NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2013/2014
Calcolo 2, Esame scritto del 08.07.2014

1) a) Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2\,x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) = 5\,x(t) - 2\,y(t) + 2 \end{array} \right. . \qquad (*)$$

b) Si trovi la soluzione del sistema (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1\,, \\ y(0) = 1\,. \end{array} \right.$$

2) Si calcoli il volume del tratto del cilindro solido $x^2 + y^2 \leq 2x$ situato tra il piano $z = 0$ ed il paraboloide $3z = x^2 + y^2$, cioè del solido

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 \leq 2x\,,\, 0 \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{3} \right\} .$$

3) Calcolare l'area della porzione del cilindro

$$x^2 + y^2 = x$$

contenuta nella palla

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, .$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che nell'intervallo $(-\pi \, , \pi]$ è data tramite la formula

$$f(x) = \cos \frac{x}{2} \, , \qquad x \in (-\pi \, , \pi] \, .$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier reali $a_k(f) \, , k \geq 0$, e $b_k(f) \, , k \geq 1$, di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \Big) \, .$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\frac{a_o(f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\big| a_k(f) \big|^2 + \big| b_k(f) \big|^2 \Big) \, .$$

Soluzioni:

1) **:** a) Il sistema di equazioni differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti.

Risloviamo prima il sistema omogeneo associato

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ed ha due zeri semplici :

$$\lambda_1 = i\,, \qquad \lambda_2 = -i\,.$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_1 sono le soluzioni non zeri dell'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 \\ 5 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè di

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y_1 = (2-i)\,x_1\,,$$

quindi i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Similmente si trova che gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_2 sono i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Risultano le seguenti due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} &= e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ &= \big(\cos t + i\sin t\big)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \\
&= \big(\cos t - i \sin t\big)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Altre due soluzioni linearmente indipendenti, che saranno inoltre reali, si ottengono considerando la parte reale e la parte immaginaria delle soluzioni precedenti :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} , \\
\frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Cosicché la soluzione generale del sistema omogeneo è

$$c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

dove $c_1 \, , c_2$ sono costanti arbitrari.

Possiamo trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo usando il metodo della variazione delle costanti :

Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

che deve quindi soddisfare l'equazione matriciale

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}\right) \\
= &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\left(c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

cioè

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Si trovano $c_1{}'(t) = \cos t\,, c_2{}'(t) = \sin t$ quindi una soluzione particolare si ottiene con $c_1(t) = \sin t\,, c_2(t) = -\cos t$:

$$
\begin{aligned}
(\sin t)\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} - (\cos t)\begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2 t + \cos^2 t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Avendo ora la soluzione generale del sistema omogeneo ed aver trovato anche una soluzione particolare del sistema non omogeneo, possiamo concludere che

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ 1 + c_1\big(2\cos t + \sin t\big) + c_2\big(2\sin t - \cos t\big) \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

dove $c_1\,, c_2$ sono costanti arbitrari, è la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$
\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) = 5\,x(t) - 2\,y(t) + 2 \end{cases} . \tag{*}
$$

b) Perché una soluzione

$$
\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y(t) = 1 + c_1\big(2\cos t + \sin t\big) + c_2\big(2\sin t - \cos t\big) \end{cases}
$$

del sistema (*) verifichi la condizione iniziale

$$
\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}
$$

dobbiamo avere

$$
\left.\begin{aligned} c_1 = x(0) = 1 \\ 1 + 2c_1 - c_2 = y(0) = 1 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} .
$$

Di conseguenza

$$
\begin{cases} x(t) = \cos t + 2\sin t \\ y(t) = 1 + 2\cos t + \sin t + 2\big(2\sin t - \cos t\big) = 1 + 5\sin t \end{cases}
$$

è la soluzione del sistema (*) soddisfacente la condizione iniziale

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

2) **:** Il solido

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, ; x^2 + y^2 \leq 2x \, , 0 \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{3} \right\} .$$

è normale rispetto all'asse delle z , essendo la regione tra i grafici della funzione identicamente nulla e la funzione $\dfrac{x^2 + y^2}{3}$, definite sul disco

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, ; x^2 + y^2 \leq 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, ; (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

con centro in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e di raggio 1 . Cosicché, per il teorema di riduzione, otteniamo

$$\mathrm{Volume}\,(E) = \int\limits_S \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int\limits_{(x\,,y)\in D\,,\,0\leq z\leq (x^2+y^2)/3} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_D \Bigg(\int\limits_0^{(x^2+y^2)/3} \mathrm{d}z \Bigg) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_D \frac{x^2 + y^2}{3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Ci conviene passare ora alle coordinate polari:

$$x = 1 + \rho \cos\theta \, , y = \rho \sin\theta \, , \qquad \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho \, .$$

Poiché

$$D = \big\{ (1 + \rho\cos\theta \, , \rho \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , 0 \leq \rho \leq 1 \big\} \, ,$$

abbiamo

$$\mathrm{Volume}\,(E) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1 + \rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2}{3} \rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho + \rho^3}{3} + \frac{2\rho^2 \cos\theta}{3} \right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho + \rho^3}{3} + \frac{2\rho^2 \cos\theta}{3} \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{\rho + \rho^3}{3} \, \mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1}$$

$$= \frac{\pi}{2} \, .$$

3) : Il cilindro descritto dell'equazione

$$x^2 + y^2 = x \iff \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

è l'insieme di tutti i punti in $\mathbb{R}^3$ della forma

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \\ z \end{pmatrix} , \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \, , \; z \in \mathbb{R} \, ,$$

quindi la sua intersezione S con la palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ può essere parametrizzata tramite l'applicazione

$$\varphi(t \, , z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

avendo come dominio

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \; ; \; 0 \leq t \leq 2\pi \, , \; |z| \leq \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 t} \right\} .$$

Poiché

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t = \sin^2 \frac{t}{2} \, ,$$

abbiamo

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} ; \, 0 \leq t \leq 2\pi \, , \, |z| \leq \sin \frac{t}{2} \right\} .$$

Calcoliamo l'elemento d'area di S: poiché

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{2} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -(\sin t)/2 & (\cos t)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos t)/2 \\ (\sin t)/2 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

l'elemento d'area è

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\| \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z \, .$$

Segue per l'area di S la formula

$$\mathrm{Area}\,(S) = \int_S \mathrm{d}\sigma = \int_P \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z$$

ed usando il teorema di riduzione si ottiene

$$\mathrm{Area}\,(S) = \int_o^{2\pi} \Bigg(\int_{-\sin(t/2)}^{\sin(t/2)} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}z \Bigg) \mathrm{d}t = \int_o^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = -2 \cos \frac{t}{2} \Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}$$
$$= 4 \, .$$

4) : a) Poiché f è una funzione pari, sappiamo fin dall'inizio che $b_k(f) = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Chiaramente,

$$a_o(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{4}{\pi} \, .$$

I restanti coefficienti di Fourier reali di f, cioè $a_k(f)$ per $k \geq 1$, sono

$$
\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(\frac{x}{2}+kx\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-kx\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{(2k+1)x}{2}+\cos\frac{(2k-1)x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)x}{2}+\frac{2}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}+\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} \\
&= -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{4k^2-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Ma $\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \sin\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, quindi

$$
a_k(f) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\,, \qquad k \geq 1\,.
$$

Risulta che la serie di Fourier di f è

$$
\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos(kx)\,.
$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti e continua, la sua serie di Fourier converge uniformamente a f:

$$
\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos(kx) = \cos\frac{x}{2}\,, \qquad x \in [-\pi\,,\pi]\,.
$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier complessi :

$$
c_o(f) = \frac{a_o(f)}{2} = \frac{2}{\pi}\,,
$$

$$c_k(f) = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}\,, \qquad k \geq 1\,,$$

$$c_k(f) = \frac{a_{-k}(f) + ib_{-k}(f)}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}\,, \qquad k \leq -1\,.$$

Con i coefficienti di Fourier complessi risulta la convergenza uniforme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} e^{ikx} = \cos\frac{x}{2}\,, \qquad x \in [-\pi\,, \pi]\,.$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{a_o(f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\big|a_k(f)\big|^2 + \big|b_k(f)\big|^2 \Big) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 + \cos x\big) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \big(x + \sin x\big) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 1\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = 1 \\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$