NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 08.06.2009

Corso di Laurea in Fisica dell'Atmosfera e Meteorologia, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 08.06.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x}{4^x + x}\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,.$$

3) Trovare tutte le radici quarte complesse del numero $\sqrt{3}+i$, cioè tutti i numeri complessi z soddisfacenti l'equazione

$$z^4 = \sqrt{3}+i\ .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{\big(e^x - e^{-x}\big)^\alpha}\,\mathrm{d}x\ .$$

5) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big((2n)!\big)^2}{\big(n!\big)\big((3n)!\big)}$$

e si giustifichi la risposta.

Soluzioni:

1) **:** a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $4^x + x \neq 0$, quindi per determinare il dominio di f dobbiamo trovare i zeri di $4^x + x$.

Poiché

$$\left(4^x + x\right)' = \underbrace{4^x}_{>0} \underbrace{(\log 4)}_{>1} + 1 > 1$$

e quindi la funzione $4^x + x$ è strettamente crescente, non può annularsi più di una volta. D'altro canto, vedendo che

$$4^0 + 0 = 1 > 0 \ \text{ e } \ 4^{-1} + (-1) = -\frac{3}{4} < 0\,,$$

ne accorgiamo che $4^x + x$ deve annularsi tra -1 e 0. Infatti, si trova che $4^x + x$ si annulla in $-\dfrac{1}{2}$: $4^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2} = \left(\sqrt{4}\right)^{-1} - \dfrac{1}{2} = 0$.

Concludendo, il dominio di f è

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

b) Poiché

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2} - 0} \frac{x}{\underbrace{4^x + x}_{>0}} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2} + 0} \frac{x}{\underbrace{4^x + x}_{<0 \text{ per } -\frac{1}{2} < x < 0}} = -\infty\,,$$

f ha un asintoto verticale in $x = -\dfrac{1}{2}$, sia da sinistra che da destra.

Si vede poi che esistono i limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\dfrac{4^x}{x} + 1} = \frac{1}{\dfrac{0}{-\infty} + 1} = 1\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{4^x} \frac{1}{1 + \dfrac{x}{4^x}} = 0 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0\,.$$

Cosicché $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{4^x + x - x\left(4^x(\log 4) + 1\right)}{\left(4^x + x\right)^2} = \frac{4^x}{\left(4^x + x\right)^2}\left(1 - x\log 4\right).$$

Poiché f' si annulla in $\dfrac{1}{\log 4}$, è > 0 in $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\log 4}\right)$ ed è < 0 in $\left(\dfrac{1}{\log 4}, +\infty\right)$, risulta che f è

$$\text{strettamente crescente in } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right),$$
$$\text{strettamente crescente in } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\log 4}\right),$$
$$\text{strettamente decrescente in } \left(\frac{1}{\log 4}, +\infty\right).$$

In particolare, $\dfrac{1}{\log 4} \approx 0,7213$ è un punto di massimo locale.
Calcoliamo anche il valore di f in questo punto :

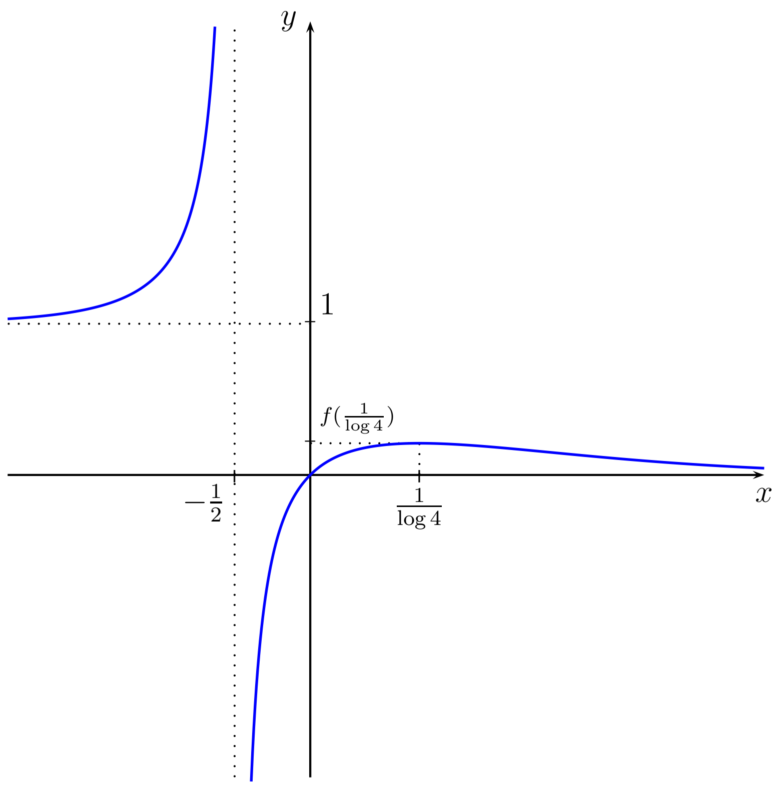
$$f\left(\frac{1}{\log 4}\right) = \frac{\frac{1}{\log 4}}{4^{\frac{1}{\log 4}} + \frac{1}{\log 4}} = \frac{\frac{1}{\log 4}}{e + \frac{1}{\log 4}} = \frac{1}{1 + e\log 4} \approx 0,2097.$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/\log 4$		$+\infty$
f'		$+$	$*$	$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty * -\infty$	$\nearrow$	$1/(1+e\log 4)$	$\searrow$	0

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = 1$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da 1 fino a $+\infty$ in $x = -\dfrac{1}{2}$, poi sale da $-\infty$ in $x = -\dfrac{1}{2}$ fino al punto di massimo locale $\left(\dfrac{1}{\log 4}\,,\dfrac{1}{1+e\log 4}\right) \approx \big(0,7213\,,0,2097\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, dopo di che scende verso l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to +\infty$.

Il grafico di f:



Commenti sui punti di flesso di f.

Guardando il grafico di f ci accorgiamo che attorno al punto di massimo locale $\dfrac{1}{\log 4}$ la funzione f dev'essere concava, mentre avvicinando da sopra l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to +\infty$, f deve diventare convessa. Perciò tra $\dfrac{1}{\log 4}$ e $+\infty$ dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un punto di flesso.

Ma contemplando il grafico di f si vede anche che alla parte sinistra dell'asintoto verticale $x = -\dfrac{1}{2}$ la funzione f è convessa, mentre alla parte destra, almeno fino al punto di massimo locale $\dfrac{1}{\log 4}$, f è concava. Così l'asintoto verticale $x = -\dfrac{1}{2}$ si comporta come un punto di flesso di f : passando dalla sua parte sinistra alla parte destra, la convessità di f si cambia in concavità.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di f e stabilire gli intervalli di convessità e di concavità. A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\big(4^x + x\big)^2}\, 4^x\big(1 - x\log 4\big)\right) \\
&= -\frac{2\Big(4^x(\log 4) + 1\Big)}{\big(4^x + x\big)^3}\, 4^x\big(1 - x\log 4\big) \\
&\quad + \frac{1}{\big(4^x + x\big)^2}\, 4^x(\log 4)\big(1 - x\log 4\big) - \frac{1}{\big(4^x + x\big)^2}\, 4^x(\log 4) \\
&= \frac{4^x}{\big(4^x + x\big)^3}\, g(x)
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
g(x) = &\; -2\Big(4^x(\log 4) + 1\Big)\big(1 - x\log 4\big) + \big(4^x + x\big)\big(-x(\log 4)^2\big) \\
&= x\,4^x(\log 4)^2 - 2\cdot 4^x(\log 4) - x^2(\log 4)^2 + 2x(\log 4) - 2 \\
&= 4^x(\log 4)\Big(x(\log 4) - 2\Big) - \Big(x(\log 4) - 1\Big)^2 - 1\,.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto della discussione della funzione $4^x + x$ svolta nel punto a), risulta per il <u>il primo fattore</u> nell'espressione di $f''(x)$

$$
\frac{4^x}{\big(4^x + x\big)^3}\begin{cases} < 0 & \text{per } x < -\frac{1}{2} \\ > 0 & \text{per } x > -\frac{1}{2} \end{cases}. \tag{*}
$$

Riguardante <u>il secondo fattore</u> $g(x)$ si vede subito che

$$g(x) < 0 \ \text{ per } \ x\,(\log 4) - 2 \le 0 \iff x \le \frac{2}{\log 4}\,.$$

Per trovare il segno di $g(x)$ per $x > \dfrac{2}{\log 4}$, calcoliamo prima la derivata

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4^x(\log 4)^2\Big(x\,(\log 4) - 2\Big) + 4^x(\log 4)^2 - 2\Big(x\,(\log 4) - 1\Big)(\log 4) \\ &= 4^x(\log 4)^2\Big(x\,(\log 4) - 1\Big) - 2\Big(x\,(\log 4) - 1\Big)(\log 4) \\ &= \Big(x\,(\log 4) - 1\Big)(\log 4)\Big(4^x(\log 4) - 2\Big)\,. \end{aligned}$$

Risulta che

$$g'(x) > 0 \ \text{ per } \ x \ge \frac{1}{\log 4}$$

e quindi la funzione $g(x)$ è strettamente crescente per $x \ge \dfrac{1}{\log 4}$. Poiché $g\left(\dfrac{2}{\log 4}\right) < 0$ e

$$g\left(\frac{3}{\log 4}\right) = 4^{\frac{3}{\log 4}}(\log 4) - 2^2 - 1 = e^3(\log 4) - 5 > 0\,,$$

esiste un $\dfrac{2}{\log 4} < a < \dfrac{3}{\log 4}$ con $g(a) = 0$ ed abbiamo

$$g(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < a \\ > 0 & \text{per } x > a \end{cases}. \tag{**}$$

Rimarchiamo che non è difficile ottenere anche stime più precise per a . Per esempio, poiché

$$g\left(\frac{5}{2\log 4}\right) = 4^{\frac{5}{2\log 4}}(\log 4)\frac{1}{2} - \frac{9}{4} - 1 = e^{\frac{5}{2}}\log 2 - \frac{13}{4} > 0\,,$$

vale in verità $\dfrac{2}{\log 4} < a < \dfrac{2,5}{\log 4}$.

Ora (*) e (**) implicano che

$$f''(x) > 0 \text{ per } x > -\frac{1}{2}\,,$$

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \text{ per } -\frac{1}{2} < x < a\,, \\ &f''(x) > 0 \text{ per } x > a\,. \end{aligned}$$

e concudiamo: f ha un solo punto di flesso

$$\frac{2}{\log 4} < a < \frac{2,5}{\log 4}$$

e

$$\begin{aligned} &f \text{ è convessa in } \Big(-\infty\,, -\frac{1}{2}\Big)\,, \\ &f \text{ è concava in } \Big(-\frac{1}{2}\,, a\Big)\,, \\ &f \text{ e convessa in } (a\,, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2) **:** **Prima soluzione.** Possiamo usare la sostituzione $t = \sqrt{x+1}$:

$$x = t^2 - 1\,, \quad \mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t\,.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\,2\,t\,\mathrm{d}t = \int \big(2\,t^2 - 2\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\,t^2}{3} - 2\,t + C = \frac{2\,(t^2-3)\,t}{3} + C \\ &= \frac{2\,(x-2)\,\sqrt{x+1}}{3} + C\,. \end{aligned}$$

Seconda soluzione. Osservando che $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \big(2\sqrt{x+1}\big)'$, possiamo usare integrazione per parti e otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= x\,2\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,x\sqrt{x+1} - 2\,\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + C \\ &= 2\,x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}\,(x+1)\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2\,x-4}{3}\,\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2\,(x-2)\,\sqrt{x+1}}{3} + C\,. \end{aligned}$$

3) **:** Per trovare tutte le radici quarte di $\sqrt{3}+i$ nel campo compesso ci serve la sua forma trigonometrica :

$$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\text{ e }\; \sin\varphi = \frac{1}{2}\,,\; \text{perciò possiamo porre } \varphi = \frac{\pi}{6}$$

ed otteniamo

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Ora, se $z = r\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^4 = \sqrt{3}+i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^4\big(\cos(4\,\psi) + i\sin(4\,\psi)\big) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

cioè $r^4 = 2$ e

$$4\,\psi = \varphi + 2\,k\,\pi = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi\,,\; \text{ossia}$$

$$\psi = \frac{\varphi}{4} + \frac{2\,k\,\pi}{4} = \frac{\pi}{24} + \frac{k\,\pi}{2}$$

con k un intero.

Perciò le radici quarte di $\sqrt{3}+i$ nel campo complesso sono

$$z_k = \sqrt[4]{2}\,\big(\cos\psi_k + i\sin\psi_k\big)$$

ove

$$\psi_k = \frac{\pi}{24} + \frac{(k-1)\,\pi}{2}\,, \qquad k = 1, 2, 3, 4\,,$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche col periodo $2\,\pi$, per $k = 5$ riotteniamo z_1, poi per $k = 6$ riotteniamo z_2, e cosi via. In altre parole, le radici quarte di $\sqrt{3}+i$ nel campo complesso sono

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right),$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\,\pi}{24} + i\sin\frac{13\,\pi}{24}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\pi\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24}+i\sin\frac{25\pi}{24}\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
z_4 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)\\
&= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24}+i\sin\frac{37\pi}{24}\right).
\end{aligned}
$$

Rimarco. Possiamo andare anche oltre e calcolare esplicitamente $z_1\,,z_2\,,z_3\,,z_4\,.$

Anzitutto, usando le formule di addizione per coseno e seno

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\,,\\
\sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\,\sin(\theta_2)
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\cos\psi_{k+1} &= \cos\left(\psi_k+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\psi_k\,\cos\frac{\pi}{2}-\sin\psi_k\,\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\psi_k\,,\\
\sin\psi_{k+1} &= \sin\left(\psi_k+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\psi_k\,\cos\frac{\pi}{2}+\cos\psi_k\,\sin\frac{\pi}{2}=\cos\psi_k
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
z_{k+1} &= \sqrt[4]{2}\big(\cos\psi_{k+1}+i\sin\psi_{k+1}\big)=\sqrt[4]{2}\big(-\sin\psi_k+i\cos\psi_k\big)\\
&= i\,\sqrt[4]{2}\big(\cos\psi_k+i\sin\psi_k\big)=i\,z_k\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, se calcoliamo $\cos\dfrac{\pi}{24}$ e $\sin\dfrac{\pi}{24}$ allora avremo le formule esplicite

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right),\\
z_2 &= i\,z_1\,,\\
z_3 &= i^2 z_1=-z_1\,,\\
z_4 &= i^3 z_1=-i\,z_1\,.
\end{aligned}
$$

Per calcolare $\cos\dfrac{\pi}{24}$ e $\sin\dfrac{\pi}{24}$, useremo le formule trigonometriche

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\,, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}\ :$$

con $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\pi}{12} &= \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}\,, \\
\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

e poi, con $\theta = \dfrac{\pi}{12}$,

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\pi}{24} &= \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}\,, \\
\sin^2\frac{\pi}{24} &= \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{24} &= \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}}{2\sqrt[4]{2}}\,, \\
\sin\frac{\pi}{24} &= \frac{1+\cos\dfrac{\pi}{12}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}}{2\sqrt[4]{2}}\,,
\end{aligned}$$

Concludiamo che le radici quarte di $\sqrt{3}+i$ nel campo complesso hanno la forma esplicita

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}+i\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}\,\right), \\
z_2 &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-i\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}\,\right), \\
z_3 &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}+i\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}\,\right), \\
z_4 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-i\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}\,\right).
\end{aligned}
$$

4) : Poiché

$$\frac{e^{x/2}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^\alpha} = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x}}{\left(e^{2x}-1\right)^\alpha} = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x}}{2^\alpha}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^\alpha \frac{1}{x^\alpha}$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x}}{2^\alpha}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha}\in(0,+\infty)\,,$$

vediamo che la funzione positiva

$$\big(0\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto \frac{e^{x/2}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^\alpha} \tag{***}$$

è asintoticamente equivalente a $\dfrac{1}{x^\alpha}$ in 0. Perciò l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{e^{x/2}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

converge per i stessi valori di α che l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè per $\alpha<1$.

D'altro canto,

$$\frac{e^{x/2}}{\left(e^x - e^{-x}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(1 - e^{-2x}\right)^\alpha} \, e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1 - e^{-2x}\right)^\alpha} = 1 \in (0, +\infty) \, ,$$

quindi la funzione (***) è asintoticamente equivalente a $e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x}$ in $+\infty$. Perciò l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{\left(e^x - e^{-x}\right)^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

converge per i stessi valori di α che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x} \, \mathrm{d}x \; ,$$

cioè per $\dfrac{1}{2} - \alpha < 0 \iff \alpha > \dfrac{1}{2}$.
Concludiamo che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{\left(e^x - e^{-x}\right)^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

converge se e soltanto se $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

5) : La serie è a termini positivi e, per evitare il difficile lavoro con radici di fattoriali, cerchiamo usare il criterio del rapporto :

Il raporto del termine $(n+1)$-esimo ed il termine n-esimo è

$$\frac{\dfrac{\big((2n+2)!\big)^2}{\big((n+1)!\big)\big((3n+3)!\big)}}{\dfrac{\big((2n)!\big)^2}{\big(n!\big)\big((3n)!\big)}} = \frac{(2n+1)^2 \, (2n+2)^2}{(n+1)\,(3n+1)\,(3n+2)\,(3n+3)}$$

ed il suo limite è quindi $\dfrac{16}{27} < 1$. Perciò possiamo applicare il criterio del rapporto e risulta che la serie è convergente.