NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Esame del 08.04.2015

1) Si stabilisca se la formula

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{|x^2+y^2-1|^\alpha}{x^2+y^2-1} & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2\,, x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

definisce una funzione sommabile f sull'anello

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2 \right\}$$

per

$$\alpha) \quad \alpha = \frac{1}{2}\,;$$

$$\beta) \quad \alpha = 0 \quad .$$

2) Sia $0 < s < 1$. Usando l'identità

$$\ln \frac{1+s\,x}{1-s\,x} = \int\limits_0^1 \frac{2\,s\,x}{1-s^2x^2y^2}\,\mathrm{d}y$$

ed il teorema di Fubini-Tonelli, si calcoli

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+s\,x}{1-s\,x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3) a) Sia $a \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $|a| < 1$ e sia $\overline{a}$ il suo coniugato. Sia $f_a : \mathbb{C} \setminus \{\overline{a}^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita ponendo $f_a(z) := \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{a}^{-1}\}$. Sia $C \subset \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria.
Si mostri che $f_a(C) \subset C$.

b) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso contenente il disco unitario chiuso $\overline{D_{(0,1)}}$. Sia $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e tale che $g(C) \subset C$. Si mostri che g è costante o si annulla in almeno un punto del disco unitario aperto $D_{(0,1)}$.

c) Si mostri che esistono $m \in \mathbb{N}$, $a_1, .., a_m \in D_{(0,1)}$, $n_1, .., n_m \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tali che $g(z) = e^{i\theta} \displaystyle\prod_{j=1}^{m} f_{a_j}(z)^{n_j}$ per ogni $z \in U$.

4) Si usi il teorema dei residui per calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, gli integrali,

$$A) \quad \int_0^{2\pi} \sin^n(x)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e}$$

$$B) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Indichiamo con C la circonferenza unità

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\, ; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

e con A l'annello

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\, ; \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2 \right\}.$$

La formula

$$g(x\,,y) = \frac{|x^2+y^2-1|^\alpha}{x^2+y^2-1}$$

definisce una funzione continia $g : \mathbb{R}^2 \setminus C \longrightarrow \mathbb{R}$, positiva all'esterno di C e negativa nell'interno.

Ora verifichiamo che la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{|x^2+y^2-1|^\alpha}{x^2+y^2-1} & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2\,, x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

è di Borel. Infatti, se U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$ che non contiene 0 , allora la controimmagine $f^{-1}(U)$ è l'intersezione dell'insieme aperto $g^{-1}(U)$ con l'insieme chiuso A , e quindi di Borel. Se invece l'insieme aperto $U \subset \mathbb{R}$ contiene 0 , allora $f^{-1}(U) = \big(A \cap g^{-1}(U)\big) \cup C$ dove A e C sono chiusi, mentre $g^{-1}(U)$ è aperto, perciò è di Borel anche in questo caso.

Cosicché la funzione f è misurabile e la sua sommabilità è equivalente alla finitezza dell'integrale del suo modulo, cilè alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_A \left| \frac{|x^2+y^2-1|^\alpha}{x^2+y^2-1} \right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_A |x^2+y^2-1|^{\alpha-1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \qquad (1)$$

Il calcolo dell'integrale (1) si svolge separatamente sull'anello

$$A_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 < 1 \right\},$$

dove $|x^2 + y^2 - 1| = 1 - x^2 - y^2$, e sull'anello

$$A_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; 1 < x^2 + y^2 \leq 2 \right\},$$

dove $|x^2 + y^2 - 1| = x^2 + y^2 - 1$, tenendo poi conto che

$$\begin{aligned} &\int\limits_A |x^2 + y^2 - 1|^{\alpha - 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{A_1} (1 - x^2 - y^2)^{\alpha - 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int\limits_{A_2} (x^2 + y^2 - 1)^{\alpha - 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, . \end{aligned}$$

Per i calcoli usiamo le coordinate polari e poi il teorema di Tonelli.

L'integrale su A_1 :

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_1} (1 - x^2 - y^2)^{\alpha - 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha - 1} \rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} (1 - \rho^2)^{\alpha - 1} \rho \, \mathrm{d}\rho \\ &= -\pi \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} (1 - \rho^2)^{\alpha - 1} \, \mathrm{d}(1 - \rho^2) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{\pi}{\alpha} (1 - \rho^2)^{\alpha} \Big|_{\rho = 1/\sqrt{2}}^{\rho = 1} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ -\pi \ln(1 - \rho^2) \Big|_{\rho = 1/\sqrt{2}}^{\rho = 1} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha} \left(\dfrac{1}{2} \right)^{\alpha} & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

L'integrale su A_2 :

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{A_2} (x^2+y^2-1)^{\alpha-1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} (\rho^2-1)^{\alpha-1} \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} (\rho^2-1)^{\alpha-1} \rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} (\rho^2-1)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}(\rho^2-1) \\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha}(\rho^2-1)^{\alpha}\Big|_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} & \text{se } \ \alpha \neq 0 \\ \pi \ln(\rho^2-1)\Big|_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} & \text{se } \ \alpha = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha} & \text{se } \ \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \ \alpha \leq 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Concludiamo che f è sommabile esattamente quando $\alpha > 0$.

Quindi le risposte alle domande del compito sono :

α) Per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ la funzione f è sommabile ;

β) Per $\alpha = 0$ la funzione f non è sommabile.

2) **:** Poiché

$$
\ln \frac{1+s\,x}{1-s\,x} = \int\limits_0^1 \frac{2\,s\,x}{1-s^2x^2y^2}\,\mathrm{d}y \,,
$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+s\,x}{1-s\,x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\frac{2\,s\,x}{1-s^2x^2y^2}\,\mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_0^1 \frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y \Bigg) \mathrm{d}x \,.
\end{aligned}
$$

Ma, applicando il teorema di Tonelli alla funzione positiva continua

$$[0\,,1)\times[0\,,1)\ni(x,y)\longmapsto\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\;,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{[0\,,1)\times[0\,,1)}\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+s\,x}{1-s\,x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}\qquad(*)$$

Resta di svolgere le integrazioni alla parte destra di (*).
Per calcolare

$$\int\limits_0^1\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(che esiste per ogni $y\in[0\,,1]$) usiamo la sostituzione

$$x=\sin t\,,\quad \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$$

ottenendo

$$\frac{2\,s}{(1-s^2x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2\,s}{(1-s^2y^2\sin^2t)\cos t}\,\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\,s}{1 - s^2 y^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Ora abbiamo da integrare una funzione razionale in $\cos^2 t$ e $\sin^2 t$, perciò una sostituzione adatta per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale è

$$u = \mathrm{tg} t\,, \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = (1 + \mathrm{tg}^2 t)\,\mathrm{d}t = (1 + u^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poiché

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 t} = 1 - \frac{1}{1 + u^2} = \frac{u^2}{1 + u^2}\ ,$$

risulta

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2\,s}{(1 - s^2 x^2 y^2)\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\,s}{1 - s^2 y^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\,s}{1 - s^2 y^2 \dfrac{u^2}{1 + u^2}} \cdot \frac{1}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\,s}{1 + (1 - s^2 y^2)\,u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2\,s}{\sqrt{1 - s^2 y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\big(\sqrt{1 - s^2 y^2}\,u\big)}{1 + \big(\sqrt{1 - s^2 y^2}\,u\big)^2} \\
&= \frac{2\,s}{\sqrt{1 - s^2 y^2}}\,\mathrm{arctg}\Big(\sqrt{1 - s^2 y^2}\,u\Big)\Bigg|_{u=0}^{u=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{2\,s}{\sqrt{1 - s^2 y^2}} = \frac{\pi\,s}{\sqrt{1 - s^2 y^2}}
\end{aligned}$$

e, sostituendo in (*), concludiamo :

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} \ln\frac{1 + s\,x}{1 - s\,x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\pi\,s}{\sqrt{1 - s^2 y^2}}\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(sy)}{\sqrt{1 - (sy)^2}}$$

$$= \pi \arcsin(sy)\Big|_{y=0}^{y=1} = \pi \arcsin(s)\,.$$

3) : a) Se $z \in C$, cioè $z\overline{z} = 1$, abbiamo

$$|f_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{z\left(\frac{1}{z}-\overline{a}\right)}\right| = \left|\frac{z-a}{z\,(\overline{z}-\overline{a})}\right| = \frac{1}{|z|}\left|\frac{z-a}{\overline{z-a}}\right| = \frac{1}{|z|}$$
$$= 1\,,$$

quindi $f_a(C) \subset C$.

b) Per il principio del massimo modulo, applicato a g su $\overline{D_{(0,1)}}$, abbiamo $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in D_{(0,1)}$. Se g non si annulla in $D_{(0,1)}$, possiamo applicare il principio del minimo modulo a g su $\overline{D_{(0,1)}}$. Se ne deduce che $|g(z)| \geq 1$ per ogni $z \in D_{(0,1)}$.

In conclusione g si annulla in $D_{(0,1)}$ oppure

$$|g(z)| = 1 \text{ per ogni } z \in D_{(0,1)}\,.$$

In questo caso $g(D_{(0,1)}) \subset C$ e, siccome la circonferenza unitaria C non contiene aperti di $\mathbb{C}$, per il teorema della mappa aperta, la funzione olomorfa g è costante.

c) Se la funzione g è costante allora esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $g(z) = e^{i\theta}$, in questo caso possiamo prendere $m = 1$, $a_1 = 0$ e $n_1 = 0$.

Se la funzione g non è costante, siccome gli zeri di una funzione olomorfa non costante su un aperto connesso sono isolati e siccome $\overline{D_{(0,1)}}$ è compatto, la funzione g si annulla al più un numero finito di volte in $D_{(0,1)}$.

Siano $a_1, .., a_m$ gli zeri di g in $D_{(0,1)}$ e siano $n_1, .., n_m$ le rispettive molteplicità. Sia poi $h : U \setminus \{a_1, \overline{a}_1^{-1}, ..., a_m, \overline{a}_m^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita ponendo

$$h(z) := \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^{m} f_{a_j}(z)^{n_j}}\,,$$

per ogni $z \in U \setminus \{a_1, \overline{a}_1^{-1}, ..., a_m, \overline{a}_m^{-1}\}$.

Poiché C è un gruppo rispetto alla moltiplicazione, abbiamo $h(C) \subset C$. Inoltre, per costruzione, h ammette solo singolarità eliminabili in $D_{(0,1)}$. Pertanto h si estende ad una funzione olomorfa

$$\widetilde{h} : U \setminus \{\overline{a}_1^{-1}, \dots, \overline{a}_m^{-1}\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

e per costruzione $\widetilde{h}$ non si annulla in $\overline{D_{(0,1)}}$. Per il punto b), esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{h}(z) = e^{i\theta}$ per ogni $z \in U \setminus \{\overline{a}_1^{-1}, \dots, \overline{a}_m^{-1}\}$. Siccome $\prod\limits_{j=1}^{m} f_{a_j}(z)^{n_j}$ non si estende con continuità intorno agli $\overline{a}_j^{-1}$, gli $\overline{a}_j^{-1}$ non appartengono ad U e

$$g(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{m} f_{a_j}(z)^{n_j} \text{ per ogni } z \in U.$$

4) : A) Invertendo la formula di Eulero abbiamo

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x) \cos^n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i} \right)^n \mathrm{d}x$$

e, indicando con C^+ la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario,

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i} \right)^n \mathrm{d}x = \int_{C^+} \frac{(z^2 - z^{-2})^n}{4^n i^{n+1} z} \, \mathrm{d}z.$$

Applicando il teorema dei residui alla funzione $\dfrac{(z^2 - z^{-2})^n}{z}$ sul disco unitario, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \frac{(z^2 - z^{-2})^n}{4^n i^{n+1} z} \, \mathrm{d}z &= \frac{2\pi i}{4^n i^{n+1}} Res\left(\frac{(z^2 - z^{-2})^n}{z}, 0 \right) \\ &= \frac{2\pi}{4^n i^n} Res\left(\frac{1}{z} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m} z^{2(2m-n)}, 0 \right).\end{aligned}$$

Il residuo $Res\left(\frac{1}{z}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^{n-m}z^{2(2m-n)}\,,0\right)$ è pari al coefficiente del termine di grado 0 di $\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^{n-m}z^{2(2m-n)}$. Tale coefficiente è nullo se n è dispari e vale $\binom{n}{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}$ se n è pari.

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

se n è dispari e

$$\int_0^{2\pi} \sin^n(x)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{4^n i^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{2\pi}{4^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

se n è pari.

B) Se $n = 0$, per quanto visto in Analisi 1, l'integrale diverge a $+\infty$. Sia dunque $n > 0$.

Sia $r \in \mathbb{R}$ tale che $r > n$, sia $\gamma_{1,r}$ il segmento orientato contenuto in $\mathbb{C}$ con primo estremo $-r$ e secondo estremo r e sia $\gamma_{2,r}$ la semicirconferenza, contenuta nel semipiano chiuso superiore, di primo estremo r e secondo estremo $-r$.

Siccome $\left|\frac{1}{(x^2+n^2)^4}\right|$ è asintotico a $\left|\frac{1}{x^8}\right|$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$, l'integrale assegnato è convergente e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r}\frac{1}{(x^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{1,r}}\frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,dz\,.$$

Siccome l'unica singolaritá di $\frac{1}{(z^2+n^2)^4}$, nella parte di piano limitata e delimitata da $\gamma_{1,r}\cup\gamma_{2,r}$, è il punto in, applicando il teorema dei residui, otteniamo

$$\int_{\gamma_{1,r}} \frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,dz + \int_{\gamma_{2,r}} \frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,dz = 2\pi i\, Res\left(\frac{1}{(z^2+n^2)^4}, in\right).$$

Poiché

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{(z^2+n^2)^4} = 0\,,$$

per il lemma del grande cerchio abbiamo

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} \frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}z = 0$$

e, quindi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\, Res\left(\frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,, in\right).$$

Siccome in è un polo di ordine 4 per $\dfrac{1}{(z^2+n^2)^4}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
Res\left(\frac{1}{(z^2+n^2)^4}\,, in\right) &= \lim_{z\to in} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{(z-in)^4}{(z^2+n^2)^4}\right) \\
&= \lim_{z\to in} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{1}{(z+in)^4}\right) \\
&= \lim_{z\to in} -\frac{4\cdot5\cdot6}{3!}\,\frac{1}{(z+in)^7} \\
&= \frac{4\cdot5\cdot6}{3!}\,\frac{1}{i\,2^7n^7} = \frac{5}{i\,2^5n^7}
\end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\frac{5}{i\,2^5n^7} = \frac{5\,\pi}{16\,n^7}\,.$$