NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2008/2009
Calcolo 1, Esame scritto del 08.06.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f.

b) Trovare tutti gli asintoti di f.

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f.

d) Tracciare un grafico qualitativo per f.

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,.$$

3) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(n!\big)\big((2n)!\big)}{(3n)!}$$

e si giustifichi la risposta.

4) Trovare tutti i massimi e minimi locali della funzione f definita sul piano tramite la formula

$$f(x,y) = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2\big) \ .$$

5) Dire se è esatta la forma differenziale

$$\big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big)\,\mathrm{d}\,x + \big(x^2\cos(xy)\big)\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Nel caso di esattezza si calcoli una sua primitiva.

Soluzioni:

1) **:** a) Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, perché il denominatore $e^x - x$ prende il valore minimo $e-1>0$ in $x=1$:

Poiché

$$\big(e^x - x\big)' = e^x - 1 \begin{cases} < 0 & \text{per } x < 0 \\ > 0 & \text{per } x > 0 \end{cases},$$

la funzione $e^x - x$ decresce in $(-\infty, 0)$ e cresce in $(0, +\infty)$, avendo così minimo in $x = 0$.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

Poi, siccome

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1,$$

$y = -1$ è asintoto orizzontale (un tipo particolare di asintoto obliquo) per $x \to -\infty$.

Finalmente, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \frac{1}{1 - \dfrac{x}{e^x}} = 0 \, \frac{1}{1-0} = 0,$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{e^x - x - x\,(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x}{(e^x - x)^2}\,(1 - x)\,.$$

Poiché f' si annulla in $x = 1$, è > 0 in $(-\infty\,, 1)$ ed è < 0 in $(1\,, -\infty)$, f risulta ad essere

strettamente crescente in $(-\infty\,, 1)$,

strettamente decrescente in $(1\,, +\infty)$.

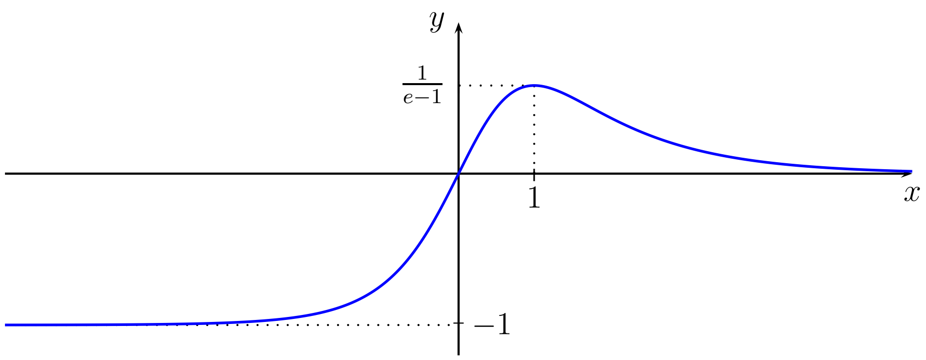
In particolare, 1 è un punto di massimo locale (in realtà addirittura un punto di massimo assoluto).

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	1	$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = -1$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da -1 fino al punto di massimo locale $\left(1\,,\,\dfrac{1}{e-1}\right)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi scende verso l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.

Il grafico di f :



Commenti sui punti di flesso di f .

Guardando il grafico di f ci accorgiamo che attorno al punto di massimo locale 1 f dev'essere concava, mentre avvicinando da sopra l'asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to -\infty$, f deve diventare convessa e, in modo simile, avvicinando da sopra l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$, f deve diventare pure convessa. Perciò tra $-\infty$ e 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da convessità a concavità, cioè un punto di flesso, e tra 1 e $+\infty$ dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un'altro punto di flesso.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di f . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x}{(e^x - x)^2}\,(1-x)\right) \\
&= \frac{e^x(e^x - x)^2 - e^x\,2\,(e^x - x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^4}\,(1-x) - \frac{e^x}{(e^x - x)^2} \\
&= \frac{e^x(e^x - x)^2 - e^x\,2\,(e^x - x)(e^x - 1)}{(e^x - x)^4}\,(1-x) - \frac{e^x}{(e^x - x)^2} \\
&= \frac{e^x}{(e^x - x)^3}\big(xe^x - 2\,e^x + x^2 - 2\,x + 2\big)\ .
\end{aligned}$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ coincide con il segno di

$$g(x) = xe^x - 2\,e^x + x^2 - 2\,x + 2 = e^x\,(x-2) + (x-1)^2 + 1\ .$$

Per studiare il segno di g , troviamo gli intervalli di monotonia di g :

La derivata di g è

$$g'(x) = e^x\,(x-2) + e^x + 2\,(x-1) = (e^x + 2)\,(x-1)$$

e risulta il tabello di comportamento

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$1-e<0$	$\nearrow$	$+\infty$

Di conseguenza g cambia segno due volte : una volta prima di 1 , da $+$ in $-$, ed un'altra volta dopo 1 , da $-$ in $+$.

Si vede subito che $g(0) = 0$. D'altro canto, poiché

$$g(1,5) = -\,e^{1,5}\,0,5 + 0,25 + 1 = 0,5\,(2,5 - e^{1,5}) < 0,5\,(2,5 - e) < 0$$

e

$$g(2) = 2 > 0\,,$$

g ha un secondo zero a tra $1,5$ e 2 ed abbiamo

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - x)^3}\, g(x) > 0 \text{ per } x < 0\,,$$
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - x)^3}\, g(x) < 0 \text{ per } 0 < x < a\,,$$
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - x)^3}\, g(x) > 0 \text{ per } x > a\,.$$

Cosicché i punti di flesso di f sono

$$0 \text{ e } 1,5 < a < 2$$

e

$$\begin{aligned} &f \text{ è convessa in } (-\infty\,,0)\,,\\ &f \text{ è concava in } (0\,,a)\,,\\ &f \text{ è convessa in } (a\,,+\infty)\,. \end{aligned}$$

2) : Possiamo usare la sostituzione $t = \sqrt{x-1}$:

$$x = 1 + t^2\,, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\,.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2t^2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\,(t^2+2)-4}{2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int \mathrm{d}t - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \\ &= 2t - 2\sqrt{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}\!\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2t - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2}} + C\,. \end{aligned}$$

3) : La serie è a termini positivi e, per evitare il difficile lavoro con radici di fattoriali, cerchiamo usare il criterio del rapporto :

Il raporto del termine $(n+1)$-esimo ed il termine n-esimo è

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)\big((2n+2)!\big)}{(3n+3)!}}{\dfrac{\big(n!\big)\big((2n)!\big)}{(3n)!}} = \frac{(n+1)\,(2n+1)\,(2n+2)}{(3n+1)\,(3n+2)\,(3n+3)}$$

ed il suo limite è quindi $\dfrac{4}{9} < 1$. Perciò possiamo applicare il criterio del rapporto e risulta che la serie è convergente.

4) **:** I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2\big) \ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2 + 2\,x - 3\,y\big) \, ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2 - 3\,x + 2\,y\big) \, .$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - 3\,xy + y^2 + 2\,x - 3\,y = 0 \\ x^2 - 3\,xy + y^2 - 3\,x + 2\,y = 0 \end{cases} .$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, otteniamo $5\,x - 5\,y = 0$, cioè $x = y$. Sostituendo ora $y = x$ nella prima equazione troviamo

$$-x^2 - x = 0 \ \text{ cioè } \ x\,(x+1) = 0 \, .$$

Così i punti stazionari di f sono $(0,0)$ e $(-1,-1)$.

Per poter dire se il punto stazionario $(0,0)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2 + 4\,x - 6\,y + 2\big) \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2 - x - y - 3\big) \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x+y}\big(x^2 - 3\,xy + y^2 - 6\,x + 4\,y + 2\big) \ .$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

e la matrice hessiana di f in $(0,0)$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Poiché il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 - (-3)^2 = -5 < 0 \,,$$

il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

Ora le derivate parziali di secondo ordine in $(-1,-1)$ sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) &= 3\,e^{-2}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,-1) &= -2\,e^{-2}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) &= 3\,e^{-2} \end{aligned}$$

e risulta la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} 3\,e^{-2} & -2\,e^{-2} \\ -2\,e^{-2} & 3\,e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Poiché il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} 3\,e^{-2} & -2\,e^{-2} \\ -2\,e^{-2} & 3\,e^{-2} \end{vmatrix} = \big(3\,e^{-2}\big)^2 - \big(-\,2\,e^{-2}\big)^2 = 5\,e^{-2} > 0 \,,$$

mentre l'elemento nell'angolo superiore è

$$3\,e^{-2} > 0 \,,$$

la hessiana è definita positiva e quindi il punto $(-1,-1)$ è un punto di minimo locale.

Rimarchiamo che il valore di f in questo punto è $5\,e^{-2} > 0$ e siccome f prende (per esempio) anche il valore $0 = f(0,0)$, $(-1,-1)$ non è un punto di minimo assoluto (che quindi non esiste).

5) **:** Ricordiamo che una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

si chiama *chiusa* se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e si chiama *esatta* se ammette una *primitiva*, cioè una funzione $F(x\,,y)$ definita sullo stesso dominio che soddisfa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,. \tag{*}$$

Se una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

e esatta e le funzioni P e Q sono continuamente differenziabili, allora la forma è necessariamente chiusa. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma una forma differenziale chiusa, definita su un dominio stellato (in particolare, se il dominio è convesso), è automaticamente esatta.

La nostra forma è esatta. Infatti,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\Big) &= x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\\ &= 2\,x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\end{aligned}$$

è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\cos(xy)\Big) = 2\,x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\,.$$

Poiché il dominio $\mathbb{R}^2$ della forma è convesso, la forma risulta esatta.

Per trovare una primitiva, dobbiamo risolvere il sistema (*) . A questa fine integriamo Q rispetto ad y ottenendo

$$F(x\,,y) = \int x^2\cos(xy)\,\mathrm{d}y = x\sin(xy) + C(x)\,,$$

ove $C(x)$ è un valore costante rispetto ad y, ossia una funzione solo di x. Ora scegliamo $C(x)$ tale che anche la prima equazione del sistema (*) sia soddisfatta : poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\sin(xy) + C(x)\Big) = \sin(xy) + xy\cos(xy) + C'(x)$$

sia uguale a

$$P(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)\ ,$$

$C'(x)$ deve annullarsi, quindi $C(x)$ dev'essere costante. Di conseguenza le primitive della nostra forma sono

$$F(x\,,y) = x\sin(xy) + C\ .$$