}{1+s^2x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(s\,x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}\,,\qquad s>0\,,$$

risulta

$$F'(s) = \pi - 2\,s\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+s^2x^2)}\,\mathrm{d}x\,,\qquad s>0\,.$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra, se $s\neq 1$ allora (come visto nell'Analisi 1) abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+s^2x^2)} = \frac{1}{1-s^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{s^2}{1-s^2}\cdot\frac{1}{1+s^2x^2}$$

e risulta

$$F'(s) = \pi - 2\,s\bigg(\frac{1}{1-s^2}\operatorname{arctg}x\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{s}{1-s^2}\operatorname{arctg}(sx)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\bigg)$$

$$= \pi - 2s\left(\frac{1}{1-s^2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{s}{1-s^2}\,\frac{\pi}{2}\right) = \pi - s\,\frac{1-s}{1-s^2}\,\pi$$
$$= \pi - \frac{s}{1+s}\,\pi = \frac{\pi}{1+s} \quad :$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+s^2x^2)} = \frac{a\,x+b}{1+x^2} + \frac{c\,x+d}{1+s^2x^2}$$

e queste costanti si calcolano come segue :

$$\begin{aligned} 1 &= \big(a\,x+b\big)\big(1+s^2x^2\big) + \big(c\,x+d\big)\big(1+x^2\big) \\ &= (a\,s^2+c)\,x^3 + (b\,s^2+d)\,x^2 + (a+c)\,x + b + d \end{aligned}$$

implica

$$\begin{cases} a\,s^2+c=0 \\ b\,s^2+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

e dalla prima e la terza equazione risulta $a = c = 0$, mentre la seconda e la quarta equazione hanno come soluzione

$$b = \frac{1}{1-s^2}\,, \qquad d = -\frac{s^2}{1-s^2}\ .$$

Se invece $s = 1$, allora $\Bigg($usando il metodo di integrazione della funzione $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ imparato nell'Analisi 1$\Bigg)$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{4}\ ,$$

quindi anche in questo caso vale

$$F'(s) = \pi - 2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1+s} \quad :$$

Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} - \int x\left(-\frac{2\,x}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2\,x^2+2-2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

e da questa relazione si esprime

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, x\ .
\end{aligned}
$$

→ <u>Caso</u> $s<0$. Poiché F è pari, come abbiamo visto, vale per ogni $s<0$

$$
F'(s) = -F'(-s) = -\frac{\pi}{1-s} = \frac{\pi}{s-1}\ .
$$

→ **Conclusione :**

$$
F'(s) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{s+1} & \text{per } s>0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{s-1} & \text{per } s<0 \end{cases}\ .
$$

Approfondimenti.

(a) È naturale chiedersi se la funzione F di cui sopra è derivabile anche in 0 o no. Chiaramente, la funzione derivata F' ha limite in 0 sia da destra che da sinistra :

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0+0} F'(s) &= \lim_{s\to 0+0} \frac{\pi}{s+1} = \pi\ , \\
\lim_{s\to 0-0} F'(s) &= \lim_{s\to 0-0} \frac{\pi}{s-1} = -\pi\ .
\end{aligned}
$$

Perciò c'è da aspettarsi che F abbia in 0 la derivata destra π e la derivata sinistra $-\pi$. Che avviene veramente così, risulta dal teorema seguente:

Teorema. *Sia $f:[a\,,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che è derivabile in $(a\,,b)$ e tale che esiste il limite*

$$
L := \lim_{s\to a+0} f'(s) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\,,+\infty\}\ .
$$

Allora esiste la derivata destra

$$f_d'(a) = \lim_{s\to a+0} \frac{f(s)-f(a)}{s-a} = L\ .$$

Siano $L' < L < L''$ arbitrari (se $L = +\infty$, allora non c'è L'', mentre se $L = -\infty$, allora non c'è L'). Allora esiste $a < a' < b$ tale che

$$L' < f'(s) < L''\ , \qquad a < s < a'\ .$$

Ora il teorema del valor medio di Lagrange implica che per ogni $a < s < a'$ esiste un $a < \sigma_s < s < a'$ tale che

$$\frac{f(s)-f(a)}{s-a} = f'(\sigma_s) \in \big(L'\,, L''\big)\ .$$

Cosicché

$$\lim_{s\to a+0} \frac{f(s)-f(a)}{s-a} = L\ .$$

(b) Usando la definizione di F , abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\pi = F_d'(0) &= \lim_{s\to 0+0} \frac{F(s)-F(0)}{s-0} = \lim_{s\to 0+0} \frac{F(s)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0+0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{s} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Ma per verificare l'ugualità

$$\lim_{s\to 0+0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{s} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

non possiamo usare il teorema della convergenza dominata. Infatti, se questo fosse possibile, risulterebbe

$$\lim_{s\to 0+0} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{s} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{s\to 0+0} \frac{\ln(1+s^2x^2)}{s^2x^2} \cdot \frac{s\,x^2}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} 0 \, \mathrm{d}x = 0 \, .$$

(c) Conoscendo $F'(s)\,,\, s \neq 0\,$, possiamo calcolare esplicitamente $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^s F'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^s \frac{\pi}{\sigma+1}\,\mathrm{d}\sigma = \pi \,\ln(\sigma+1)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=s} \\ &= \pi\,\ln(1+s) \ \text{ per } \ s>0\,, \\ F(s) &= F(-s) = \pi\,\ln(1-s) \ \text{ per } \ s<0\,, \end{aligned}$$

cioè

$$F(s) = \pi\,\ln\big(1+|s|\big)\,, \qquad s\in\mathbb{R}\,.$$

Usando queste formule possiamo ricalcolare $F_d'(0)$ e $F_s'(0)$:

$$\begin{aligned} F_d'(0) &= \lim_{s\to 0+0} \frac{F(s)}{s} = \lim_{s\to 0+0} \frac{\pi\,\ln(1+s)}{s} = \pi\,, \\ F_s'(0) &= \lim_{s\to 0-0} \frac{F(s)}{s} = \lim_{s\to 0-0} \frac{\pi\,\ln(1-s)}{s} = -\pi\,. \end{aligned}$$

2) : La funzione $u(x\,,y)$ definita sul piano complesso tramite la formula

$$u(x\,,y) = e^{-y}\,(x\,\cos x - y\,\sin x)$$

può essere la parte reale di una funzione olomorfa se e soltanto se è armonica. Verifichiamo che è così :

Anzitutto le derivate parziali di v di primo ordine sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) &= e^{-y}\,(\cos x - x\,\sin x - y\,\cos x)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) &= e^{-y}\,(-x\,\cos x + y\,\sin x - \sin x)\,. \end{aligned}$$

Risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y) &= e^{-y}\,(-2\,\sin x - x\,\cos x + y\,\sin x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y) &= e^{-y}\,(x\,\cos x - y\,\sin x + 2\,\sin x) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x\,,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x\,,y)=0\ .$$

Ora l'armonicità di u implica che la forma differenziale

$$\omega=-\frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y)\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

è chiusa e, poiché il piano complesso è convesso, anche esatta. Se $v(x\,,y)$ è una primitiva della forma differenziale ω, cioè una funzione differenziabile $v(x\,,y)$ sul piano complesso tale che

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y)\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y)\ ,$$

allora per la funzione $f(z):=u(x\,,y)+v(x\,,y)\,i$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, quindi f sarà una funzione olomorfa avendo la parte reale uguale a u.

Di conseguenza dobbiamo risolvere il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x\,,y)=e^{-y}\,(x\,\cos x-y\,\sin x+\sin x)\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)=\quad\dfrac{\partial u}{\partial x}(x\,,y)=e^{-y}\,(\cos x-x\,\sin x-y\,\cos x)\end{array}\right.\ .$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\begin{aligned}v(x\,,y)=&\int\Big(e^{-y}\,(\cos x-x\,\sin x-y\,\cos x)\Big)\,\mathrm{d}y\\ =&\ -e^{-y}\,(\cos x-x\,\sin x)-(\cos x)\int y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y\\ =&\ -e^{-y}\,(\cos x-x\,\sin x)-(\cos x)\big(-y\,e^{-y}-e^{-y}\big)+C(x)\\ =&\ e^{-y}\,(x\,\sin x+y\,\cos x)+C(x)\end{aligned}$$

ove $C(x)$ è una funzione di solo x. Troviamo successivamente $C(x)$ tale che anche la prima equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)=e^{-y}\,(\sin x+x\,\cos x-y\,\sin x)+C'(x)$$

sia uguale a

$$e^{-y}\,(x\,\cos x - y\,\sin x + \sin x)\ .$$

Risulta che $C'(x)$ deve annullarsi identicamente e quindi $C(x)$ dev'essere una costante reale C.

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte reale uguale ad u sono della forma

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{-y}\,(x\,\cos x - y\,\sin x) + \Big(e^{-y}\,(x\,\sin x + y\,\cos x) + C\Big)i \\
&= e^{-y}\,x\,(\cos x + i\,\sin x) + e^{-y}\,y\,(\underbrace{-\sin x + i\,\cos x}_{=\,i\,(\cos x + i\,\sin x)}) + Ci \\
&= e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x)\,(x + i\,y) + Ci \\
&= e^{-y}\,e^{i\,x}\,z + Ci = z\,e^{-y+i\,x} + Ci = z\,e^{i\,(x+i\,y)} + Ci \\
&= z\,e^{i\,z} + Ci\ ,
\end{aligned}$$

ove C è una costante reale.

3) : La funzione

$$f(z) := \frac{1}{1+z^6}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici nelle radici seste di -1, cioè in

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{(k-1)\,\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{(k-1)\,\pi}{3}\right), \qquad 1 \le k \le 6\ .$$

Per facilitare i calcoli rimarchiamo che

$$\begin{aligned}
&z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\ ,\ z_1^3 = i\ , \\
&z_2 = i\ ,\ z_3 = -\overline{z_1}\ ,\ z_4 = -z_1\ ,\ z_5 = -i\ ,\ z_6 = \overline{z_1}\ .
\end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned}
z^6 + 1 &= \big(z^2+1\big)\big(z^4 - z^2 + 1\big) \\
&= \big(z-i\big)\big(z+i\big)\big(z^4 - z^2 + 1\big) \\
&= \big(z-i\big)\big(z+i\big)\big(z-z_1\big)\big(z-z_3\big)\big(z-z_4\big)\big(z-z_6\big)\ ,
\end{aligned}$$

calcoliamo i residui di f nei poli $z_1\,, z_2\,, z_3$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z_1}(f) &= \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\, f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{\big(z-i\big)\big(z+i\big)\big(z-z_3\big)\big(z-z_4\big)\big(z-z_6\big)} \\
&= \frac{1}{\big(z_1^2+1\big)\big(z_1-z_3\big)\big(z_1-z_4\big)\big(z_1-z_6\big)} \\
&= \frac{1}{\big(z_1^2+1\big)\big(z_1+\overline{z_1}\big)\big(2\,z_1\big)\big(z_1-\overline{z_1}\big)} \\
&= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big(z_1^2+1\big)\cdot(\operatorname{Re} z_1)\cdot z_1\cdot(\operatorname{Im} z_1)} \\
&= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big(z_1^3+z_1\big)\cdot(\operatorname{Re} z_1)\cdot(\operatorname{Im} z_1)} \\
&= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big(i+z_1\big)\cdot(\operatorname{Re} z_1)\cdot(\operatorname{Im} z_1)} \\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\big(2\,i+2\,z_1\big)\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\big(\sqrt{3}+3\,i\big)\cdot\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3\,i}\cdot\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{12\,i}\cdot\big(1-i\sqrt{3}\big)\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z_2}(f) &= \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\, f(z) = \lim_{z\to i} (z-i)\, f(z) \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{1}{\big(z+i\big)\big(z^4-z^2+1\big)} \\
&= \frac{1}{\big(2\,i\big)\big(1-(-1)+1\big)} \\
&= \frac{1}{6\,i}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z_3}(f) &= \lim_{z\to z_3} (z-z_3)\, f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{\big(z-i\big)\big(z+i\big)\big(z-z_1\big)\big(z-z_4\big)\big(z-z_6\big)} \\
&= \frac{1}{\big(z_3^2+1\big)\big(z_3-z_1\big)\big(z_3-z_4\big)\big(z_3-z_6\big)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\big((\overline{z_1})^2+1\big)\big(-\overline{z_1}-z_1\big)\big(-\overline{z_1}+z_1\big)\big(-2\,\overline{z_1}\big)}$$
$$= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big((\overline{z_1})^2+1\big)\cdot(\operatorname{Re}z_1)\cdot(\operatorname{Im}z_1)\cdot\overline{z_1}}$$
$$= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big((\overline{z_1})^3+\overline{z_1}\big)\cdot(\operatorname{Re}z_1)\cdot(\operatorname{Im}z_1)}$$
$$= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big(-i+\overline{z_1}\big)\cdot(\operatorname{Re}z_1)\cdot(\operatorname{Im}z_1)}$$
$$= \frac{1}{8\,i}\cdot\frac{1}{\big(\overline{i+z_1}\big)\cdot(\operatorname{Re}z_1)\cdot(\operatorname{Im}z_1)}$$
$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\big(\overline{2\,i+2\,z_1}\big)\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\big(\sqrt{3}-3\,i\big)\cdot\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{3\,i}\cdot\frac{1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{12\,i}\cdot\big(1+i\sqrt{3}\big)\ ,$$

Indichiamo, per $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(w)$ e $\partial^- U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-w| = r\,, \operatorname{Im}z \geq 0\big\}\ ,$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\partial^+ U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{i(\pi-t)} = w - r\,e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Sia adesso $r > 1$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,r]$ con
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché γ_r aggira i soli poli $z_1\,, z_2\,, z_3$, applicando il teorema dei residui otteniamo

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z_1}(f) + \operatorname*{Res}_{z_2}(f) + \operatorname*{Res}_{z_3}(f)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{12i}\cdot\big(1 - i\sqrt{3}\big) + \frac{1}{6i} + \frac{1}{12i}\cdot\big(1 + i\sqrt{3}\big)\right)$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}\,,$$

quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3} - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora vale

$$\left|\int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{1+z^6}\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{1}{1+z^6}\right| \mathrm{d}|z|$$

$$\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{|z|^6 - 1}\,\mathrm{d}|z|$$

$$= \frac{r\pi}{r^6 - 1} \longrightarrow 0 \text{ per } r \longrightarrow +\infty$$

e risulta

$$\int_{-r\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Rimarco: Poiché f è pari, risulta anche

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\,.$$