NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Esame del 08.02.2013

1) a) Sia $\chi_{[0\,,t]}$ la funzione caratteristica di $[\,0\,,t\,] \subset \mathbb{R}$. Mostrare che

$$\mathbb{R}^2 \ni (t\,,s) \longmapsto \chi_{[0\,,t]}(s) \in [\,0\,,+\infty)$$

è una funzione di Borel.

b) Sia $f : [\,0\,,+\infty) \longrightarrow [\,0\,,+\infty)$ una funzione sommabile. Mostrare che la funzione

$$[\,0\,,+\infty) \ni t \longmapsto \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \in [\,0\,,+\infty)$$

è continua.

Suggerimento: Si usi il teorema della convergenza monotona.

c) Sia $f : [\,0\,,+\infty) \longrightarrow [\,0\,,+\infty)$ una funzione sommabile. Si verifichi l'uguaglianza

$$\int_0^x \Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t = \int_0^x \big((x-s)\,f(s) \big)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x \geq 0\,.$$

2) È sommabile la funzione $f : [\,0\,,+\infty) \times [\,0\,,+\infty)] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + (x^2+y^2)^2} \ ?$$

3) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto non limitato e sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

I) Se $U = \mathbb{C}$ si dimostri che esiste un intero n e un numero complesso $a \neq 0$ tale che $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a$.
Suggerimento: si consideri la funzione $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $g(z) := f(1/z)$.

II) Se $U = \mathbb{C}$ si dimostri che esiste un polinomio p di grado n tale che $f(z) = p(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

III) Se $\mathbb{C} \setminus U$ è un insieme finito e le singolarità di f sono poli, si dimostri che esistono polinomi q_1 e q_2 tali che $f(z) = \frac{q_1(z)}{q_2(z)}$ per ogni $z \in U$.

4) A) Sia ϵ un numero reale tale che $0 < \epsilon < 1$ e sia Q_ϵ la linea spezzata orientata di vertici $1 + i\epsilon$, $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$ e $1 - i\epsilon$ nell'ordine dato. Calcolare

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Q_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2}.$$

B) Sia ora ϵ un numero reale tale che $0 < \epsilon < \pi$ e sia $\gamma_\epsilon : [\epsilon, 2\pi - \epsilon] \to \mathbb{C}$ il cammino regolare definito da $\gamma_\epsilon(\theta) = e^{i\theta}$. Calcolare

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2}$$

argomentando in modo completo.

Soluzioni:

1) **:** a) La funzione

$$\mathbb{R}^2 \ni (t\,,s) \longmapsto \chi_{[0\,,t]}(s) \in [0\,,+\infty)$$

prende il valore 1 se $0 \leq s \leq t$ ed altrimenti è uguale a 0. Perciò è la funzione caratteristica dell'insieme chiuso

$$\big\{(t\,,s) \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq s \leq t\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

e come tale è una funzione di Borel.

b) Poiché $f \geq 0$, la funzione

$$\begin{aligned} F : [0\,,+\infty) \ni t \longmapsto \int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s &= \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t)}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \in [0\,,+\infty) \end{aligned}$$

è crescente. Per ogni successione crescente $0 \leq t_k \nearrow t$ il teorema della convergenza monotona crescente implica

$$F(t_k) = \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t_k)}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \nearrow \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t)}(s) f(s)\,\mathrm{d}s = F(t)\,,$$

perciò

$$F(t-0) = F(t)\,.$$

Similmente, per ogni successione decrescente $t_k \searrow t \geq 0$ abbiamo per il teorema della convergenza monotona decrescente

$$+\infty > F(t_k) = \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t_k]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \searrow \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s = F(t)\,,$$

quindi anche

$$F(t+0) = F(t)\,.$$

Risulta che in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ il limite sinistro di F coincide con il limite destro, cioè F è continua.

Osservazione:

È da menzionare che già per una funzione $f : [\,0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ che è assunta sommabile solo localmente, cioè su ogni sottoinsieme compatto di $[\,0\,,+\infty)$, e non necessariamente positiva, la funzione

$$F : [\,0\,,+\infty) \ni t \longmapsto \int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{C}$$

risulta essere continua.

Sia infatti $t+1 > t_k \to t$ in $[\,0\,,+\infty)$. Allora le funzioni

$$f_k : [\,0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \chi_{[0\,,t_k]}(s) f(s) \in \mathbb{C}\,, \qquad k \geq 1$$

convergono quasi ovunque (non in $s=t$ se infiniti t_k sono $< t$) a

$$[\,0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \chi_{[0\,,t]}(s) f(s) \in \mathbb{C}$$

e poiché abbiamo

$$|f_k(s)| \leq \chi_{[0\,,t+1]}(s)|f(s)|\,, \qquad s \in [\,0\,,+\infty)\,, k \geq 1\,,$$

dove $\chi_{[0\,,t+1]}|f|$ è sommabile, per il teorema della convergenza dominata risulta che

$$F(t_k) = \int\limits_0^{+\infty} f_k(s)\,\mathrm{d}s \longrightarrow \int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s = F(t)\,.$$

Concludiamo che F ammette limite uguale a $F(t)$ in ogni $t \geq 0$, quindi F è continua in ogni $t \geq 0$.

c) Per il teorema di Tonelli avremo

$$\begin{aligned}\int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t &= \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{[0\,,x]\times[0\,,x]} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

se verifichiamo che la funzione

$$[\,0\,,x\,] \times [\,0\,,x\,] \ni (s\,,t) \longmapsto \chi_{[0\,,t]}(s) f(s) \in [\,0\,,+\infty)$$

è misurabile. Ma per a) la funzione

$$\mathbb{R}^2 \ni (t\,,s) \longmapsto \chi_{[0\,,t]}(s) \in [\,0\,,+\infty)$$

è di Borel, quindi misurabile, e la misurabilità di

$$[\,0\,,x\,] \times [\,0\,,x\,] \ni (t\,,s) \longmapsto f(s)$$

risulta facilmente dalla misurabilità di f :

> Per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(U) \subset [\,0\,,+\infty)$ è misurabile, perciò anche la controimmagine
>
> $$\big\{(t\,,s) \in [\,0\,,x\,] \times [\,0\,,x\,]\,;\, f(s) \in U\big\} = [\,0\,,x\,] \times \big([\,0\,,x\,] \cap f^{-1}(U)\big)$$
>
> è misurabile.

Applicando ora di nuovo il teorema di Tonelli, con il ruolo delle variabili scambiato, risulta

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0\,,x]\times[0\,,x]} \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \chi_{[0\,,t]}(s) f(s)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \chi_{[0\,,t]}(s)\,\mathrm{d}t\Big) f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^x \chi_{[s\,,x]}(t)\,\mathrm{d}t\Big) f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_0^x \big((x-s)\,f(s)\big)\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

e concludiamo che

$$\int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \big((x-s)\,f(s)\big)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x \geq 0\,. \tag{*}$$

Osservazione:

Anche per la validità di (*) basta che f sia una funzione complessa definita su $[\,0\,,+\infty)$ e localmente sommabile (Esercizio!). Non è difficile verificare (Esercizio!) che, sotto questi ipotesi su f, se esiste l'integrale improprio

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{C}$$

allora abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

ma l'implicazione reciproca non è vera (vedi il caso $f(s) = \sin s$). Si dice che l'integrale improprio $\int\limits_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s$ converge nel senso di Cesàro se esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x \Big(\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$$

o, per (*) equivalente, se esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_0^x \Big(1-\frac{s}{x}\Big)\,f(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{C}\,.$$

Come abbiamo visto, la convergenza usuale dell'integrale improprio

$$\int\limits_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s$$

implica la sua convergenza nel senso di Cesàro allo stesso limite.

Integrali impropri nel senso di Cesàro sono particolarmente utili nella teoria della trasformazione di Fourier:

Per esempio, la formula di inversione

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,e^{-its}\mathrm{d}s\Big)\,e^{ixt}\mathrm{d}t = f(x)$$

vale per qualsiasi funzione continua sommabile f su $\mathbb{R}$ se il secondo integrale nella formula è preso nel senso di Cesàro (Teorema di Fejér). Una dimostrazione si trova, per esempio, nel libro (Teorema 49.3)

T. W. Körner: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988 .

2) : La funzione f è continua e quindi misurabile. Perciò la sua sommabilità è equivalente alla validità di

$$\int\limits_{[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)} |f(x\,,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty\,.$$

Per il calcolo dell'integrale di cui sopra ci conviene passare a cordinate polari. Poiché

$$[\,0\,,+\infty)\times[\,0\,,+\infty) = \Big\{\big(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta\big)\,;0\leq\rho<+\infty\,,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\Big\}\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)} |f(x\,,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)} \frac{|x^2-y^2|}{1+(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2|\cos^2\theta-\sin^2\theta|}{1+\rho^4}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho^3}{1+\rho^4}\,\mathrm{d}\rho\Bigg)\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^2\theta-\sin^2\theta|\,\mathrm{d}\theta\Bigg)\,.\end{aligned}$$

Ora

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho^3}{1+\rho^4}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\overset{s=\rho^2}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(1+s^2)'}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\,\ln(1+s^2)\Bigg|_{s=0}^{s=+\infty} = +\infty$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2\theta - \sin^2\theta|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(2\theta)|\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\sin t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi}\Big)$$
$$= 1$$

implicano

$$\int_{[0\,,+\infty)\times[0\,,+\infty)} |f(x\,,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,,$$

perciò f non è sommabile.

3) : I) Come suggerito sia $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(z) := f(1/z)$. Abbiamo

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\ .$$

Quindi g ha una singolarità isolata polare in 0 e, detto n l'ordine del polo, esiste un numero complesso $a \neq 0$ tale che $\lim\limits_{z\to 0} g(z)z^n = a$. Perciò

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \lim_{z\to 0} g(z)z^n = a\ .$$

II) (Primo metodo). Siccome f è olomorfa su $\mathbb{C}$ il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di f in 0 è $+\infty$. Quindi per ogni $z\in\mathbb{C}$ si ha

$$f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$$

dove $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$. Di conseguenza per ogni $z \neq 0$ abbiamo

$$\frac{f(z)}{z^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}{z^n} + \frac{\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i z^i}{z^n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{z^n} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i z^{i-n} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{z^n} + \sum_{i=1}^{+\infty} a_{n+i} z^i \ .$$

Si noti che, siccome per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_{n+i} z^i = \frac{f(z)}{z^n} - \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{z^n} \ ,$$

la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} a_{n+i} z^i$ converge per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e per la teoria delle serie di potenze definisce una funzione h olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Siccome esistono finiti i limiti $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a$ e $\lim_{z\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{z^n} = a_n$ esiste finito anche il limite $\lim_{z\to\infty} h(z)$.

Se ne deduce che la funzione h è limitata e per il teorema di Liouville deve essere costante. Siccome $h(0) = 0$ si ottiene che h è la funzione nulla e $a_i = 0$ per ogni $i > n$. In conclusione $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ e a $a_n = a$.

II) (Secondo metodo). Siccome f è olomorfa su $\mathbb{C}$ il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di f in 0 è $+\infty$. Quindi per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$$

con $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$. Di conseguenza, per ogni $z \neq 0$ si ha $g(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^{-i}$.

Inoltre abbiamo già visto nella dimostrazione di I) che $g(z)$ ha un polo di ordine n in 0, perciò per ogni $i \in \mathbb{Z}$ esiste una succesione $b_i \in \mathbb{C}$ tale che tale che per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i + \sum_{i=1}^{n} b_{-i} z^{-i} \ .$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie bilatero abbiamo $b_i = 0$ per $i > 0$, $a_i = b_{-i}$ per $0 \leq i \leq n$ e $a_i = 0$ per $i > n$. In particolare

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Complemento: l'unicità dello sviluppo in serie bilatero.

Dimostriamo qui l'unicità (enunciata senza dimostrazione a lezione) dello sviluppo in serie bilatero per una funzione olomorfa su una corona circolare.

Lemma (unicità dello sviluppo in serie bilatero).

Sia C una corona circolare aperta di centro z_0, raggio interno r e raggio esterno R con $r\,,R\,$. Sia $f : C \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Per ogni $j \in \mathbb{Z}$ sia $a_j \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j}$$

per ogni $z \in C$. Sia $r < \rho < R$ e sia γ_ρ la circonferenza di centro z_0 e raggio ρ percorsa in senso antiorario.

Allora per ogni $j \in \mathbb{Z}$ si ha $a_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz\,.$

In particolare se

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j (z-z_0)^j + \sum_{j=1}^{+\infty} b_{-j}(z-z_0)^{-j}$$

per ogni $z \in C$ allora $a_j = b_j$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione: Siccome le serie

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^j \text{ e } \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j}$$

convergono uniformemente sui compatti di C anche le serie di potenze

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^{j-k-1} \text{ e } \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j-k-1}$$

convergono uniformemente sui compatti di C e in particolare su γ_ρ. Inoltre per ogni $z \in C$ si ha

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^{j-k-1} + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j}(z-z_0)^{-j-k-1}\ .$$

Quindi

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz =$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^{j-k-1} \right) dz + \int_{\gamma_\rho} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j} (z-z_0)^{-j-k-1} \right) dz =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{j-k-1} dz + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j} \int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{-j-k-1} dz$$

$\Big($nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la convergenza uniforme su γ_ρ di

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z-z_0)^{j-k-1} \text{ e } \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j} (z-z_0)^{-j-k-1}$$

o, equivalentemente, la convergenza uniforme sull'intervallo $[0, 2\pi]$ delle serie di funzioni continue

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j (\rho e^{i\theta})^{j-k-1} \rho\, i\, e^{i\theta} \;\text{ e }\; \sum_{j=1}^{+\infty} a_{-j} (\rho e^{i\theta})^{-j-k-1} \rho\, i\, e^{i\theta} \Big).$$

Siccome l'integrale $\displaystyle\int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^m dz$ è nullo per ogni intero $m \neq -1$ $\Big($in questo caso

$$(z-z_0)^m dz = \frac{1}{m+1} d(z-z_0)^{m+1} \text{ e } \int_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{-1} dz = 2\pi i \Big)$$

si ottiene infine

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i a_k.$$

III) Sia $\mathbb{C} \backslash U = \{z_1, \cdots, z_l\}$, siano $z_1, \cdots, z_l$ poli per f e siano $n_1, \cdots, n_l$ le loro ripettive molteplicità. Definiamo il polinomio q_2 ponendo $q_2(z) := \displaystyle\prod_{j=1}^{l} (z-z_j)^{n_j}$. Per costruzione il prodotto $q_2 \cdot f$ definisce una funzione olomorfa su U che ammette solo singolarità isolate eliminabili nei punti $z_1, \cdots, z_l$. Inoltre $\displaystyle\lim_{z \to \infty} q_2(z) \cdot f(z) = \infty$. Allora per il punto II) esiste un polinomio q_1 tale che $q_2(z) \cdot f(z) = q_1(z)$ per ogni $z \in U$. Se ne conclude che $f(z) = \dfrac{q_1(z)}{q_2(z)}$ per ogni $z \in U$.

4) : A) La funzione $k(z) := \dfrac{1}{z^3 - z^2}$ è olomorfa fuori dai punti 0 e 1. In 0 ha un polo di molteplicità 2 e in 1 ha un polo semplice. I residui nei poli sono i seguenti:

$$Res(k,1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{z^3 - z^2} = 1 \ ,$$

$$Res(k,0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z^3 - z^2} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-1} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1 \ .$$

Sia $\alpha_\epsilon : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$ il cammino definito da $\alpha_\epsilon(\theta) := 1 + \epsilon e^{i\theta}$.

Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{Q_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} + \int_{\alpha_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} = 2\pi i (Res(k,1) + Res(k,0)) = 0.$$

Quindi

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{Q_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\alpha_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} \ .$$

Siccome α_ϵ è un arco della circonferenza di centro 1 e raggio ϵ che percorre un angolo orientato indipendente da ϵ e di ampiezza pari a π, per il lemma del piccolo cerchio si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\alpha_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} = \pi i Res(k,1) = +\pi i$$

e in conclusione

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{Q_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} = -\pi i.$$

B) Sia β_ϵ il cammino supportato sull'arco di circonferenza centrato in 1, contenuto nel cerchio unitario, che connette gli estremi di γ_ϵ percorso in senso orario. Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} + \int_{\beta_\epsilon} \frac{dz}{z^3 - z^2} = 2\pi i (Res(k,0)) = -2\pi i.$$

Quindi il limite voluto è determinato da $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\frac{dz}{z^3-z^2}$. Si noti che per calcolare questo limite non possiamo applicare direttamente il lemma del piccolo cerchio perché l'angolo percorso da β_ϵ dipende da ϵ: tuttavia sarà sufficiente adattare la dimostrazione del lemma del piccolo cerchio a questo caso particolare.

Siccome $k(z) = \frac{1}{z^3-z^2}$ ha un polo semplice in 1 con residuo pari a 1 esiste una funzione $l(z)$ olomorfa in un intorno V di 1 tale che $k(z) = \frac{1}{z-1} + l(z)$ per ogni $z \in V$. Siccome $|l|$ è limitato in un intorno di 1 e la lunghezza di β_ϵ tende a 0 per ϵ che tende a 0, si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon} l(z)dz = 0\ .$$

Inoltre siccome β_ϵ è un arco di circonferenza centrato in 1 percorso in senso orario si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\frac{1}{z-1}dz = -\delta_\epsilon i$$

dove δ_ϵ è l'ampiezza assoluta dell'angolo (minore di π) compreso tra la semiretta uscente da 0 e passante per $e^{i\epsilon}$ e la semiretta uscente da 0 e passante per $e^{-i\epsilon}$. Si noti che questo angolo è un angolo alla circonferenza (unitaria e centrata nell'origine) il cui corrispondente angolo al centro misura $2\pi - 2\epsilon$: quindi la sua ampiezza è $\delta_\epsilon = \pi - \epsilon$.

Di conseguenza otteniamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\frac{dz}{z^3-z^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\left(\frac{1}{z-1} + l(z)\right)dz =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\frac{1}{z-1}dz = \lim_{\epsilon\to 0} -\delta_\epsilon i = \lim_{\epsilon\to 0} -(\pi-\epsilon)i = -\pi i\,.$$

In conclusione abbiamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{dz}{z^3-z^2} = -2\pi i - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\beta_\epsilon}\frac{dz}{z^3-z^2} = -2\pi i + \pi i = -\pi i\ .$$