NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Esame del 08.02.2012

1) a) Usando il teorema di Fubini si verifichi

$$\int_0^b \left(\int_0^a e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x \right) \sin y\, \mathrm{d}y = \int_0^a \left(\int_0^b e^{-xy} \sin y\, \mathrm{d}y \right) \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a\,, b > 0\,.$

b) Calcolando gli integrali

$$\int_0^a e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x\,, \quad \int_0^b e^{-xy} \sin y\, \mathrm{d}y$$

e passando al limite per $a \to +\infty$, si verifichi che

$$\int_0^b \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1 + x^2} \Big(1 - e^{-bx}(\cos b + x \sin b)\Big)\, \mathrm{d}x$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b > 0\,.$

c) Si mostri che

$$\lim_{b \to +\infty} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left| \int_0^b \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x \right| = 0\,,$$

cioè che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y$$

converge uniformemente rispetto ad $\alpha \in \mathbb{R}$ ed è uguale a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

2) Sia $U_r(z_o) = \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \, |z - z_o| < r \big\}$ il disco aperto con centro $z_o \in \mathbb{C}$ e di raggio $r > 0$. Si mostri che se

$$f : U_r(z_o) \setminus \{z_o\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione olomorfa tale che $\mathrm{Re}\, f$ è limitata, allora z_o è una singolarità rimovibile per f.

3) Indicheremo, per $z_o \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial U_r(z_o)$ il cerchio con centro in z_o e di raggio r, orientato positivamente (= contro il senso delle lancette) :

$$\partial U_r(z_o) \text{ è la curva } [0\,,2\,\pi] \ni t \longmapsto z_o + r\,e^{it} \in \mathbb{C}\,.$$

Con questa notazione, si calcoli l'integrale

$$\int\limits_{\partial U_\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{z}{(e^z - 1)\,\sin z}\,\mathrm{d}z\ .$$

Soluzioni:

1) **:** a) La funzione

$$[0\,,a]\times[0\,,b]\ni(x\,,y)\longmapsto e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\sin y\in\mathbb{R}$$

è continua ed il suo modulo è maggiorato dalla funzione costante 1 che è sommabile sul rettangolo $[0\,,a]\times[0\,,b]$. Perciò possiamo applicare il teorema di Fubini ottenendo

$$\begin{aligned}&\int_0^b\Big(\int_0^a e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\sin y\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\\ &=\iint\limits_{[0\,,a]\times[0\,,b]} e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\int_0^a\Big(\int_0^b e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\sin y\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}&\int_0^b\Big(\int_0^a e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\mathrm{d}x\Big)\sin y\,\mathrm{d}y\\ &=\int_0^a\Big(\int_0^b e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\Big)\cos(\alpha\,x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}\tag{1}$$

b) Calcoliamo prima le primitive di $x\longmapsto e^{-xy}\cos(\alpha\,x)$:

Tramite ripetuta integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}&\int e^{-xy}\cos(\alpha\,x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\alpha}\int e^{-xy}\,\mathrm{d}\sin(\alpha\,x)\\ &=\frac{1}{\alpha}\,e^{-xy}\sin(\alpha\,x)+\frac{y}{\alpha}\int e^{-xy}\sin(\alpha\,x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\, e^{-xy} \sin(\alpha\, x) - \frac{y}{\alpha^2} \int e^{-xy}\, \mathrm{d} \cos(\alpha\, x)$$
$$= \frac{1}{\alpha}\, e^{-xy} \sin(\alpha\, x) - \frac{y}{\alpha^2}\, e^{-xy} \cos(\alpha\, x) - \frac{y^2}{\alpha^2} \int e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x$$

e risulta successivamente

$$\left(1 + \frac{y^2}{\alpha^2}\right) \int e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2}\, e^{-xy} \big(\alpha \sin(\alpha\, x) - y \cos(\alpha\, x)\big)\,,$$

$$\int e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x = \frac{e^{-xy}}{\alpha^2 + y^2} \big(\alpha \sin(\alpha\, x) - y \cos(\alpha\, x)\big)\,. \qquad (2)$$

Il calcolo delle primitive di $y \longmapsto e^{-xy} \sin y$ è simile :

Integrando due volte per parti risulta

$$\int e^{-xy} \sin y\, \mathrm{d}y = - \int e^{-xy}\, \mathrm{d} \cos y$$
$$= - e^{-xy} \cos y - x \int e^{-xy} \cos y\, \mathrm{d}y$$
$$= - e^{-xy} \cos y - x \int e^{-xy}\, \mathrm{d} \sin y$$
$$= - e^{-xy} \cos y - x\, e^{-xy} \sin y - x^2 \int \sin y\, \mathrm{d}y$$

e poi deduciamo successivamente

$$\big(1 + x^2\big) \int e^{-xy} \sin y\, \mathrm{d}y = - e^{-xy} \big(\cos y + x \sin y\big)\,,$$

$$\int e^{-xy} \sin y\, \mathrm{d}y = - \frac{e^{-xy}}{1 + x^2} \big(\cos y + x \sin y\big)\,. \qquad (3)$$

Usando (2) e (3) possiamo calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^a e^{-xy} \cos(\alpha\, x)\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^{-ay}}{\alpha^2 + y^2} \big(\alpha \sin(\alpha\, a) - y \cos(\alpha\, a)\big) - \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \big(- y\big)$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \Big(y + e^{-ay} \big(\alpha \sin(\alpha\, a) - y \cos(\alpha\, a)\big)\Big)$$

e

$$\int_0^b e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y = -\,\frac{e^{-xb}}{1+x^2}\big(\cos b + x\,\sin b\big) + \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+x^2}\Big(1 - e^{-bx}\big(\cos b + x\,\sin b\big)\Big)\ .$$

Sostituendo ora questi integrali in (1) deduciamo

$$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{\alpha^2+y^2}\Big(y + e^{-ay}\big(\alpha\,\sin(\alpha\,a) - y\,\cos(\alpha\,a)\big)\Big)\right)\sin y\,\mathrm{d}y$$
$$= \int\limits_0^a \left(\frac{1}{1+x^2}\Big(1 - e^{-bx}\big(\cos b + x\,\sin b\big)\Big)\right)\cos(\alpha\,x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

cioè

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^b \left(\frac{\sin y}{\alpha^2+y^2}\Big(y + e^{-ay}\big(\alpha\,\sin(\alpha\,a) - y\,\cos(\alpha\,a)\big)\Big)\right)\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_0^a \left(\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\Big(1 - e^{-bx}\big(\cos b + x\,\sin b\big)\Big)\right)\mathrm{d}x\ .\end{aligned} \tag{4}$$

Alla parte sinistra di (4) possiamo passare al limite per $a \to +\infty$ sotto il segno di integrale :

Infatti, per ogni $y > 0$ vale

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\sin y}{\alpha^2+y^2}\Big(y + e^{-ay}\big(\alpha\,\sin(\alpha\,a) - y\,\cos(\alpha\,a)\big)\Big) = \frac{y\,\sin y}{\alpha^2+y^2}$$

ed abbiamo la maggioranza uniforme rispetto ad y

$$\left|\frac{\sin y}{\alpha^2+y^2}\Big(y + e^{-ay}\big(\alpha\,\sin(\alpha\,a) - y\,\cos(\alpha\,a)\big)\Big)\right| \le \frac{y\,\big(|\alpha| + 2\,y\big)}{\alpha^2+y^2}$$

ove la funzione $[\,0\,,b\,] \ni y \longmapsto \dfrac{y\,\big(|\alpha| + 2\,y\big)}{\alpha^2+y^2}$ è continua e limitata, quindi sommabile.

Alla parte destra di (4) la funzione integranda è sommabile su $[0\,,+\infty)$, essendo continua e maggiorata in modulo da

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \frac{1+x\,e^{-bx}}{1+x^2}\ .$$

Perciò

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_0^a \left(\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\Big(1-e^{-bx}\big(\cos b+x\,\sin b\big)\Big)\right)\mathrm{d}x$$

esiste ed è uguale a

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\Big(1-e^{-bx}\big(\cos b+x\,\sin b\big)\Big)\right)\mathrm{d}x\ .$$

Passando al limite per $a\to+\infty$ ad entrambe parti di (4) concludiamo che

$$\int\limits_0^b \frac{y\,\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\Big(1-e^{-bx}\big(\cos b+x\,\sin b\big)\Big)\right)\mathrm{d}x\ . \qquad (5)$$

c) Da (5) risulta per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$ e $b>0$

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_0^b \frac{y\,\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right|\\ &=\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}e^{-bx}\big(\cos b+x\,\sin b\big)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}\big(1+x\big)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_0^b \frac{y\,\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right| &\le \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}\big(1+x\big)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{t=bx}{=}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{b+t}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Usando il teroema della convergenza dominata si verifica facilmente la validità di

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{b+t}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

concludendo così

$$\lim_{b\to+\infty}\ \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left|\int\limits_0^{b}\frac{y\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right| = 0\,.$$

2) : Il modulo della funzione olomorfa

$$U_r(z_o)\setminus\{z_o\}\ni z\longmapsto e^{f(z)}\in\mathbb{C}$$

è uguale a

$$\left|e^{\mathrm{Re}\, f(z)+i\,\mathrm{Im}\, f(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}\, f(z)}$$

e quindi la funzione $e^{f(z)}$ è limitata. Per il teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili risulta che $e^{f(z)}$ ha una estensione olomorfa

$$g_1 : U_r(z_o)\longrightarrow\mathbb{C}\,.$$

Similmente si verifica che anche la funzione $e^{-f(z)}$ ha una estensione olomorfa

$$g_2 : U_r(z_o)\longrightarrow\mathbb{C}\,.$$

Poiché

$$g_1(z)\,g_2(z) = e^{f(z)}\,e^{-f(z)} = 1\,,\qquad z\in U_r(z_o)\setminus\{z_o\}\,,$$

per continuità risulta che abbiamo

$$g_1(z)\,g_2(z) = 1\ \text{ per ogni }\ z\in U_r(z_o)\,.$$

In particolare la funzione g_1 non si annulla sul intero disco $U_r(z_o)$ e di conseguenza ammette un logaritmo olomorfa. In altre parole esiste una funzione olomorfa $h : U_r(z_o)\longrightarrow\mathbb{C}$ tale che

$$e^{h(z)} = g_1(z)\,,\qquad z\in U_r(z_o)$$

$\left(h \text{ è una primitiva di } \dfrac{g_1'}{g_1}\right)$. Di conseguenza

$$e^{f(z)-h(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{h(z)}} = \frac{e^{f(z)}}{g_1(z)} = 1\,, \qquad z \in U_r(z_o)\setminus\{z_o\}$$

e così

$$\big\{f(z) - h(z)\,;\, z \in U_r(z_o)\setminus\{z_o\}\big\} \subset \big\{2\pi k i\,;\, k \in \mathbb{Z}\big\}\,.$$

Ma $\big\{f(z) - h(z)\,;\, z \in U_r(z_o)\setminus\{z_o\}\big\}$ è connesso in quanto immagine continua dell'insieme connesso $U_r(z_o)\setminus\{z_o\}$, mentre $\big\{2\pi k i\,;\, k \in \mathbb{Z}\big\}$ è discreto. Risulta che esiste un $k_1 \in \mathbb{Z}$ tale che $f(z) - h(z)$ è uguale a $2\pi k_1 i$ per ogni $z \in U_r(z_o)\setminus\{z_o\}$ e possiamo concludere che f si estende alla funzione $h + 2\pi k_1 i$ che è olomorfa su tutto $U_r(z_o)$.

3) : La funzione

$$f(z) := \frac{z}{(e^z - 1)\sin z}$$

è definita e olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\big\{k\pi\,;\, k\in\mathbb{Z}\big\}$.

Attorno a 0 f è il quoziente della funzione olomorfa $\dfrac{z}{\sin z}$ che non si annulla in 0 e della funzione olomorfa $e^z - 1$ che ha zero semplice in 0, perciò 0 è un polo semplice per f. Il residuo di f in 0 è

$$\operatorname*{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0}\big(zf(z)\big) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z-1}\,\frac{z}{\sin z}\right) = 1\,.$$

Attorno a π f è il quoziente della funzione olomorfa $\dfrac{z}{e^z-1}$ che non si annulla in π e della funzione olomorfa $\sin z$ che ha zero semplice in π, perciò anche π è un polo semplice per f. Il residuo di f in π è

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_\pi(f) &= \lim_{z\to 0}\big((z-\pi)f(z)\big) = \lim_{z\to\pi}\left(\frac{z}{e^z-1}\,\frac{z-\pi}{\sin z}\right)\\ &= \lim_{z\to\pi}\left(-\,\frac{z}{e^z-1}\,\frac{z-\pi}{\sin(z-\pi)}\right)\\ &= -\,\frac{\pi}{e^\pi - 1}\,.\end{aligned}$$

0 e π sono le sole singolarotà di f nel disco $U_\pi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ perciò il teorema dei residui implica

$$\int\limits_{\partial U_\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_0(f) + \operatorname*{Res}_\pi(f)\Big) = 2\pi i\left(1 - \frac{\pi}{e^\pi - 1}\right).$$

Approfondimento. Vediamo, come si calcola

$$\int\limits_{\partial U_\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{g(z)}{(e^z-1)\sin z}\,\mathrm{d}z$$

dove g è una funzione olomorfa arbitraria su un intorno del disco chiuso $\overline{U_\pi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

La funzione

$$f(z) := \frac{g(z)}{(e^z-1)\sin z}$$

ha in 0

- un polo di second'ordine se $g(0)\neq 0$,
- un polo semplice se 0 è un zero semplice di g,
- una singolarità rimovibile se 0 è un zero di multiplicità ≥ 2 di g,

mentre in π ha

- un polo semplice se $g(\pi)\neq 0$,
- una singolarità rimovibile se π è un zero di g.

Per il calcolo dei residui rimarchiamo che la formula

$$\operatorname*{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^2 f(z)\big)$$

vale non solo nel caso di un polo di second'ordine in 0, ma in tutti i casi quando 0 è un polo di ordine ≤ 2, incluso il caso di un polo semplice e quello di una singolarità rimovinile :

Infatti, se

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} c_k\, z^k\,,$$

allora

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^2 f(z)\big) =&\ \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=-2}^{\infty} c_k\, z^{k+2}\\ \overset{j=k+2}{=}&\lim_{z\to 0}\sum_{j=0}^{\infty} j\, c_{j-2} z^{j-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to 0}\Big(c_{-1} + 2\,c_o z + 3\,c_1 z^2 + 4\,c_2 z^3 \ldots\Big)\\
&= c_{-1}
\end{aligned}
$$

senza assumere che $c_{-2} \neq 0$.

Similmente, la formula

$$\operatorname*{Res}_{\pi}(f) = \lim_{z\to\pi}\big((z-\pi)\,f(z)\big)$$

vale in tutti i casi quando π è un polo di ordine ≤ 1.

Perciò nei calcoli seguenti non abbiamo nessun vincolo su g.

Ora, per calcolare $\operatorname*{Res}_0(f)$ calcoliamo la derivata $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^2 f(z)\big)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^2 f(z)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2 g(z)}{(e^z-1)\,\sin z}\\
&= \frac{2\,z\,g(z) + z^2 g'(z)}{(e^z-1)\,\sin z} - z^2 g(z)\,\frac{e^z \sin z + (e^z-1)\,\cos z}{(e^z-1)^2 \sin^2 z}\\
&= \frac{z^2}{(e^z-1)\,\sin z}\,g'(z)\\
&\quad + \left(\frac{2\,z}{(e^z-1)\,\sin z} - z^2\,\frac{e^z \sin z + (e^z-1)\,\cos z}{(e^z-1)^2 \sin^2 z}\right) g(z)\\
&= \frac{z^2}{(e^z-1)\,\sin z}\,g'(z)\\
&\quad + \frac{2\,z\,(e^z-1)\,\sin z - z^2\big(e^z \sin z + (e^z-1)\,\cos z\big)}{(e^z-1)^2 \sin^2 z}\,g(z)\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_0(f) &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^2 f(z)\big)\\
&= g'(0)\,\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(e^z-1)\,\sin z}\\
&\quad + g(0)\,\lim_{z\to 0}\frac{2\,z\,(e^z-1)\,\sin z - z^2\big(e^z \sin z + (e^z-1)\,\cos z\big)}{(e^z-1)^2 \sin^2 z}\,.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto dei limiti notevoli

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1\,, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1\,,$$

e quindi di

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(e^z-1)\,\sin z}=\left(\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}\right)\left(\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\right)=1$$

e

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\frac{2\,z\,(e^z-1)\,\sin z-z^2\big(e^z\sin z+(e^z-1)\,\cos z\big)}{(e^z-1)^2\sin^2 z}\\
&=\lim_{z\to 0}\Bigg(\frac{z^4}{(e^z-1)^2\sin^2 z}\,\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\,\frac{2\,(e^z-1)\,\sin z-z\,\big(e^z\sin z+(e^z-1)\,\cos z\big)}{z^3}\Bigg)\\
&=\left(\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}\right)^2\left(\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\right)^2\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\lim_{z\to 0}\frac{2\,(e^z-1)\,\sin z-z\,\big(e^z\sin z+(e^z-1)\,\cos z\big)}{z^3}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{2\,(e^z-1)\,\sin z-z\,\big(e^z\sin z+(e^z-1)\,\cos z\big)}{z^3}\,,
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_0(f)=g'(0)+\\
&\qquad+g(0)\,\lim_{z\to 0}\frac{2\,(e^z-1)\,\sin z-z\,e^z\sin z-z\,(e^z-1)\,\cos z}{z^3}\,.
\end{aligned}$$

Dividiamo il limite alla parte destra in due parti :

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\frac{2\,(e^z-1)\,\sin z-z\,e^z\sin z-z\,(e^z-1)\,\cos z}{z^3}\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)\,\sin z-z\,e^z\sin z}{z^3}+\lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)\,\sin z-z\,(e^z-1)\,\cos z}{z^3}\\
&=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{e^z-1-z\,e^z}{z^2}\right)+\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\cdot\frac{\sin z-z\,\cos z}{z^2}\right)\\
&=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-z\,e^z}{z^2}+\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\,\cos z}{z^2}\,.
\end{aligned}$$

Usando i sviluppi in serie di potenze

$$\begin{aligned} e^z - 1 - z\,e^z &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{(p-1)!} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) z^k \\ &= -\frac{1}{2}\,z^2 - \frac{1}{3}\,z^3 + \ldots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin z - z\,\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2\,k+1)!} - z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2\,k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!} - \frac{(-1)^k}{(2\,k)!} \right) z^{2k+1} \\ &= \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{1}{30}\,z^5 + \ldots \end{aligned}$$

risulta

$$\lim_{z\to 0} \frac{2\,(e^z-1)\,\sin z - z\,e^z \sin z - z\,(e^z-1)\,\cos z}{z^3} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$\operatorname*{Res}_0(f) = g'(0) - \frac{g(0)}{2}\ .$$

Il calcolo di $\operatorname*{Res}_\pi(f)$ è più semplice trattandosi di un polo di ordine ≤ 1:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_\pi(f) &= \lim_{z\to 0} \big((z-\pi) f(z)\big) = \lim_{z\to\pi} \left(\frac{g(z)}{e^z-1}\,\frac{z-\pi}{\sin z} \right) \\ &= \lim_{z\to\pi} \left(-\,\frac{g(z)}{e^z-1}\,\frac{z-\pi}{\sin\,(z-\pi)} \right) \\ &= -\,\frac{g(\pi)}{e^\pi - 1}\ . \end{aligned}$$

Per il teorema dei residui concludiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial U_\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\,\pi\,i \Big(\operatorname*{Res}_0(f) + \operatorname*{Res}_\pi(f) \Big) \\ &= 2\,\pi\,i \left(g'(0) - \frac{g(0)}{2} - \frac{g(\pi)}{e^\pi - 1} \right)\ . \end{aligned}$$