NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2011/2012
Calcolo 1, Esame scritto del 08.06.2012

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^{x \ln x}} \left(= \frac{1}{x^x} \right),$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{k}} .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = (\cos\sqrt{x}\,)^2\,, \qquad x \in \bigl(0\,,+\infty\bigr)\,.$$

4) Trovare i massimi e minimi locali della funzione

$$f(x\,,y) = 4\,x^2 + y^2 - 12\,xy + y^4\,.$$

5) Determinare i valori del parametro reale t per cui la forma differenziale

$$\begin{aligned}\omega = &\left(\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x \\ &+ \left(t\cdot\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(i) è chiusa;
(ii) è esatta.

Si trovi poi una primitiva di ω per tutti i valori t per quali ω è esatta.

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\ln x$ ha senso, cioè per $x > 0$. Perciò il dominio di f è $\big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per vedere se f ha asintoto verticale, calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{e^{x\ln x}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{0<x\to 0}(x\ln x)}} \ .$$

Poiché

$$\lim_{0<x\to 0}(x\ln x) \overset{x=1/t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0 \ ,$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \frac{1}{e^0} = 1 \ .$$

Risulta che f si estende per continuità su $\big[0\,,+\infty\big)$ e di conseguenza non ha asintoto verticale. L'estensione di f ad una funzione continua su $\big[0\,,+\infty\big)$ sarà indicata con la stessa lettera f, avendo così $f(0) = 1$.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,e^{x\ln x}} = 0 \ .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m\,x + n = n$$

(cioè un asintoto orizzontale), è l'esistenza del limite finito

$$n = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m\,x\big) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x\ln x}} = 0 \ .$$

Cosicché $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = -\frac{1}{\big(e^{x\ln x}\big)^2}\, e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = -\frac{1+\ln x}{e^{x\ln x}} \ .$$

Risulta che f' si annulla solo in $x = \dfrac{1}{e} \approx 0,36787944...$ ed è

$$> 0 \text{ in } \left(0\,, \frac{1}{e}\right) ,$$
$$< 0 \text{ in } \left(\frac{1}{e}\,, +\infty\right) .$$

Perciò f risulta ad essere

$$\text{strettamente crescente in } \left(0\,, \frac{1}{e}\right) ,$$
$$\text{strettamente decrescente in } \left(\frac{1}{e}\,, +\infty\right) .$$

In particolare, $x = \dfrac{1}{e}$ è un punto di massimo. Il valore massimo di f è

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{1/e} \approx 1,44466786... .$$

Rimarchiamo che (l'estensione per continuità di) f ha la derivata destra in 0

$$\begin{aligned} f_d^{'}(0) &= \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} \\ &= \text{(per De L'Hospital)} \lim_{0<x\to 0} f'(x) = -\lim_{0<x\to 0} \frac{1+\ln x}{e^{x\ln x}} \\ &= -\lim_{0<x\to 0} \Big(f(x)\cdot(1+\ln x)\Big) = -\big(-\infty\big) \\ &= +\infty , \end{aligned}$$

perciò il grafico di f ha in 0 la semiretta tangente verticale

$$\big\{(0\,,y)\,;\, y \geq 1\big\} .$$

d) Per seguire meglio l'andamento del grafico di f (pur non essendo stato richiesto), troviamo anche gli intervalli di convessità e di concavità di f.

Per studiare il segno della seconda derivata

$$f''(x) = \frac{1}{\left(e^{x\ln x}\right)^2}\, e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)(1+\ln x) - \frac{\frac{1}{x}}{e^{x\ln x}}$$

$$= \frac{1}{e^{x\ln x}}\left((1+\ln x)^2 - \frac{1}{x}\right)$$

studiamo il segno della funzione $g(x) := (1+\ln x)^2 - \dfrac{1}{x}$ nell'intervallo $\big(0\,,+\infty\big)$:

Anzitutto osserviamo che $g(x) = g_1(x)\,g_2(x)$ dove

$$g_1(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad g_2(x) = 1 + \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Ora

$$g_1'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x\sqrt{x}} > 0\,, \qquad x > 0\,,$$

quindi g_1 è strettamente crescente. Poiché $g_1(1) = 0$, risulta che

$$g_1(x) < 0 \text{ per } x \in (0\,,1)\,, \qquad g_1(x) > 0 \text{ per } x \in (1\,,+\infty)\,.$$

D'altro canto

$$g_2'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x\sqrt{x}}\big(2\sqrt{x} - 1\big)$$

è < 0 per $x \in \left(0\,,\dfrac{1}{4}\right)$ ed è > 0 per $x \in \left(\dfrac{1}{4}\,,+\infty\right)$, perciò g_2 ha un minimo in $x = \dfrac{1}{4}$. Di conseguenza

$$g_2(x) \geq g_2\!\left(\frac{1}{4}\right) = 3 - \ln 4 > 0\,, \qquad x \in \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

Concludiamo che

$$g(x) < 0 \text{ per } x \in (0\,,1)\,, \qquad g(x) > 0 \text{ per } x \in (1\,,+\infty)\,.$$

Cosicché f'' si annula solo in 1 e

$$f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(0\,,1\big)\,,$$
$$f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(1\,,+\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f

è concava in $\big[0\,,1\big]$,

è convessa in $\big[1\,,+\infty\big)$

ed 1 è un punto di flesso. Rimarchiamo che

$$f(1) = 1\,, \qquad f'(1) = -1\,.$$

Riportiamo il comportamento di f', f'' e di f nella seguente tabella :

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	-1	$-$	
f''			$-$		0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

Il grafico sale dal punto $(0\,,1)$, nel quale ha tangente verticale, fino al

$$\text{punto di massimo } \Big(1/e\,,e^{1/e}\Big) \approx \big(0{,}368\ ,\ 1{,}445\big)\,,$$

nel quale ha tangente orizzontale. Successivamente il grafico comincia di scendere ed attraversa il

$$\text{punto di flesso } \big(1\,,1\big)$$

nel quale ha retta tangente con coefficiente angolare -1 ed in quale cambia la concavità di prima in convessità. Prima del punto di flesso $\big(1\,,1\big)$ il grafico di f si trova sotto la retta tangente $y = 2-x$ in $x = 1$, mentre dopo il punto di flesso il grafico sale sopra la retta tangente :

> Infatti, f' è strettamente decrescente in $\big(0\,,1\big)$ ed è strettamente crescente in $\big(1\,,+\infty\big)$, avendo così in $x = 1$ un punto di minimo stretto. Perciò
>
> $$f'(x) > f'(1) = -1\,, \qquad 1 \neq x > 0\,.$$
>
> Risulta che la funzione $f(x) - (2-x)$ è strettamente crescente in $\big(0\,,+\infty\big)$ e quindi abbiamo
>
> $$f(x) - (2-x) < f(1) - (2-1) = 0 \iff f(x) < 2-x$$
>
> per $x \in \big(0\,,1\big)$ e
>
> $$f(x) - (2-x) > f(1) - (2-1) = 0 \iff f(x) > 2-x$$
>
> per $x \in \big(1\,,+\infty\big)$.

Finalmente, in $\big[1\,,+\infty\big)$ il grafico di f scende, avvicinando sempre di più l'asintoto orizzontale $y = 0$.

2) **:** Si tratta di una serie a termini positivi, perciò la prima idea è di cercare di usare il criterio del rapporto o il criterio della radice. Ma avendo

$$\lim_{k\to+\infty}\left(e^{-\sqrt[3]{k}}\right)^{1/k}=\lim_{k\to+\infty}e^{-\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}}=e^0=1\ ,$$

il criterio della radice (e quindi anche il criterio del rapporto) non ci porta ad una conclusione.

Soluzione usando il criterio del confronto.

Poiché abbiamo

$$e^{\sqrt[3]{k}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{k}\,\right)^j}{j!}\geq\frac{\left(\sqrt[3]{k}\,\right)^6}{6!}=\frac{k^2}{6!}$$

e quindi

$$e^{-\sqrt[3]{k}}\leq\frac{6!}{k^2}\ ,$$

per il criterio del confronto la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{6!}{k^2}=6!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

implica la convergenza di

$$\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\sqrt[3]{k}}\ .$$

Soluzione usando il criterio integrale di convergenza.

Siccome la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\sqrt[3]{k}}$$

è a termini positivi decrescenti, per il criterio integrale di convergenza essa converge se e soltanto se converge l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

che calcoliamo in seguito:

Calcoliamo prima la primitiva

$$\begin{aligned}
\int e^{-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \overset{x=t^3}{=} 3\int t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = -3\int t^2\,\mathrm{d}e^{-t} & \\
&= -3t^2e^{-t} + 6\int t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = -3t^2e^{-t} - 6\int t\,\mathrm{d}e^{-t} \\
&= -3t^2e^{-t} - 6\,te^{-t} + 6\int e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -3t^2e^{-t} - 6\,te^{-t} - 6\,e^{-t} + C \\
&= -3\Big(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2\Big)e^{-\sqrt[3]{x}} + C\,.
\end{aligned}$$

Risulta:

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \left(-3\Big(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2\Big)e^{-\sqrt[3]{x}}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{15}{e}\,.$$

Poiché $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x < +\infty$, concludiamo che la serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{k}}$ converge.

3) : Usando la sostituzione

$$x = t^2\,, \quad \mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t$$

il calcolo della primitiva di f si riduce al calcolo di una primitiva che possiamo svolgere usando integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int (\cos\sqrt{x}\,)^2\mathrm{d}x = \int 2\,t\,(\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int t\,\big(1+\cos(2\,t)\big)\,\mathrm{d}t & \\
&= \int t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}\sin(2\,t) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t\,\sin(2\,t)}{2} - \frac{1}{2}\int \sin(2\,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{t\,\sin(2\,t)}{2} + \frac{\cos(2\,t)}{4} + C \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}\,\sin\big(2\sqrt{x}\,\big)}{2} + \frac{\cos\big(2\sqrt{x}\,\big)}{4} + C\,.
\end{aligned}$$

4) : a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x\,,y) = 4x^2 + y^2 - 12\,xy + y^4 \ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &= 8\,x - 12\,y = 4\,(2\,x - 3\,y) \ ,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) &= 2\,y - 12\,x + 4\,y^3 = 2\,(y - 6\,x + 2\,y^3) \ .\end{aligned}$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = 0 \\ y - 6\,x + 2\,y^3 = 0 \end{cases} . \qquad (*)$$

Dalla prima equazione risulta $2\,x = 3\,y$ e sostituendo $2\,x$ nella seconda equazione si ottiene successivamente

$$\begin{gathered} y - 3\,(3\,y) + 2\,y^3 = 0\,, \\ -8\,y + 2\,y^3 = 0\,, \\ 2\,y\,(y^2 - 4) = 0\,. \end{gathered}$$

Perciò le soluzioni del sistema (*) sono

$$\begin{aligned} y_1 &= 0\,, & x_1 &= \frac{3\,y_1}{2} = 0\,, \\ y_2 &= 2\,, & x_2 &= \frac{3\,y_2}{2} = 3\,, \\ y_3 &= -2\,, & x_3 &= \frac{3\,y_3}{2} = -3\,. \end{aligned}$$

Per determinare la natura dei punti stazionari

$$\big(0\,,0\big)\,, \quad \big(3\,,2\big)\,, \quad \big(-3\,,-2\big)\,,$$

calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) &= 8\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x\,,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,,y) = -12\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) &= 2 + 12\,y^2\,. \end{aligned}$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 2+12\,y^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\det H_f(x\,,y) = 96\,y^2 - 128 = 32\,(3\,y^2-4)\ .$$

Ora

$$\det H_f(0\,,0) = -128 < 0$$

implica che $\big(0\,,0\big)$ è un punto sella. D'altro canto, poiché

$$\det H_f\big(\pm\,3\,,\pm 2\big) = 256 > 0$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore della matrice $H_f\big(\pm\,3\,,\pm 2\big)$ è $8 > 0$, i punti stazionari $\big(3\,,2\big)$ e $\big(-\,3\,,-\,2\big)$ sono punti di minimo locale.

Generalizzazione.

Discutiamo i punti stazionari della funzione

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= (2\,x-3\,y)^2 + (t\,x-y^2+4-3\,t)^2 - (4-3\,t)^2 \\ &= y^4 - 2\,t\,xy^2 + (4+t^2)\,x^2 - 12\,xy + (1+6\,t)\,y^2 + 2\,t\,(4-3\,t)\,x \end{aligned}$$

dove t è un parametro reale. Per $t=0$ si ottiene

$$f(x\,,y) = y^4 + 4\,x^2 - 12\,xy + y^2\ ,$$

cioè la funzione del compito precedente.

Le derivate parziali di f sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y) &= 4\,(2\,x-3\,y) + 2\,t\,(t\,x-y^2+4-3\,t) \\ &= 2\,(4+t^2)\,x - 12\,y - 2\,t\,y^2 + 2\,t\,(4-3\,t)\ , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y) &= -\,6\,(2\,x-3\,y) - 4\,y\,(t\,x-y^2+4-3\,t) \\ &= -\,12\,x + 2\,(1+6\,t)\,y - 4\,txy + 4\,y^3 \\ &= -\,4\,(3+t\,y)\,x + 2\,(1+6\,t)\,y + 4\,y^3\ . \end{aligned}$$

quindi i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2(4+t^2)x - 12y - 2ty^2 + 2t(4-3t) = 0 \\ -4(3+ty)x + 2(1+6t)y + 4y^3 = 0 \end{cases} . \tag{**}$$

Sommando il prodotto della prima equazione con $2(3+ty)$ al prodotto della seconda equazione con $4+t^2$ si elimina lo sconosciuto x:

$$\begin{aligned} &- 24y(3+ty) - 4ty^2(3+ty) + 4t(4-3t)(3+ty) \\ &\qquad\qquad + 2(4+t^2)(1+6t)y + 4(4+t^2)y^3 = 0 \,, \\ &16y^3 - 36ty^2 + \big(18t^2 + 48t - 64\big)y + 12t(4-3t) = 0 \,, \\ &8y^3 - 18ty^2 + \big(9t^2 + 24t - 32\big)y + 6t(4-3t) = 0 \,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $y = 2$ è una radice dell'equazione di cui sopra, perciò il polinomio alla parte sinistra si divide con $y - 2$:

$$\begin{aligned} &8y^3 - 18ty^2 + \big(9t^2 + 24t - 32\big)y + 6t(4-3t) \\ &= \big(y-2\big)\Big(8y^2 + (16-18t)y + 9t^2 - 12t\Big) \,. \end{aligned}$$

Risulta che i radici dell'equazione

$$8y^3 - 18ty^2 + \big(9t^2 + 24t - 32\big)y + 6t(4-3t) = 0$$

sono $y_1 = 2$ e

$$\begin{aligned} y_{2,3} &= \frac{1}{8}\Big(-8 + 9t \pm \sqrt{(8-9t)^2 - 8(9t^2 - 12t)}\Big) \\ &= \frac{1}{8}\Big(-8 + 9t \pm \sqrt{64 - 48t + 9t^2}\Big) \\ &= \frac{1}{8}\Big(-8 + 9t \pm \big(8 - 3t\big)\Big) \,, \end{aligned}$$

cioè

$$y_1 = 2 \,, \quad y_2 = \frac{3t}{4} \,, \quad y_3 = \frac{3t-4}{2} \,.$$

Ora, poiché secondo la prima equazione del sistema (**) abbiamo

$$x = \frac{6y + ty^2 - t(4-3t)}{4+t^2} \,, \tag{***}$$

si ottengono i punti stazionari di f :

$$\begin{aligned}
\big(x_1\,,y_1\big) &= \big(3\,,2\big)\,,\\
\big(x_2\,,y_2\big) &= \left(\frac{t\,(8+48\,t+9\,t^2)}{16\,(4+t^2)}\,,\frac{3\,t}{4}\right),\\
\big(x_3\,,y_3\big) &= \left(\frac{3\,(3\,t-4)}{4}\,,\frac{3\,t-4}{2}\right).
\end{aligned}$$

Per determinare la natura di questi punti stazionari, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y) &= 2\,(4+t^2)\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x\,,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\,,y) = -4\,(3+ty)\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y) &= -\,4\,tx+2\,(1+6\,t)+12\,y^2\,.
\end{aligned}$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 2\,(4+t^2) & -4\,(3+ty) \\ -4\,(3+ty) & -4\,tx+2\,(1+6\,t)+12\,y^2 \end{pmatrix}$$

e nei punti stazionari di f, cioè nei punti $(x\,,y)$ soddisfacenti il sistema di equazioni (**), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\det H_f(x\,,y)\\
&= 4\Big(-\,2\,(4+t^2)\,tx-32+24\,t+t^2+6\,t^3-24\,ty+2\,\big(12+t^2\big)y^2\Big)\\
&\overset{(***)}{=} 4\Big(-\,2\,t\,\big(6\,y+ty^2-t(4-3t)\big)\\
&\qquad\qquad -32+24\,t+t^2+6\,t^3-24\,ty+2\,\big(12+t^2\big)y^2\Big)\\
&= 4\Big(-\,32+24\,t+9\,t^2-36\,ty+24\,y^2\Big)\,.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\det H_f(x_1\,,y_1) = \det H_f(3\,,2) = 4\Big(64-48\,t+9\,t^2\Big) = 4\,\big(8-3\,t\big)^2$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore della matrice $H_f(x_1\,,y_1)$ è $2\,(4+t^2)>0$, $(x_1\,,y_1)$ è un punto di minimo locale per ogni $t \neq \dfrac{8}{3}$.

Rimarchiamo che $(x_1\,,y_1) = (3\,,2)$ è sempre, anche per $t = \dfrac{8}{3}$, un punto di minimo globale di f:

Infatti, abbiamo per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= (2x-3y)^2 + (tx-y^2+4-3t)^2 - (4-3t)^2 \\ &\geq -(4-3t)^2 = f(3\,,2) \\ &= f(x_1\,,y_1)\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} \det H_f(x_2\,,y_2) &= 4\left(-32+24t+9t^2-27t^2+\frac{27t^2}{2}\right) \\ &= 4\left(-32+24t-\frac{9t^2}{2}\right) = 2\left(-64+48t-9t^2\right) \\ &= -2\left(8-3t\right)^2, \end{aligned}$$

$(x_2\,,y_2)$ è un punto di sella per ogni $t \neq \dfrac{8}{3}$.

Finalmente, poiché

$$\begin{aligned} \det H_f(x_3\,,y_3) &= 4\left(-32+24t+9t^2-18t(3t-4)+6(3t-4)^2\right) \\ &= 4\left(-32+24t+9t^2+6(-4)(3t-4)\right) \\ &= 4\left(64-48t+9t^2\right) \\ &= 4\left(8-3t\right)^2 \end{aligned}$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore della matrice $H_f(x_3\,,y_3)$ è $2(4+t^2)>0$, $(x_3\,,y_3)$ è un punto di minimo locale per ogni $t \neq \dfrac{8}{3}$.

rimarchiamo che anche $(x_3\,,y_3)$ è sempre un punto di minimo globale di f:

Infatti, abbiamo per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= (2x-3y)^2 + (tx-y^2+4-3t)^2 - (4-3t)^2 \\ &\geq -(4-3t)^2 = f\left(\frac{3(3t-4)}{4}\,,\frac{3t-4}{2}\right) \\ &= f(x_3\,,y_3)\,. \end{aligned}$$

$\rightarrow$ **Conclusione.** Per ogni $t \neq \dfrac{8}{3}$ la funzione

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= (2\,x - 3\,y)^2 + (t\,x - y^2 + 4 - 3\,t)^2 - (4 - 3\,t)^2 \\ &= y^4 - 2\,t\,xy^2 + (4 + t^2)\,x^2 - 12\,xy + (1 + 6\,t)\,y^2 + 2\,t\,(4 - 3\,t)\,x \end{aligned}$$

ha tre punti stazionari diversi :

$$\begin{aligned} \big(x_1\,,y_1\big) &= \big(3\,,2\big)\,, \\ \big(x_2\,,y_2\big) &= \left(\frac{t\,(8 + 48\,t + 9\,t^2)}{16\,(4 + t^2)}\,,\frac{3\,t}{4}\right), \\ \big(x_3\,,y_3\big) &= \left(\frac{3\,(3\,t - 4)}{4}\,,\frac{3\,t - 4}{2}\right). \end{aligned}$$

Qui $\big(x_1\,,y_1\big)$ e $\big(x_3\,,y_3\big)$ sono punti di minimo globale, mentre $\big(x_2\,,y_2\big)$ è un punto di sella.

Per $t = \dfrac{8}{3}$ la funzione di cui sopra ha il solo punto stazionario

$$\big(x_1\,,y_1\big) = \big(x_2\,,y_2\big) = \big(x_3\,,y_3\big) = \big(3\,,2\big)$$

che è un punto di minimo globale.

5) **:** Indichiamo :

$$\begin{aligned} P(x\,,y) &:= \ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{2\,x^2}{1 + x^2 + y^2}\,, \\ Q(x\,,y) &:= t \cdot \ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{2\,x\,y}{1 + x^2 + y^2}\,. \end{aligned}$$

Poiché la forma differenziale

$$\omega = P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

sia chiusa dobbiamo avere identicamente

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Ora i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{2\,y}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4\,x^2 y}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{2\,t\,x}{1 + x^2 + y^2} + \frac{2\,y}{1 + x^2 + y^2} - \frac{4\,x^2 y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

implicano che ω è chiusa se e soltanto se $t = 0$. Poiché il dominio $\mathbb{R}^2$ di ω è stellato, per $t = 0$ la forma ω è anche esatta.

Troviamo nel caso $t = 0$ una primitiva per ω, cioè una una funzione F su $\mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) &= \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\ , \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) &= \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\ . \end{aligned}$$

La seconda equazione implica

$$F(x\,,y) = \int \frac{2\,x\,y}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = x\ln(1+x^2+y^2) + c(x)$$

e perché anche la prima equazione sia soddisfatta,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) = \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2} + c'(x)$$

dev'essere uguale a

$$\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2\,x^2}{1+x^2+y^2}\ .$$

In altre parole dobbiamo avere $c'(x) \equiv 0 \iff c(x)$ è una costante.

Concludiamo che le primitive di ω per $t = 0$ sono

$$F(x\,,y) = x\ln(1+x^2+y^2) + C\ .$$